

ریاضیات مهندسی پیشرفته

تألیف:

آلن جفری

مترجم:

فیروز سیف

عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد بروجرد



واحد بروجرد

۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی بروجرد
ریاضیات مهندسی پیشرفته

Email: Publisher@iaub.ac.ir

سخن ناشر

به نام خداوند لوح و قلم حقیقت نگار وجود و عدم
خدایی که داننده رازهاست نخستین سرآغاز آغازهاست

دانشگاه آزاد اسلامی، به عنوان یکی از ارکان نظام آموزش عالی کشور در چشم انداز بیست ساله خود، توسعه کیفی را به طور جدی مدنظر قرار داده است. دانشگاه آزاد اسلامی بروجرد به عنوان یکی از با سابقه ترین واحدهای دانشگاهی سطح کشور با عنایت به پتانسیل های موجود و در راستای این حرکت عظیم علمی و فرهنگی و به منظور ایجاد سرعت، دقت و هماهنگی بیشتر در اجرای کلیه امور مربوط به تأمین منابع آموزشی مورد نیاز و همچنین تشویق و ترغیب محققان، مؤلفان و مترجمان دانشگاهی به نگارش و ترجمه کتب معتبر علمی، شورای انتشارات علمی خود را تشکیل داد. بدیهی است که ورود به این عرصه خطیر جز با استمداد از خداوند متعال و چشم یاری داشتن از محققان و پژوهشگران استادان ارجمند امکان پذیر نیست. لذا از همه صاحب نظران ارجمند دعوت می شود ما را از نقطه نظر ها و راهنمایی های ارزشمند خود بهره مند سازند. در پایان بر خود لازم می دانم از جناب آقای دکتر فرهاد دانشجو ریاست دانشگاه آزاد اسلامی، معاون محترم پژوهشی دانشگاه به سبب برقراری شرایط و بستر مناسب انجام فعالیت های حوزه پژوهش واحد در بخش توسعه فعالیت های چاپ و نشر، تشکر و قدردانی نمایم. ضمناً شایسته است از فعالیت ها و تلاش های علمی آقای فیروز سیف در ترجمه کتاب ریاضیات مهندسی پیشرفته مراتب سپاسگزاری خود را ابراز نمایم.

دکتر احمد سیف

رئیس دانشگاه آزاد اسلامی بروجرد

پیشگفتار مؤلف

این کتاب از مجموعه مطالب ارائه شده طی سال‌های تدریس درس ریاضیات مهندسی برای مقاطع مختلف تحصیلی در دانشگاه‌های آمریکا و انگلستان و دیگر جاها استخراج شده است. کتاب حاضر جنبه‌های پیشرفته‌تری از ریاضیات مهندسی که بین رشته‌های مختلف مهندسی در سطوح اولیه مشترک است را پوشش می‌دهد. آنچه این کتاب را از سایر متون همنام آن متمایز می‌سازد تأکید برای آن بر بعضی مباحث، بیان و توسعه منظم نظریه‌های اصولی پیش از پرداختن به کاربرد آنها، و دربر داشتن مواد و مطالب جدید است.

پیش نیازها

فصل اول که به مرور پیش نیازهای ریاضی اختصاص دارد دو هدف را دنبال می‌کند. نخست یادآوری مطالبی از دوره‌های قبل و فراهم کردن منبع جامعی از مواد پایه‌ای مورد نیاز و دوم آنکه اینکار باعث می‌شود (منظور آوردن مطالب مقدماتی در فصل اول است) تا با حذف برخی مواد مقدماتی از بدنه اصلی متن بتوان مفاهیم پیشرفته‌تری را بدون از دست دادن کلیت بحث مورد بررسی قرار داد.

مثال‌های کار شده

به دنبال هر فکر و اندیشه تازه‌ای که در فصل‌ها مطرح و به کار گرفته می‌شود تعداد زیادی مثال کار شده است تا اینکه هنگام بیان کاربردهای آن، شخص دارای یک پیش زمینه از قبل باشد. توانایی فرموله کردن مسائل فیزیکی بر حسب عبارت‌های ریاضی یک جزء اساسی از تمام کاربردهای ریاضی است. هرچند این یک متن در خصوص مدلسازی ریاضی نیست، اما هر جا که کاربردهای فیزیکی پیچیده‌تری مطرح شده است سعی کرده‌ایم تا با بسط موضوع به روشن شدن طبیعت فیزیکی مساله کمک کنیم. برخی مثال‌ها، از قبیل مثال‌های مربوط به تعیین نیروهای مؤثر بر پایه‌های یک ساختار بناشده (مانند نیروهای وارد بر پایه‌های یک پل و یا ساختمان‌های بلند)، استهلاک (میرایی یا تعدیل) ارتعاشات ایجاد شده توسط یک ژنراتور و نیز تعیین مدهای ارتعاشات مربوط به یک پوسته یا غشاء مرتعش، همگی نشان دهنده اهمیت ریاضیات در زمینه کاربردهای عملی هستند. مثال‌های دیگری بدون ذکر کاربرد خاصی از آنها و به منظور تقویت درک افکار و مفاهیم جدید ریاضی و تکنیک‌های مربوط به آنها آورده شده است.

ک نمونه متفاوت از مثال‌ها، مثال مربوط به تعیین طول بلندترین میله پرچم با توجه به

پدیده خمیدگی برای طول های بلند است. اگر چه مدل بکار رفته منجر به یک جواب دقیق از مساله نمی شود اما یک مثال نوعی برای بیان چگونگی مدلسازی ریاضی را به دست می دهد.

مجموعه تمرینات

با توجه به اینکه داشتن درک عمیقی از ریاضیات برای دانشجویان مهندسی امری ضروری است، لذا، اصول مباحث ریاضیاتی محض به شکل منظم، با انتخاب دقیق مثال ها، همراه با استحکام بخشی به آنها از طریق تهیه مجموعه های بزرگی از تمرینات در پایان هر بخش، بسط و گسترش داده شده است. این مجموعه از تمرین ها، شامل برخی تمرینات روتین و معمولی است که تعمداً به منظور ایجاد ممارست برای هنگام مواجهه با حالت های ویژه و خاص آورده شده است. همچنین تمرین های چالش برانگیز زیادی که موضوع اصلی متن را به طرق مختلف مرور می کنند را آورده ایم.

هرچند بسیاری از این تمرین ها را می توان با استفاده از پکیج های کامپیوتری (بسته های نرم افزاری) استاندارد به سرعت حل کرد، اما نویسنده بر این باور است که معانی و مفاهیم اساسی ریاضی مورد بحث تنها وقتی آنگاه که باید فهمیده می شوند که تعداد قابل توجهی از تمرین ها ابتدا بطور دستی حل شوند پس از آن از پکیج های کامپیوتری می توان برای تحقیق درستی نتایج استفاده کرد، همچنان که در برخی از تمرین ها این مطلب خواسته شده است. هر جا که نیاز به انجام محاسبات کامپیوتری است و یا اینکه کمک گرفتن از آن می تواند سودمند باشد، شماره آن تمرین با رنگ آبی مشخص شده است. مقایسه بین جواب های کامپیوتری به دست آمده با جواب های دستی نه تنها صحت محاسبات دستی را تأیید می کند، بلکه همچنین می توانند برای نشان دادن اینکه چگونه روش حل، شکل جواب را تعیین می کند نیز به خدمت گرفته شوند. نویسنده معتقد است که تنها زمانی که مفاهیم اساسی کاملاً فهمیده شد، استفاده عادی از کامپیوتر، و یا نرم افزارهای عددی برای حل مسائل پیچیده که حل دستی آنها دشوار است، و یا تنها می توان برای آنها جواب های عددی به دست آورد بلامانع است.

مفاهیم جدید

نمونه بارزی از مفاهیم جدیدی که در این کتاب یافت می شود ماتریس نمایی و کاربرد آن در حل دستگاه های خطی معادلات دیفرانسیل معمولی، و کاربرد تابع گرین (Green's function) است. بحث مقدماتی در خصوص گسترش جواب های ناپویسته معادلات شبه خطی مرتبه اول، که در مطالعه جریانات گازی مافوق سرعت و کاربردهای فیزیکی گوناگون دیگر دارای اهمیت خاص است، از جمله مطالب جدیدی است که در متون دیگر نمی توان آنرا یافت.

بیان شرحی بیشتر از حد معمول در خصوص تبدیل لاپلاس. در حالیکه تبدیل لاپلاس بطور معمول در حل مسائل استاندارد مهندسی، مانند تئوری کنترل و ...، بکار می رود، در اینجا

کاربرد تبدیل لاپلاس در حل مسائل غیر استاندارد گوناگونی را نیز مطرح کرده‌ایم که، از آن جمله می‌توان به حل مساله مقدار مرزی برای معادله‌ای که خمیدگی یک تیر (نورد) را توصیف می‌کند اشاره کرد. در فصل حساب انتگرال برداری دو قضیه اساسی انتقال برداری را که دارای اهمیت قابل توجهی در بسیاری از شاخه‌های مهندسی هستند استنباط کرده و بکار برده‌ایم و البته آنها را در متون مشابه دیگر نمی‌توان یافت.

آنالیز مختلط

به دلیل اهمیت آن در کاربردها بسیار گوناگون، فصل‌های مربوط به آنالیز مختلط نسبت به آنچه در متن‌های دیگر در این خصوص می‌توان یافت شامل موضوعات بیشتری است. به ویژه، گنجاندن مبانی دربارۀ انتگرال وارون تبدیل لاپلاس، امکان معرفی روش‌های تبدیلی برای حل یک مساله شامل معادلات دیفرانسیل جزئی و معمولی که عموماً جدول زوج تبدیلات لاپلاس برای آنها کفایت نمی‌کند را به وجود آورده است. برای اجتناب از پیچیدگی‌های غیر ضروری، و بیان موضوعات مورد بحث در حد قابل قبول، برخی مباحث بسط و توسعه نیافته‌اند (در این خصوص از استدلال‌های سخت کاملاً ریاضی پرهیز شده است) با این وجود، در چنین مواردی آنچه بیان کرده‌ایم برای تمام مقاصد عملی کافی است. البته هر جا که لازم بوده، مباحث آنالیز مختلط با جزئیات کامل ارائه شده است.

نگاشت کانفرمال (همدیس) و مسائل مقدار مرزی

در این فصل اطلاعات کافی در خصوص نگاشت‌های کانفرمال بمنظور آشنایی با کاربرد آنها در تهیه و ارائه یک بینش هندسی نسبت به جواب برخی مسائل مقدار مرزی دو بُعدی اساسی برای معادله لاپلاس فراهم می‌شود. کاربردهای فیزیکی همچون توزیع دمای حالت پایدار، مسائل الکترواستاتیک، و مکانیک سیالات ساخته و پرداخته می‌شوند. فصل نگاشت کانفرمال همچنین یک رویکرد و نگرش کاملاً متفاوتی برای حل برخی از مسائل مقدار مرزی دو بُعدی را فراهم می‌آورد که در فصل بعدی در خصوص معادلات دیفرانسیل جزئی به روشی بسیار متفاوت با عنوان روش جداسازی متغیرها حل می‌شوند.

معادلات دیفرانسیل جزئی

درک و فهم معادلات دیفرانسیل جزئی یک امر ضروری در تمامی شاخه‌های مهندسی است، اما مطالب در این مورد در متون ریاضیات مهندسی اغلب از آنچه مورد نیاز است کوتاهتر است. دلیل این امر تمایل و گرایش این متون به تمرکز بر سه نوع استاندارد از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی، و حل آنها به روش جداسازی متغیرها است، و این (امر) سبب می‌شود تا به معادلات مرتبه اول و دستگاه‌هایی که (این) معادلات اساسی خطی مرتبه دوم مذکور از آنها نتیجه می‌شوند پرداخته نشود. در اغلب موارد آنچه در خصوص شرایط مرزی و اولیه مناسب برای انواع مختلف معادلات دیفرانسیل جزئی گفته می‌شود بسیار کم

است. در اغلب این متون هیچ اشاره‌ای به نقش مهم ایفا شده توسط مفهوم غیر خطی بودن در معادلات مرتبه اول و روشی که خواص جواب های آنها را تحت تاثیر قرار می دهد نمی شود و یا کمتر اشاره می شود. گزارش آمده در اینجا (فصل ۸) با شروع از معادلات خطی و شبه خطی سعی دارد تا فهم روش شرایط اولیه و مرزی، و جواب های مؤثر غیر خطی را ساده کند. بحث در خصوص تأثیرات غیر خطی بودن، تقریباً در مراحل ابتدایی مطالعه معادلات دیفرانسیل جزئی معرفی می شود زیرا این مطلب نقش بسزایی در موضوعاتی نظیر مکانیک سیالات و مهندسی شیمی دارد. این گزارش همچنین شامل بحث مختصری در خصوص جواب های موج ضربه ای است که اهمیت بنیادین در جریان گازی مافوق صوت و غیره دارد.

مساله انتشار موج خطی و غیر خطی به دلیل اهمیت کاربردی قابل توجه آن با جزئیات بررسی می شود؛ علاوه بر توصیف روشی با عنوان روشهای تبدیل انتگرال خواهیم پرداخت که می تواند در حل معادلات دیفرانسیل جزئی مورد استفاده قرار گیرد. از یک نقطه نظر پیچیده ریاضی، حل یک معادله دیفرانسیل جزئی به روش جداسازی متغیرها تنها یک جواب صوری از مساله را فراهم می آورد، که آن در صورت کامل بودن مجموعه توابع ویژه وارد در بحث تنها منجر به یک جواب پیچیده می شود. پرداختن به این موضوع سطح مطالب را از آنچه مورد نیاز است بالاتر می برد و بهمین دلیل فرض می شود که هر مجموعه از توابع ویژه ای که در فرایند حل مساله رخ می دهند کامل باشد. این فرض هنگام استفاده از روش جداسازی متغیرها در اینجا و همچنین به صورت مجازی در تمام حالت های کاربردی دیگر می تواند توجیه شود.

تشکر و قدردانی

در اینجا می خواهم از تمامی منتقدین و خوانندگان دقیق به خاطر انتقادات و پیشنهادهای ارزشمندشان صمیمانه تشکر و قدردانی کنم، کسانی که نامشان در زیر آمده است و کسانی که ناشناس باقی می مانند، همچنین از دانشجویانی تشکر می کنم که با پرسش های خود در خصوص مباحث مطرح شده در کتاب، نقشی اساسی در پیشرفت و توسعه آن داشته اند. تشکر ویژه دارم از:

Chun Liu , Pennsylvania State University

William F. Moss , Clemson University

Donald Hartig , California Polytechnic State University at San Luis Obispo

Howard A. Stone , Harvard University

Donald Estep ; Georgia Institute of technology

Preetham B. Kumar , California State University at Sacramento

Anthony L. Peressini , University of Illinois at Urbana-Champaign

Eutiquio C. Young , Florida State University

Colin H. Marks , Rochester Institute of Technology

Edgar Pechlaner , Simon Fraser University

Ronald B. Guenther , Oregon State University

Mattias Kowski , Arizona State University

L.F.Shampine , Southern Methodist University

در پایان، همچنین از ویراستار خود، باربارا هلند (Barbara Holand) برای کمک ارزشمندشان و نیز بخاطر نظرشان در معرفی، جولی بولداک (Jolie Bolduc)، ویراستار محصول نهایی، بخاطر صبر و شکیبایی و راهنمایی هایشان تشکر می‌کنم؛ همچنین از مایک سوگرمن (Mike Sugarman) برای توضیحات و تفاسیرشان در مراحل ابتدایی نوشتن تا پایان، و نهایتاً از، چاک گلاس (Chuck Glaser)، بخاطر تشویق اینجانب در نوشتن کتابی در این سطح بالا تشکر و قدردانی می‌نمایم.

www.ketab.ir

پیشگفتار مترجم

کتاب حاضر ترجمه‌ای از فصل‌های ۹، ۱۰، ۱۳ تا ۱۸ کتاب ریاضیات پیشرفته مهندسی « Advanced Engineering Mathematics » آلن جفری « Alan Jeffrey » است که مباحث آن منطبق با سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری برای این درس می‌باشد. این کتاب اساساً به عنوان یک کتاب درسی برای استفاده دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی نوشته شده است و هدف آن آشنا کردن این گروه از دانشجویان با مفاهیم و مسائل کاربردی در بخش‌های گوناگون فیزیک و مهندسی است. بر این اساس نویسنده کوشیده است تا درک مطالب و مفاهیم مورد نیاز را به زبانی ساده و با ارائه مثال‌های متعدد و متنوع و با گنجاندن تمرین‌های فراوان در پایان هر بخش برای خواننده تا حد ممکن ساده کند.

برای فهم بهتر مفاهیم، داشتن پیش زمینه‌ای از دروس ریاضیات عمومی و معادلات دیفرانسیل معمولی ضروری است. مطالب این کتاب برای یک ترم با سه ساعت تدریس و یک ساعت حل تمرین مناسب است و البته مدرس به صلاحدید خود می‌تواند از طرح جزئیات غیر ضروری پرهیز کند.

از خوانندگان عزیز استدعا دارم تا چنانچه به مواردی از اشکال در روانی جملات و یا نقل مفاهیم برخورد کردند، بر مترجم منت نهاده و او را از آن موارد آگاه سازند تا انشاءاً... در چاپ‌های بعدی این نواقص بر طرف گردند.

در پایان از تمامی کسانی که به نوعی در تهیه و تدوین این کتاب مرا یاری کرده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم؛ بویژه تشکر می‌کنم از ریاست محترم دانشگاه دکتر احمد سیف و معاونت محترم پژوهش دکتر مهدیان و مدیر محترم انتشارات آقای یاریار که با کمک این عزیزان زمینه چاپ این اثر فراهم گردید.

www.ketab.ir

پیشگفتار

ii

۱ سری فوریه

۱

۱.۱ سری فوریه تابع f بر فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ ۲

۱.۲ همگرایی سری فوریه، انتگرال و مشتق آن ۲۱

۱.۳ سری سینوسی و کسینوسی فوریه بر بازه $0 \leq x \leq L$ ۳۵

۱.۴ فرمهای دیگر سری فوریه ۴۰

۱.۵ طیف های دامنه و فرکانس یک تابع ۴۸

۱.۶ سری فوریه دوگانه ۵۳

۲ انتگرال های فوریه و تبدیل فوریه

۶۳

۲.۱ انتگرال فوریه ۶۳

فهرست مندرجات

۲.۲ تبدیل فوریه ۷۲

۳.۲ تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه ۹۲

۳ توابع تحلیلی ۱۰۵

۱.۳ توابع مختلط و نگاشتها ۱۰۵

۲.۳ حدها، مشتقها، و توابع تحلیلی ۱۱۴

۳.۳ توابع هارمونیک و معادله لاپلاس ۱۳۱

۴.۳ توابع مقدماتی، توابع معکوس، و شاخه ها ۱۴۰

۴ انتگرال مختلط ۱۵۳

۱.۴ انتگرال های مختلط ۱۵۳

۲.۴ کنتورها، قضیه کوشی -گورسا و انتگرال های کنتوری ۱۶۷

۳.۴ فرمول انتگرال کوشی ۱۸۶

۴.۴ برخی خواص توابع تحلیلی ۱۹۶

۵ سری لوران، مانده ها و انتگرال گیری کنتوری ۲۱۳

۱.۵ سری توانی و سری تیلور مختلط ۲۱۳

۲.۵ همگرایی یکنواخت ۲۳۸

۲۴۴	۳.۵	سری لوران ورده بندی افرادها
۲۶۳	۴.۵	مانده ها و قضیه مانده
۲۷۶	۵.۵	محاسبه انتگرال های حقیقی با استفاده از مانده ها
۳۰۹	۶	انتگرال معکوس لاپلاس
۳۱۰	۱.۶	انتگرال معکوس تبدیل لاپلاس
۳۲۷	۷	نگاشت همدیس
۳۲۸	۱.۷	نگاشت همدیس
۳۶۳	۲.۷	نگاشت های همدیس و مسائل مقدار مرزی
۳۸۷	۸	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۳۸۷	۱.۸	یک معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی چیست ؟
۳۹۷	۲.۸	روش مشخصه ها
۴۰۸	۳.۸	انتشار موج و PDE های مرتبه اول
۴۲۰	۴.۸	جواب های عمومی: قوانین پایستگی و شوک ها
۴۲۷	۵.۸	سه نوع اساسی از PDE های خطی مرتبه دوم
۴۳۷	۶.۸	رده بندی و تحویل به فرم استاندارد معادله مشتقات جزئی مرتبه دوم

فهرست مندرجات

۴۵۳	شرایط مرزی و شرایط اولیه	۸. ۷
۴۵۶	امواج و معادله موج یک بُعدی	۸. ۸
۴۶۱	جواب دالامبر معادله موج و کاربردها	۸. ۹
۴۷۱	روش جداسازی متغیرها	۸. ۱۰
۵۲۳	برخی نتایج کلی برای معادلات گرما و لاپلاس	۸. ۱۱
۵۲۸	مقدمه‌ای بر روش حل PDE ها توسط تبدیلات لاپلاس و فوریه	۸. ۱۲