

بنگاه افروزها و غف

معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن

پروفسور

اسماعیل یوسف

ناصر عزیزی

- سرشناسه : یوسفی، اسماعیل، ۱۳۵۲.
عنوان و پدیدآور : معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن
پدیدآورندگان: اسماعیل یوسفی، ناصر عزیزی
مشخصات نشر : تهران: هیسه، دلگشا، ۱۳۹۲.
مشخصات ظاهری : ۴۱۰ ص.: جدول، نمودار.
شابک : ۱۶۰۰۰۰ ریال، 978-600-6060-02-6
وضعیت فهرست نویسی : فیبا
موضوع : معادله‌های دیفرانسیل -- راهنمای آموزشی (عالی).
موضوع : معادله‌های دیفرانسیل -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی).
شناسه افزوده : عزیزی، ناصر، ۱۳۴۹.
رده‌بندی کنگره : ۱۳۹۲ ۱۶م/ی/۹۸۳۷۱ QA۳۷۱
رده‌بندی دیویی : ۵۱۵/۳۵۰۷۶
شماره کتابخانه ملی : ۳۲۹۸۰۱۲



- نام چاپ : معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن
مؤلفان : اسماعیل یوسفی - ناصر عزیزی
ناشر : هیسه
ناشر همکار : دلگشا
نوبت چاپ : اول
حروفچینی و صفحه‌آرایی : ITEX-پاریز : گروه فنی انتشارات هیسه (پاک‌نژاد)
لیتوگرافی : آبان
چاپ و صحافی : شریف
ناظر فنی چاپ : علی‌اصغر فدایی
تیراژ : ۱۰۰۰ نسخه
قیمت : ۱۶۰۰۰ تومان
شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۶۰۶۰-۰۲-۶

آدرس دفتر مرکزی: میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، نبش کوچه شعله‌ور، پلاک ۴، واحد ۱.

تلفن: ۴۱ - ۴۰ ۶۶۵ ۶۶۵ تلفکس: ۶۶۵۶۹۳۸۸

حق چاپ و نشر برای ناشر محفوظ است و هرگونه نسخه‌برداری از آن پیگرد قانونی دارد.

تقدیم به

همسرانمان

که همواره در نوشتن این کتاب مشوق ما
بوده‌اند و در پناه مهربانی‌شان مشکلات
ناشی از نوشتن این کتاب را با صبر و تحمل
برایمان آسان نمودند. اگر فداکاری آن‌ها
نبود هرگز این کار به سرانجام نمی‌رسید.

www.ketab.ir

به نام آن‌که جان را فکرت آموخت

مقدمه

معادلات دیفرانسیل از جمله مباحثی است که در بسیاری از شاخه‌های علوم و فنی مهندسی کاربردهای فراوانی دارد. بنابراین یادگیری مفهومی و درک عمیق مطالب آن مشهود است. بر این اساس در اختیار داشتن مرجعی کامل همراه مثال‌های متنوع و کاربردی، به یادگیری هر چه بیشتر این مطالب به دانشجویان عزیز کمک می‌کند.

ریخچه

در قرن هفدهم دانشمندان به هنگام حل چند معادله‌ی ناشی از هندسه و مکانیک به معادلات دیفرانسیل دست یافتند. بنیات اولیه موضوع این تفکر را پیش آورد که جواب همه‌ی معادلات دیفرانسیل را می‌توان بر حسب تابع مقادیر حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان کرد. بنابراین بخش وسیعی از کارهای اولیه به یافتن روش‌های برای حل معادله دیفرانسیل اختصاص یافت. در این قرن روش‌هایی از قبیل جداسازی متغیرها و استفاده از کامل‌سازی انتگرال‌ساز ابداع گردید. با فرارسیدن قرن هیجدهم، ریاضی‌دانان به صورت عمیق‌تری به معادلات دیفرانسیل پرداختند به نوعی که، قبل از پرداختن به حل معادلات دیفرانسیل معمولی باید از وجود یا عدم وجود جواب آن اطمینان پیدا کرد. بدین ترتیب معادلات دیفرانسیل به شکل کنونی توسعه یافت و امروزه به عنوان نسبت به ابزار ریاضیات در مسائل به‌کار می‌رود.

محتوای کتاب

ویرایش جدید کتاب معادلات دیفرانسیل بر مبنای نیازهای جدید دانشجویان و اعمال نظر اساتید محترم، مورد تجدید نظر قرار گرفت. بسیاری از دانشجویان در درس معادلات دیفرانسیل، نسبت به حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا هستند. به رغم این آشنایی گاهی به خاطر فقدان مهارت در عملیات جبری دچار مشکل می‌شوند. لذا سعی بر آن نمودیم تا با ایجاد تعادل جهت رفع این نقیصه از سوی دانشجویان کمک‌آموزش‌دهی انجام گردد. به همین دلیل در این کتاب سعی شده است در حل مثال‌ها، تمام راه حل‌های مرحله به مرحله نمایش داده شود تا قدرت تفهیم در دانشجویان بالاتر رود. مثال‌های کاربردی به دانشجویان کمک می‌کند تا کاربرد معادلات دیفرانسیل را در مسائل علوم و مهندسی بهتر درک کنند. سعی نمودیم تا دانشجویان برای تفکر به جای حفظ کردن فرمول‌ها و تعمیم مفاهیمی که معرفی شده است، ترغیب نماییم. امیدواریم دانشجویان پس از اتمام این درس، توانایی بیشتری برای حل مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل پیدا کنند. این کتاب مطابق آخرین تغییرات سرفصل درس معادلات دیفرانسیل معمولی تهیه و تدوین شده است. فصل‌های آن به ترتیب عبارتست از

۴. حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری

۱. مفاهیم اولیه

۵. دستگاه معادلات دیفرانسیل

۲. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۶. تبدیلات لاپلاس

۳. معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

ساختار کتاب

هر فصل کتاب شامل چند بخش است به‌گونه‌ای که؛ در هر بخش، تعاریف و قضایا به همراه مثال‌های مختلف آورده شده است و در انتهای بخش، تمرین‌های مربوط به آن بخش گنجانده شد. در پایان هر فصل، ابتدا خلاصه‌ی مطالب آن فصل آورده شده سپس پرسش‌هایی را تحت عنوان پرسش‌های مروری در نظر گرفته‌ایم که هدف از طرح این پرسش‌ها، مرور دانشجو از تعاریف، قضایا و براه حل‌های معادلات مختلف در غالب پرسش است. در نهایت، فصل را با تمرین‌های تکمیلی به پایان رساندیم. هدف از طرح این نوع تمرین‌ها، ترکیب کردن بخش‌های مختلف فصل، در شکل یک سوال ترکیبی است.

تعاریف. تعاریف را در غالب زیر ارائه داده‌ایم. برای این که دانشجو تعریفی را به راحتی در کتاب پیدا کند، تمامی تعاریف علاوه بر شماره‌گذاری با عنوان آن تعریف، نیز مشخص کردیم. برای این که شما بتوانید به‌تاز شماره‌گذاری فصل نمایان شود، از این نوع شماره‌گذاری در کتاب استفاده کنید.

تعاريف	1	تابع f من X إلى Y يسمى λ -توسيعاً إذا كان
		$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ (13-2)

- **قضایا:** از آن جایی که سیستم اسجویان با صورت قضیه بیشتر ارتباط دارند نه اثبات قضیه، بنابراین برای این که صورت قضیه در این کتاب به شکل برجسته ظاهر شود، از غالب زیر استفاده نموده ایم. تمام قضایا به همراه اسجوی قضیه بیان شده اند و مانند تعاریف دارای شماره‌های مستقل هستند.

مسئله ۲: $M(x, y)$ و $N(x, y)$ بیست و دوازده مشتقات جزئی مرتبه اول و بیست و سه مشتقاتی که $d \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ باشد آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه معادله

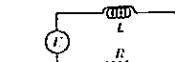
دیرنژیل

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (20-2)$$

کامل باشد این است که

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (21-2)$$

- مثال‌ها. بسیاری از مثال‌های کتاب دارای اهداف آموزشی هستند، از این رو با مثال‌ها به همراه موضوع مثال، مشخص شده است که همانند تعریف و قضیه دارای شمارندگی مستقل هستند.

[illegible]

$$L_{\text{eff}} = L(t) \quad (17-1)$$

که در آن A ، B و C به ترتیب

تاریخ: ۱۳۰۲/۱۱/۱۵

تغییرات ویرایش دوم

فصل اول

در این فصل چند مدل فیزیکی در غالب یافتن معادله‌ی دیفرانسیل اضافه نمودیم. همچنین چند مثال از ساختن منحنی‌های خاص با شرایط معین به دست آوردیم.

فصل دوم

در این فصل چند قضیه اضافه کردیم که در مورد جواب و یکتایی جواب معادله مرتبه اول است. همچنین در مورد شرط لیپ‌شیتز بیشتر بحث کرده‌ایم. چند مدل فیزیکی نیز در انتهای برخی از بخش‌ها آورده شده است.

مطالب اضافه شده در این فصل اغلب در مورد معادلات با ضرایب غیر ثابت است. معادله‌ی کوشی-اوایلر را به دو روش حل کردیم. در حل معادلات با استفاده از عملگرها، سعی شده است تمام مراحل حل در جلوی هر عمل انجام شده به سبج گردد.

فصل چهارم

در این فصل، بخش‌های مختلف اضافه کردیم و بعضی از اثبات‌های مربوط به همگرایی در مورد سری‌های توانی را به منظور درک بهتر دانشجویان انجام دادیم. درخواست یکی از مخاطبین این کتاب این بود که "هر کاری که به منظور ساده کردن کتاب برای درک دانشجویان لازم است انجام دهید" باعث شده است این فصل را بازنگری کلی نماییم.

فصل پنجم

در این فصل چند مثال کاربردی اضافه کردیم همچنین چند مسئله هدف‌دار از حل معادلات به روش ماتریسی آورده‌ایم.

فصل ششم

با توجه به این که تبدل لاپلاس برای بسیاری از دانشجویان مبحث کاربردی در دروس‌های تخصصی است، این فصل را بازنگری کلی انجام داده‌ایم. علاوه بر این چند قضیه از تبدیلات لاپلاس را در غالب کلی بیان کردیم.

تمرین‌ها

می‌دانیم که مؤلفه‌ی حیاتی معادلات دیفرانسیل، تمرین و حل مسئله است، بنابر اهمیتی که این مطلب دارد، تعداد تمرین‌ها را در هر بخش زیادتر کرده‌ایم. سازماندهی و گروه‌بندی تمرین‌ها در موضوعات مختلف را مانند چاپ‌های قبلی، همراه بلاگسترش مسائل کاربردی و نظری، انجام دادیم.

در پایان مؤلفین بر خود لازم می‌دانند از زحمات فراوان مدیریت محترم انتشارات هیمه و انتشارات دلگشا در خصوص فراهم آوردن امکان چاپ این اثر و گروه فنی هیمه به خصوص خانم‌ها: زهره پاک‌نژاد که زحمت حروفچینی و مریم پاک‌نژاد که با ظرافت خاصی زحمت صفحه‌آرایی کتاب را بر عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را به جا آوریم.

با وجود تلاش بسیار برای تصحیح اشکالات تایپی، به دلیل حجیم بودن کتاب امکان وجود هر نوع اشتباه را در آن نمی‌توان نادیده گرفت. لذا از مخاطبین محترم تقاضا داریم در صورت وجود برخورد با هرگونه اشتباهی، مراتب را با ناشر یا مؤلفان یا به ایمیل himehpublication@gmail.com اطلاع دهند. ضمناً هرگونه پیشنهاد سازنده برای ارتقاء سطح کیفی کتاب در چاپ‌های بعدی استقبال می‌گردد.

بیتا هیمه

مفاهیم اولیه

۲	تعاریف	۱-۱
۶	تشکیل معادله دیفرانسیل	۲-۱
۷	تشکیل معادله وقتی جواب عمومی معلوم است	۱-۲-۱
۱۰۰	مدل سازی	۲-۲-۱

معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

۲۳	دست‌نویس جواب مساله مقدار اولیه	۱-۲
۲۵	معادلات دیفرانسیل جداشدنی	۲-۲
۳۲	تبدیل معادلات جداشدنی	۳-۲
۳۲	حل معادلات $y' = f(ax + by + c)$	۱-۲
۳۳	حل معادلات $y' = f(y/x)$	۲-۳-۲
۳۴	حل معادله دیفرانسیل همگن	۱-۲-۳-۲
۳۷	حل معادله $f(a_1x + b_1y + c_1) + g(a_2x + b_2y + c_2) = 0$	۳-۳-۲
۴۰	حل معادلات $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$	۴-۳-۲
۴۲	معادله دیفرانسیل کامل	۴-۲
۴۵	عامل انتگرال‌ساز	۱-۴-۲
۴۷	حالت‌های خاص	۲-۴-۲
۵۱	دسته‌بندی کردن	۳-۴-۲
۵۶	معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول	۵-۲
۵۶	روش عامل انتگرال‌ساز	۱-۵-۲
۵۷	روش تغییر پارامتر	۲-۵-۲
۶۵	معادلات قابل تبدیل به معادله خطی مرتبه‌ی اول	۶-۲
۶۵	معادله تعمیم یافته خطی مرتبه اول	۱-۶-۲
۶۷	معادله‌ی برنولی	۲-۶-۲
۷۰	معادله‌ی ریکاتی	۳-۶-۲
۷۲	معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه n	۷-۲
۷۲	معادله نسبت به y' قابل حل باشد	۱-۷-۲
۷۳	معادله نسبت به y قابل حل باشد	۲-۷-۲
۷۳	معادله نسبت به x قابل حل باشد	۳-۷-۲

۷۴	معادله فاقد x	۴-۷-۲
۷۶	معادله فاقد y	۵-۷-۲
۷۸	معادله فاقد x و y باشد	۶-۷-۲
۷۹	خانواده‌ی منحنی‌ها و پوش	۸-۲
۸۱	معادله کلرو	۱-۸-۲
۸۱	معادله لاگرانژ	۲-۸-۲
۸۳	مسیرهای متعامد	۹-۲
۸۳	مسیرهای هم‌زاویه	۱-۹-۲
۸۵	مسیرهای متعامد	۲-۹-۲
۸۷	مسیرهای متعامد در مختصات قطبی	۱-۲-۹-۲

۹۶	معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم قابل تحویل به مرتبه اول	۱-۳
۹۶	معادله فاقد y باشد ($F(x, y', y'') = 0$)	۱-۱-۳
۹۷	معادله فاقد x باشد ($F(y, y', y'') = 0$)	۲-۱-۳
۱۰۰	معادله نسبت به متغیر مستقل و مشتقات آن همگن باشد	۳-۱-۳
۱۰۲	معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم	۲-۳
۱۰۷	روش کاهش مرتبه	۱-۲-۳
۱۱۰	روش نرمال‌سازی (جواب از یک حاصل ضربی)	۲-۲-۳
۱۱۲	معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت	۳-۳
۱۱۵	معادله دیفرانسیل خطی مرتبه m	۱-۳-۳
۱۱۸	معادلات دیفرانسیل خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت	۴-۳
۱۱۹	روش ضرایب نامعین	۱-۴-۳
۱۲۰	تعیین جواب خصوصی با استفاده از روش ضرایب نامعین	۱-۱-۴-۳
۱۲۶	روش تغییر پارامتر	۲-۴-۳
۱۴۱	حل معادله دیفرانسیل به کمک عملگر (اپراتور معکوس)	۵-۳
۱۴۴	عملگر معکوس	۱-۵-۳
۱۵۷	حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب غیرثابت	۶-۳
۱۶۰	معادلات دیفرانسیل کوشی-اوایلر	۱-۶-۳
۱۶۵	روش دیگر حل معادله‌ی کوشی	۱-۱-۶-۳
۱۶۹	معادله خطی لزاندر مرتبه دوم	۲-۶-۳

۱۸۲	سری توانی	۱-۴
۱۸:۶	۱-۱-۴ اعمال جبری بر سری های توانی	
۱۹:۳	سری های تیلور و مک لورن	۲-۴
۲۰:۱	حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری	۳-۴
۲۱:۳	نقطه منفرد منظم و نقطه منفرد نامنظم	۴-۴
۲۱:۶	حل معادله دیفرانسیل حوله نقطه منفرد منظم	۵-۴
۲۲:۶	ادلات دیفرانسیل خاص و توابع خاص	۶-۴
۲۲:۶	معادله دیفرانسیل لژاندر و تابع لژاندر	۶-۴
۲۳:۳	۱-۱-۱ تعامد چند جمله ای لژاندر	
۲۳:۵	۲-۱-۶-۴ سری لژاندر	
۲۳:۶	۱-۱ رابطه بازگشتی چند جمله ای های لژاندر	
۲۳:۷	۴-۱-۶-۴ وابسته بین چند جمله ای های لژاندر	
۲۳:۸	۲-۶-۴ تابع گ	
۲۴:۳	۴-۱-۶-۴ شکلا	
۲۴:۴	۳-۶-۴ معادله بسل و تابع بسل	
۲۴:۸	۱-۳-۶-۴ معادله به صورت $x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)y = 0$ باشد.	
۲۴:۹	۲-۳-۶-۴ معادله به صورت $x^2 y'' + xy' + 4(x^2 - \nu^2)y = 0$ باشد.	
۲۴:۹	۳-۳-۶-۴ معادله به صورت $x^2 y'' + 4xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ باشد.	
۲۵:۸	۴-۳-۶-۴ معادله به صورت $xy'' + (1 + \nu^2/x^2)xy = 0$ باشد.	
۲۵:۳	۵-۳-۶-۴ معادله به صورت $y'' + (x^2 + k)y = 0$ باشد.	
۲۵:۳	۶-۳-۶-۴ خواص توابع بسل	
۲۵:۷	۷-۳-۶-۴ تعامد توابع بسل	
۲۵:۹	۸-۳-۶-۴ سری بسل	
۲۶:۰	۹-۳-۶-۴ توابع بسل پیراسته	

۲۷:۰	۱-۵ رابطه ی بین دستگاه معادلات و معادلات دیفرانسیل	
۲۷:۰	۱-۱-۵ تبدیل معادله دیفرانسیل مرتبه m به دستگاه معادلات مرتبه اول	
۲۷:۱	۲-۱-۵ تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل به معادله دیفرانسیل	

۲۷۲	کاهش مرتبه دستگاه معادلات دیفرانسیل	۳-۱-۵
۲۷۴	دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی	۲-۵
۲۷۶	حل دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت	۱-۲-۵
۲۷۶	حل دستگاه با روش جای‌گذاری	۱-۱-۲-۵
۲۷۷	روش معادله مفسر	۲-۱-۲-۵
۲۸۳	دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرهمگن	۲-۲-۵
۲۸۴	فرم ماتریسی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی	۳-۵
۲۸۴	دستگاه همگن	۱-۳-۵
۲۹۰	دستگاه خطی ناهمگن	۲-۳-۵
۲۹۳	حل دستگاه با استفاده از عملگر	۴-
۲۹۶	بررسی دستگاه معادلات دیفرانسیل	۵-۵

۳۰-۵

تبدیل لاپلاس

۳۰۶	محاسبه تبدیل لاپلاس تابع خاص	۱-۶
۳۱۰	شرایط وجودی تبدیل لاپلاس	۲-۶
۳۱۴	خواص تبدیلات لاپلاس	۳-۶
۳۱۴	انتقال بر پایه x	۱-۳-۶
۳۱۶	تبدیل لاپلاس مشتق تابع	۲-۳-۶
۳۱۹	تبدیل لاپلاس انتگرال تابع	۳-۳-۶
۳۲۱	مشتق تبدیل لاپلاس	۴-۳-۶
۳۲۳	انتگرال تبدیل لاپلاس	۵-۳-۶
۳۲۷	تغییر مقیاس	۶-۳-۶
۳۲۷	انتقال بر پایه x	۷-۳-۶
۳۲۸	نوشتن تابع چندضابطه‌ای بر حسب تابع پایه‌ای واحد	۱-۷-۳-۶
۳۳۳	تابع ضربه	۲-۷-۳-۶
۳۳۵	تبدیل لاپلاس توابع متناوب	۸-۳-۶
۳۳۹	روش سری‌ها برای یافتن تبدیل لاپلاس	۹-۳-۶
۳۴۱	قضایای مقادیر اولیه و پایانی	۱۰-۳-۶
۳۴۷	تبدیلات معکوس	۴-۶
۳۵۴	کانولوشن دو تابع	۱-۴-۶
۳۵۹	کاربرد تبدیلات لاپلاس	۵-۶
۳۵۹	محاسبه انتگرال‌ها	۱-۵-۶

۳۶۲	حل معادلات دیفرانسیل	۲-۵-۶
۳۶۸	حل دستگاه معادلات دیفرانسیل	۳-۵-۶
۳۷۰	حل معادلات انتگرال	۴-۵-۶
۳۷۱	تبدیل معادله دیفرانسیل به معادله انتگرال	۱-۴-۵-۶
۳۷۹	حل مسئله آبل	۵-۵-۶

I	پیوست تبدیل لاپلاس
IV	جواب تمرین‌های شماره‌های فرد
XV	فهرست
XX	جدول انتگرال‌ها
XXV	مجموعه

www.ketab.ir