
ره‌آوردی از ریاضیات (جلد اول)

ارتباط متقابل بین توپولوژی،

توابع، هندسه و جبر

نوشته

کنجی یونو

کوجی شیگا

شیگ یوکی موری

ترجمه

دکتر حبیب امیری

دکتر هادی خطیب‌زاده



دانشگاه شهردر

سرنام:	اوشی، کنجی، ۱۹۴۵ - Ueno, Kenji
عنوان و نام پدیدآور:	ره‌آوردی از ریاضیات ارتباط متقابل بین توپولوژی، توابع، هندسه و حبر/نوشته کنجی یونو، کنجی شیکا، شیکا، یوکی موریتا؛ ترجمه حبیب امیری، هادی خطیب‌زاده.
مشخصات نشر:	زنجان: دانشگاه زنجان، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری:	۱۶۹ ص:؛ مصور.
شابک:	۹۷۸-۹۶۴-۸۸۸۵-۱۲-۲ ۳۵۰۰۰ ریال
وضعیت فهرست‌نویسی:	فبا
یادداشت:	اصل اثر به زبان ژاپنی بوده است. کتاب حاضر ترجمه‌ای است از متن انگلیسی تحت عنوان Mathematical gift: the interplay between topology functions, geometry, and algebra.
موضوع:	هندسه
شابک افزوده:	شیکا، کوجی، ۱۹۳۰ - م.
شناسه افزوده:	Shiga, Koji
شناسه افزوده:	موریتا، شیکا، یوکی، ۱۹۴۶ - م.
شناسه افزوده:	Monita, S. (Shigeru)
شناسه افزوده:	خطیب‌زاده، هادی، ۱۳۵۳ - مترجم
شناسه افزوده:	امیری، حبیب، ۱۳۵۵ - مترجم
شناسه افزوده:	دانشگاه زنجان
رده بندی کنگره:	Q141.45/الف ۹۳۳
رده بندی دیویی:	۵۱۶
شماره کتاب شناسی ملی:	۲۵۲۹۱۰



دانشگاه زنجان

ره‌آوردی از ریاضیات

ارتباط متقابل بین توپولوژی، توابع، هندسه و حبر
دکتر حبیب امیری، دکتر هادی خطیب‌زاده

سال چاپ: ۱۳۹۰ نوبت چاپ: اول
شمارگان: ۱۱۰۰ نسخه قیمت: ۳۵۰۰ تومان
ناشر: دانشگاه زنجان

نشانی: زنجان- کیلومتر ۶ جاده تبریز- دانشگاه زنجان- صندوق پستی ۳۱۳
تلفن: ۰۵۱۵۲۳۶۳ - ۰۲۴۱ فاکس: ۰۲۴۱-۲۲۸۳۰۷۷

مراکز پخش: کتابیران ۱: خیابان انقلاب،
بین خیابان فروردین و خیابان فخر رازی، ووبروی دانشگاه تهران
مجمع فرهنگی فروزنده، طبقه همکف، واحد ۳۱۶
تلفن تماس: ۶۶۵۲۹۳۳-۴
کتابیران ۲: خیابان انقلاب، بین خیابان فروردین و خیابان فخر رازی، ووبروی دانشگاه تهران
مجمع فرهنگی فروزنده، طبقه همکف، واحد ۳۱۹
تلفن تماس: ۶۶۵۳۴۶۲

سخن مترجمان

در میان همه کتابهای علمی موجود کتابهای اندکی وجود دارند که به شرح و بیان مطالب عمیق و بنیادین علمی به زبان ساده‌تر و توصیفی‌تر پردازند. کتاب ره‌آوردی از ریاضیات از جمله این کتاب‌ها است. ره‌آوردی از ریاضیات کتابی به شکل کلاسیک نیست که در آن مطالب ریاضی به صورت قضیه و اثبات‌هایی به طور دقیق و منطقی پشت سر هم آمده باشد، بلکه اثبات‌های آن با بیانی شهودی آورده شده است و برای کسانی که اطلاعات آنها در حد ریاضی عمومی است و حتی دانش‌آموزان خوب دبیرستان نیز قابل استفاده است. کتاب در سه جلد نوشته شده است که جلد اول آن را که پیش رو دارید در دو فصل تنظیم شده است. در فصل اول این کتاب مطالبی از توپولوژی و هندسه دیفرانسیل با بیانی ساده و شهودی آورده شده و سپس به بیان رابطه بین آنها پرداخته شده است. در فصل دوم به بیان مفهوم بعد پرداخته شده است. مفهومی که از دیرباز رمزآلود و مبهم بوده است.

نویسندگان سعی کرده‌اند در برخی جاها مانند نشان دادن نقاط بحرانی، انحنای گاوسی،... به بیان مثال‌هایی از زندگی روزمره پردازند که فهم مطالب را برای خواننده آسان‌تر و شیرین‌تر می‌کند.

کتاب همان طوری که در مقدمه نویسندگان هم آمده حاصل سخنرانی‌هایی در دانشگاه کیوتو برای دانش‌آموزان دبیرستان است که نویسندگان آن را به صورت کتاب در آورده‌اند. بنابراین کتاب در اصل به زبان ژاپنی بوده که انتشارات جامعه ریاضیات آمریکا آن را به زبان انگلیسی ترجمه کرده است و مترجمان ترجمه انگلیسی کتاب را به فارسی برگردانده‌اند. به نظر مترجمان، این کتاب آزمون و محک مناسبی برای خوانندگان است تا قوه تخیل و شهود خود را در فهم قضایا و مفاهیم ارائه شده بیازمایند.

در ترجمه این کتاب سعی شده که رعایت امانت کامل در ترجمه متن اصلی انجام شود در عین حال مترجمان به هیچ عنوان مدعی انجام ترجمه‌ای بی‌عیب و نقص نیستند، لذا از نظرها و پیشنهادهای همه‌ی خوانندگان این اثر استقبال می‌کند.

امیدواریم این تلاش کوچک در نشر فرهنگ ریاضی در کشورمان و همچنین در جذب علاقه‌ی دانش‌آموزان و دانشجویان به ریاضیات مفید و موثر باشد.

در نهایت مترجمان لازم می‌دانند از همکاران ارجمند جناب آقای دکتر پرویز احمدی و دکتر مجید حیدرپور که زحمت ویرایش علمی این ترجمه را کشیده‌اند نهایت قدردانی و سپاسگزاری را به جا آورند. همچنین مترجمان از جناب آقای دکتر ژاله که زحمت ویرایش ادبی را کشیده و در این راستا پیشنهادهای بسیار مفیدی ارائه نمودند، سپاسگزاری می‌نمایند.

www.ketab.ir

پیشگفتار مؤلف

در سال ۱۹۹۴، یک سری سخنرانی ریاضی به طور هفتگی برای دانش‌آموزان دبیرستان در دانشگاه کیوتو ارائه شد. کنجی یونو - که اولین نویسنده‌ی این کتاب است. نخست مسؤولیت این برنامه را عهده‌دار شد. این شکل سخنرانی‌ها را یونو پایه‌گذاری کرد و سپس با شور و اشتیاق فراوان به حدود پنجاه دبیرستان در ژاپن گسترش یافت. امروزه می‌توان این گونه سخنرانی‌ها را نه تنها در دانشگاه کیوتو بلکه در سایر دانشگاه‌های ژاپن نیز یافت.

در ۲۳ و ۲۴ دسامبر ۱۹۹۴ دانشگاه کیوتو برنامه ویژه‌ای را شامل یک سری سخنرانی آغاز کرد که بخشهایی از آن به هندسه اختصاص داشت. سه نویسنده این کتاب سخنرانی‌هایشان را در سه موضوع متفاوت ارائه کردند. پس از ارائه سخنرانی‌ها دانش‌آموزان دو دبیرستانی که در سخنرانی‌ها حاضر بودند درخواست کردند که در صورت امکان مطالب این سخنرانی‌ها به صورت کتابی منتشر شود.

ما درباره‌ی این موضوع فکر کردیم و احساس کردیم که این شکل سخنرانی نمی‌تواند به اندازه کافی رسا باشد. از آنجا که خودمان را فقط به ارائه‌ی سخنرانی‌ها محدود کرده بودیم، گستره‌ی شنوندگان بسیار محدود بود. همچنین محدودیت‌های خرافاتی دسترسی بیشتر افراد به این اطلاعات را کاهش می‌داد. ما در آن موقع آمادگی چاپ این سخنرانی‌ها را به صورت کتاب نداشتیم.

یک شب، یکی از دانش‌آموزان پیشنهاد داد که نام کتاب «ریاضیات به عنوان ره‌آوردی برای دانش‌آموزان دبیرستان» باشد. این پیشنهاد نخست برای ما تعجب‌آور بود. زیرا سخنرانی‌های ما برای دانش‌آموزان دبیرستان در همان حدی بود که برای دانشجویان سال‌های اول دانشگاه و ما عمداً بین آنان فرقی نگذاشته بودیم. دانش‌آموزان دبیرستان به نکته‌ای اشاره کردند که هم ما و هم دانشجویان دانشگاه از آن غفلت کرده بودیم که آموزش یک رهاورد است. آن میراثی است که باید دست به دست بگردد و درباره تمام تولیدات آن گفتگو شود. من اعتقاد دارم که تشابهی بین مفهوم آموزش و مفهوم سرزمین به عنوان چیزی که از گذشتگان به ارث برده شده وجود دارد. چیزی که باید به عنوان گنجی با ارزش و بی‌بدیل نسل به نسل

دست به دست شود. من فکر می‌کنم که ما این دیدگاه فلسفی بسیار با ارزش را از دست داده‌ایم که آموزش یک ره‌آورد ارزشمند است. آن شب جرقه‌ای در اذهان ما زده شد. تصمیم گرفتیم که کتابی را با همان عنوان پیشنهاد شده منتشر کنیم. این تصمیم که در بعدازظهر ۲۴ دسامبر گرفته شد تصمیم مناسبی برای شب عید کریسمس بود.

با کمک انتشارات «ایوانامی شوتن» ناشر ما، این دو جلد از «ره‌آوردی از ریاضیات» را منتشر کردیم. امیدواریم که خوانندگان ما محتوای این کتابها را همانند رایحه خوش و مسرت بخشی ببینند که از بهار ریاضیات صاطع می‌شود. ما معتقدیم که این کاملاً متفاوت با ریاضیاتی خواهد بود که شما قبلاً آموخته‌اید و ایمان داریم که شما با مطالعه‌ی ریاضیات به شکلی وسیع و سرگرم کننده به چیزی بیش از یک لذت ساده خواهید رسید. ما امیدواریم که شما آزادی روح و انعطاف‌پذیری ذهنی‌ای می‌یابید که در عمق تفکر منطقی خوابیده است. همچنین امیدواریم که شما با حالتی خوشبینانه شروع به خواندن این کتاب خواهید کرد و با فهمی وسیع‌تر از ریاضیات و ذهن انسان آن را تمام خواهید کرد.

حال خلاصه‌ای از محتوای این کتاب: در فصل اول از جلد یک، با استفاده از تعداد محدودی از معادلات ریاضی می‌توانیم دنیای اسرارآمیز هندسه مخفی در سطوح و خمها را بهتر ببینیم. این روشن‌بینی می‌تواند با پذیرش یک دیدگاه کلی‌تر درباره‌ی اشکال هندسی به دست آید. همچنین این دیدگاه کلی ما را به سمت شاخه‌ای که توپولوژی گفته می‌شود، راهنمایی می‌کند. این مقدمه برای توپولوژی از سخنرانی‌های «شیگی یوکی موریتا» گرفته شده است. در پایان بخش دوم از فصل یک برهان قضیه‌ی پوانکاره - هاف آورده شده است. مرحله نهایی این برهان پیشنهاد یک دانشجو در یکی از سخنرانی‌های موریتا در موسسه صنعتی کیوتو است. این دانشجو پس از سخنرانی موریتا روش اثبات خودش را به او نشان داد. موریتا اثبات آن دانشجو را که با اثبات خودش متفاوت بود جالب یافت و تصمیم گرفت که اثبات او را برای این کتاب انتخاب کند.

فصل دوم از جلد اول درباره‌ی ابعاد گفتگو می‌کند. شاید دانستن این نکته برای شما جالب باشد که این بحث را به خاطر پرسشهای بسیاری که از ما درباره‌ی بعد در پایان یکی از سخنرانی‌هایمان پرسیده شد، اضافه کردیم. ما این پرسشها را خلاصه کرده و آنها را از یک دیدگاه تا حدی کلی‌تر ارائه کرده‌ایم.

فصل سه از جلد دوم سفری در جاده تاریخ توابع مثلثاتی است. این توابع از مطالعه‌ی یک دایره متولد شدند. در این بخش نهایتاً به مفهوم بسط سری توانی توابع می‌رسیم. این جاده همچنین ما را به پیدایش توابع بیضوی می‌رساند. این مطالب از یک سخنرانی ارائه شده توسط «کوجی شیگا» گرفته شده است.

موضوع اصلی فصل چهار، که از سخنرانی «کنجی یونو» گرفته شده است، یک قضیه‌ی هندسی است که به آن قضیه‌ی «بستار پوانسله» گفته می‌شود. در بین قضایای بسیاری از هندسه ترکیبی که در قرن نوزدهم توسعه یافتند، این قضیه به دلیل زیبایی و سادگی و عمق آن برجسته‌تر شده است. وقتی شما رابطه‌ی بین بیضی‌ها و خط‌های مماس را که در قضیه ظاهر می‌شوند از نقطه نظر هندسه جبری بیان می‌کنید، به نقطه‌ی اشتراک هندسه و جبر خواهید رسید. این دو شاخه‌ی مشخصاً متفاوت از ریاضیات باعث گسترش یکدیگر شده و به یکدیگر عمق و اعتبار می‌بخشند. این وابستگی در ریاضیات مدرن نیز ادامه پیدا می‌کند. حال بیایید تا با هم به سمت این جاده حرکت کنیم تا فهم عمیق‌تری از خواص مرموزی که بین اشکال هندسی است بیابیم. ما امیدواریم که در پایان این سفر شما لذت مطالعه‌ی هندسه را تجربه کنید. می‌توانید فصل‌ها و جلد‌های این کتاب را به هر ترتیبی که بخواهید مطالعه کنید، نیاز نیست که فصل‌ها به ترتیب دنبال شوند. امیدواریم که شما راه‌آورد ما را بپذیرید و از آن لذت ببرید.

مارس ۱۹۹۵ کوجی شیگا

	مقدمه
۱۳	
۱۷	۱. دعوت به توپولوژی
۱۹	۱.۱ مشخصه‌ی اویلر
۱۹	۱.۱.۱ مشخصه‌ی اویلر یک مربع
۲۳	۲.۱.۱ مشخصه‌ی اویلر کره و چنبره
۲۶	۳.۱.۱ رویه‌های بسته
۳۳	۴.۱.۱ رویه‌های بسته و مشخصه‌ی اویلر آن‌ها
۳۹	۲.۱ گردبادهای تولید شده توسط باد و مشخصه اویلر
۳۹	۱.۲.۱ جهات باد و مراکز طوفان
۴۲	۲.۲.۱ اندیس یک نقطه‌ی بحرانی
۴۵	۳.۲.۱ قضیه‌ی پوانکاره-حاف
۵۱	۴.۲.۱ برهان قضیه‌ی پوانکاره-حاف
۵۹	۳.۱ انحنا‌ی یک رویه و مشخصه‌ی اویلر
۵۹	۱.۳.۱ بیضی‌ها، سهمی‌ها و هذلولی‌ها
۶۲	۲.۳.۱ صفحات مماس و رویه‌های خمیده
۶۹	۳.۳.۱ انحنا و نگاشت گاوس
۷۴	۴.۳.۱ انحنا‌ی گاوسی
۷۸	۵.۳.۱ قضیه‌ی گاوس-بونه
۸۷	۶.۳.۱ رویه‌هایی با انحنا‌ی ثابت
۹۳	۲. داستان بُعد
۹۵	۱.۲ تلاش برای دزدک بعد
۹۷	۱.۱.۲ دیدن باعث ایمان نمی‌شود
۱۰۲	۲.۱.۲ خم پثانو
۱۰۶	۲.۲ بعد چیست؟
۱۰۶	۱.۲.۲ ایده‌ی پوانکاره
۱۱۱	۲.۲.۲ خط، صفحه، فضا
۱۲۳	۳.۲.۲ رویه‌ها در فضای چهار بعدی
۱۲۵	۳.۲ شکل‌های سه بعدی
۱۲۵	۱.۳.۲ کره‌های سه بعدی
۱۳۱	۲.۳.۲ شکل‌های سه بعدی کلی

۱۵۰	۳. پیوست (فیزیک و بُعد)
۱۵۲	۱.۳ مکانیک نیوتونی
۱۵۵	۲.۳ هندسه فضا را توصیف می‌کند
۱۵۷	۳.۳ از مکانیک نیوتونی تا نسبیت
۱۵۹	۴.۳ نظریه‌ی مکانیک کوانتومی و نظریه‌ی میدان
۱۶۱	۵.۳ نظریه‌ی ابر ریزمان و فضا - زمان ۱۰ بعدی

www.ketab.ir

مقدمه

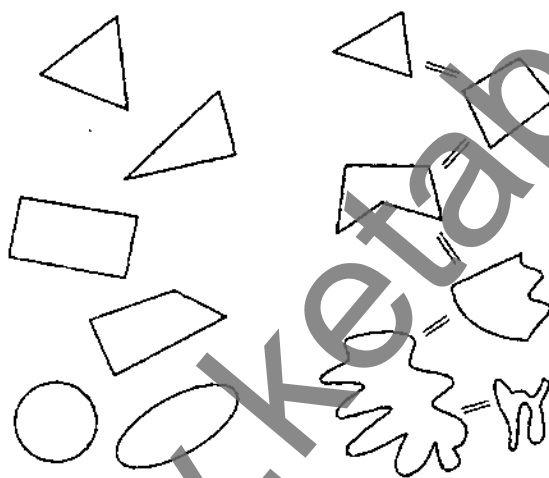
برای بسیاری از مردم توپولوژی نام آشنایی نیست زیرا یک شاخه‌ی نسبتاً جدیدی از ریاضیات است. توپولوژی در قرن بیستم هنگامی توسعه یافت که بسیاری از شاخه‌های ریاضیات مانند حسابان (لااقل در شکل اولیه‌ی آن) سیزده سال پیش توسعه یافته بود. واژه توپولوژی از دو واژه یونانی «topos» به معنی مکان و «logos» به معنی مطالعه مشتق شده است.

وقتی پوانکاره شروع به بیان این شاخه‌ی جدید در پایان قرن نوزدهم کرد، نام توپولوژی را برای آن به کار نمی‌برد بلکه به جای آن می‌گفت «Analysis Situs». یعنی، «آنالیز (تحلیل) مکان». در واقع، منشأ توپولوژی به احتمال زیاد می‌تواند به کار اوایل^۱ در قرن هجدهم و کارهای گاوس و ریمان در قرن نوزدهم باز گردد.

توپولوژی نظامی است که محدود به تفکر سنتی نمی‌شود. رهیافت آن اساساً مشاهده‌ی ساده اشکال هندسی با دقت و فهم تصویر کلی آنهاست. هیچ پیش‌نیازی برای مطالعه‌ی این موضوع وجود ندارد. در واقع می‌توان سخنرانی‌هایی برای نشان دادن مفهوم توپولوژی ارائه کرد بدون اینکه از هر گونه معادله پیچیده استفاده کنیم. وقتی می‌گوییم «مشاهده اشکال هندسی به دقت» به این معنی است که ما خواصی مهم از آنها را مشاهده می‌کنیم که وقتی شکل به طور پیوسته اما به آهستگی به شکل دیگر تبدیل می‌شود، آن خواص تغییر نمی‌کند و بنابراین شکل حاصل به عنوان همان شکل اصلی مورد توجه قرار می‌گیرد. در شکل 0، شما می‌توانید اشکال متفاوتی را در سمت چپ ببینید. وقتی اشکال را به طور آهسته اما پیوسته با کشیدن و منقبض کردن تغییر می‌دهیم نهایتاً شکل سمت راست را به دست می‌آوریم. در توپولوژی این اشکال را یکی می‌گیریم.

۱- لئونارد اوایل (۱۷۸۳-۱۷۰۷) بنابر عقیده‌ی بسیاری بزرگ‌ترین ریاضیدان قرن هجدهم میلادی است. او پدید آورنده‌ی کارهای مهم بسیاری است. وی بنیادی خود را کمی قبل از مرگش از دست داد، با وجود این به نوشتن مقاله‌های علمی ادامه می‌داد.

در هندسه، که علم مطالعه‌ی شکلها است، ابتدا توافق می‌کنند که شکلها کدام خواص مشترک را داشته باشند تا یکی گرفته شوند. به این دلیل هندسه مطالعه‌ی خواص مشترک شکلهای مورد توجه و رابطه‌ی بین این خواص است. برای مثال اگر یک شکل حرکت داده شود و روی شکل دیگری جا داده شود چنانچه آنها «منطبق» شوند، آن‌گاه این اشکال یکی در نظر گرفته شده و آنها را همنهشت می‌گویند. طولها و زوایا خواص مشخصه‌ی اشکال همنهشت هستند. احتمالاً هندسه‌ای که شما آموخته‌اید مطالعه‌ی خواص اشکال از نظر همنهشتی است.



شکل ۵

هندسه‌های بسیار مختلفی وجود دارد. در هندسه اقلیدسی، شما می‌توانید همنهشتی را با قرار دادن شکلی روی شکل دیگر امتحان کنید، اگر منطبق شوند همنهشتند. طولها و زوایا از خواص هندسه‌ی همنهشتی هستند.

بعضی وقت‌ها در هندسه اشکال متشابه (متناسب) مقایسه می‌شوند. در این حالت به زوایا و نسبت طولهای اشکال توجه می‌کنیم. نوعی از هندسه که اشکال را از نقطه نظر همنهشتی و تشابه مطالعه می‌کند حدود ۲۴۰۰ سال پیش در یونان پایه‌گذاری شده است. از نقطه نظر ریاضیات قرن بیستم، هندسه می‌تواند تقریباً به دو شاخه تقسیم شود، هندسه دیفرانسیل که طولها و زوایا در آن مهم است و توپولوژی که در آن تفاوت‌های اندک در طولها و زوایا بی‌اهمیت است.

اما، این دو شاخه از ریاضیات مدرن مستقل از هم نیستند. به علاوه، آنها دو راه متفاوت را برای مشاهده اشکال ارائه می‌دهند. وقتی یک شکل را مطالعه می‌کنیم استفاده از هر روش به ما اجازه می‌دهد که خواص اشکال را دقیق‌تر ببینیم. این دو نقطه نظر کارایی همدیگر را افزایش می‌دهند و غالباً خواص مخفی اشکال را که ممکن است در صورت استفاده از یکی از این دو روش به تنهایی مشاهده نشوند، آشکار می‌کنند.

در این فصل، ما بحث درباره مشخصه‌ی اوایلر یک رویه مبادرت به طرح تصویری از هندسه مدرن خواهیم کرد.