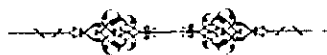


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



خدا یا چنان کن سرانجام کار تو خوشنود باشی و مار سگار

مبانی آنالیز ریاضی

ویژه رشته‌ی ریاضیات و کاربردها - آمار و کاربردها - مجموعه علوم کامپیوتر

کارشناسی ارشد

مؤلفین: محمد شیرازی - فؤاد نادری

چاپ اول

بهار ۱۳۹۳

سروش‌نامه: شیرازی: محمد

عنوان و نام پدیدآور: مبانی آنالیز ریاضی ویژه رشته‌ی ریاضیات و کاربردها - آمار و کاربردها - مجموعه علوم کامپیوتر کارشناسی ارشد /

مؤلفین: محمد شیرازی، فؤاد نادری

مشخصات نشر: تهران: مدرسان شریف، ۱۳۹۳.

مشخصات ظاهری: [۵]: ۷۶۰ ص: ۲۲ × ۲۹ س.م

شابک: 978-964-11-2290-6

وضعیت فهرست نویسی: فیبا

موضوع: آنالیز ریاضی -- راهنمای آموزشی (عالی)

موضوع: آنالیز ریاضی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

موضوع: آنالیز ریاضی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)

موضوع: دانشگاه، مدارس عالی -- ایران -- ایران

موضوع: آزمون دوره‌های -- ایران -- ایران

شناسه افزوده: نادری، فؤاد

رده بندی کنگره: ۲۱۳۹۳ ۹۰۰ ش ۳۰ Q۴

رده بندی دیویی: ۵۱۵/۰۷۶

شماره کتابشناسی ملی: ۳۴۷۸۵۴۶

نام کتاب: مبانی آنالیز ریاضی (ویژه رشته‌ی ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها و مجموعه علوم کامپیوتر)

مؤلفین: محمد شیرازی - فؤاد نادری

ناشر: انتشارات مدرسان شریف

تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه

نوبت چاپ: اول

تاریخ چاپ: خردادماه ۱۳۹۳

حروف چینی: واحد تایپ انتشارات مدرسان شریف

چاپ و صحافی: مهدی - مینو

قیمت: ۴۸۰۰۰ تومان

شابک: 978-964-11-2290-6

هر گونه استفاده از مطالب این کتاب اعم از بازنویسی، خلاصه‌سازی، نقل مطالب آموزشی، استفاده از سؤالات یا پاسخ‌ها، برداشت به صورت دست‌نویس، کپی، تکثیر و یا هر گونه چاپ سنتی و دیجیتالی، استفاده به صورت کتاب الکترونیکی، لوح فشرده، قرار دادن مطالب بر روی اینترنت و وب سایت‌ها و یا هر گونه شبکه کامپیوتری دیگر و به طور کل هر گونه استفاده‌ی اشخاص حقیقی و حقوقی در جهت منافع معنوی و مادی خود، بدون اجازه کتبی ناشر ممنوع و بر اساس بند (۵) ماده ۲۳ قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قوانین مربوط به جرایم رایانه‌ای کشور قابل پیگیری در محاکم قضایی می‌باشد.

به نام خدا

« مقدمه مؤلفین »

« تقدیم به پدر و مادر بزرگوار و همسر مهربان ... »

خوشبختانه در زمینه «آنالیز ریاضی» کتاب‌های بسیاری در کشورمان ترجمه، گردآوری و تألیف شده‌اند که بعضی از آنها مانند کتاب «اصول آنالیز ریاضی» تألیف پروفسور «والتر رودین» سال‌هاست که در بسیاری از دانشگاه‌های ایران منبع رسمی دروس آنالیز ریاضی ۱ و ۲ (قدیم) و مبانی آنالیز ریاضی (جدید) می‌باشند. وجود این کتب از جهتی برای جامعه دانشگاهی کشورمان بسیار مفید و سودمند بوده و از سوی دیگر تألیف هر کتاب جدیدی را بسیار سخت و دشوار می‌سازد.

در واقع تألیف هر کتاب جدیدی باید با توجه به نقاط ضعف و قوت کتب موجود و همچنین با توجه به نیاز دانشجویان جدید و طبع آنها باشد. لذا تمام سعی مؤلفین در این کتاب، دربرگیری در حد توان نقاط قوت کتب دیگر و پوشش حداکثری نقاط ضعف آنها بوده است که امیدواریم در این مسیر گامی کوچک برداشته باشیم.

کتاب حاضر شامل تمام فصل‌های مصوب جدید «وزارت علوم و تحقیقات» برای درس مبانی آنالیز ریاضی (آنالیز ریاضی ۱ و ۲ قدیم)، تمام سؤالات کنکورهای سراسری دانشگاهی ایران از سال ۱۳۸۰ به بعد، پاسخ سؤالات آزمون‌های دکتری ۹۱، ۹۲ و ۹۳ و صدها تست تألیفی (بیش از ۱۷۰ تست) و مثال (بیش از ۵۴۴ مثال)، همراه پاسخ تشریحی می‌باشد. لذا از این جهت شما را از مراجعه به کتب دیگر بی‌نیاز می‌کند. به ویژه در فصل اول مقدمات بسیاری را از دروس پیش‌نیاز در مبانی ریاضی، جبر و جبر خطی ذکر کرده‌ایم که امیدواریم مورد استفاده شما خوانندگان قرار بگیرد. در انتهای کتاب، سؤالات آزمون سراسری ۹۳، ۹۴ و ۹۵، اساسی ارشد و دکتری با پاسخ کاملاً تشریحی آن‌ها و ۶ مرحله آزمون خودسنجی در سطوح A (ساده)، B (متوسط) و C (سخت) ارائه شده است. برای این حلقه آزمون خودسنجی را می‌توانید در سایت www.modaresanesharif.ac.ir مشاهده نمایید.

لازم به ذکر است که حجم بالای کتاب، علت اصلی است. در فصل‌های مصوب مبانی آنالیز (در واقع ترکیب دو درس آنالیز ریاضی ۱ و ۲ قدیم) و همچنین به علت تعداد زیاد سؤالات و توضیحات می‌باشد و علی‌رغم این، در اولیه، به علت متن روان، این کتاب را می‌توانید در مدت کوتاهی مطالعه بفرمائید. در واقع این کتاب نه تنها برای کنکورهای کارشناسی ارشد و دکتری طراحی و نوشته شده است بلکه مرجعی بسیار مناسب برای مطالعه واحد درسی مبانی آنالیز ریاضی نیز می‌باشد. کتابی که شما می‌توانید در طول سال تحصیلی آن استفاده کرده و در زمان کنکور مطالب را به کمک آن جمع‌بندی فرمایید. به طور مثال به هنگام جمع‌بندی نیازی به مطالعه و فراگیری اثبات قضایا نمی‌کنید و در مطالعه درسی حتماً باید اثبات قضایا مورد بررسی قرار بگیرند.

نکته‌ای که باید به آن توجه شود این است که ریاضیات دانشی است که با یک بار مطالعه بتوانید بر مطالب آن مسلط شده و آن را فرا بگیرید، بلکه فراگیری این دانش نیازمند مطالعه زیاد، منظم، دقیق و پیوسته می‌باشد. همچنین شما همواره باید «حل مسأله» را از عادات ریاضی خواندن خود قرار داده تا علاوه بر افزایش تسلط خود در این درس از آن دست نیز ببرید. مطالعه ریاضیات وقتی جالب است که سر منشأ و جای پای مفاهیم آن را در طبیعت بدانیم. اگر ما به یک دهم دانسته‌هایمان عمل کنیم، اتفاق خوبی می‌افتد بنابراین تا آنجا که می‌توانید در مطالعه عملگرا باشید مهم نیست که از کدام کتاب و کجای کتاب می‌خوانید فقط بخوانید، بعد از مدتی مسرتان پیدا خواهید کرد! نبوغ یعنی تلاش و پشتکار و به قول آلن کن (Allain Connes) باید به کسی که فکر می‌کند نتایج خودبه‌خودی حاصل می‌شوند شکوک بود.

در این کتاب مسئولیت تألیف بخش‌های مختلف به شرح زیر می‌باشد:

مسئولیت تألیف فصول ۱ تا ۴ را محمد شیرازی بر عهده داشتند.

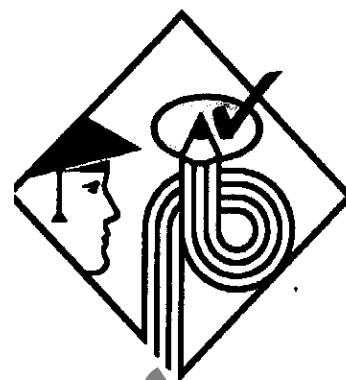
مسئولیت تألیف فصول ۵ تا ۸ را فؤاد نادری بر عهده داشتند.

از زحمات جناب آقایان مجتبی مجاهدی، مصطفی میرابی، حبیب کریمی، حمید خوش‌اخلاق، قربانی، قاسم زاده، سید علی خانم آمنه وفایی‌نژاد، بابت ویراستاری کتاب متشکریم.

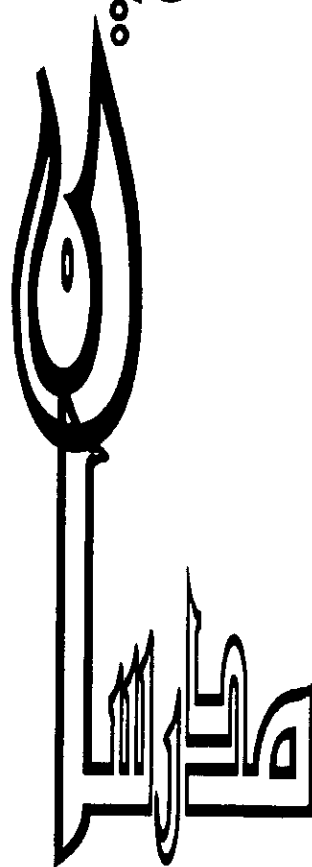
از مدیریت محترم انتشارات مدرسان شریف که رهنمودهای ایشان باعث ارتقای کتاب شده است سپاسگزاری می‌نمایم. همچنین از واحد تألیف و تایپ انتشارات مدرسان شریف که در هر چه بهتر شدن این کتاب از هیچ کوششی دریغ نوزیدند، مثال تشکر و امتنان را داریم. یقیناً هر اثری توأم با خطایی است لذا از تمامی صاحب نظران و دانشجویان تقاضا داریم هرگونه اشکالی را از طریق شماره پیام کوتاه ۰۱۰۰۸۳۸۷ اطلاع دهند و یا با شماره تلفن «۶۱۰۹۹» (روابط عمومی انتشارات مدرسان شریف) تماس حاصل نمایند.

با آرزوی موفقیت

محمد شیرازی – فؤاد نادری

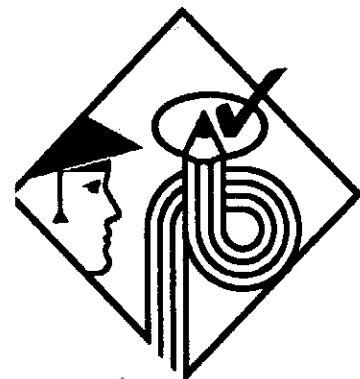


ناشر پاف

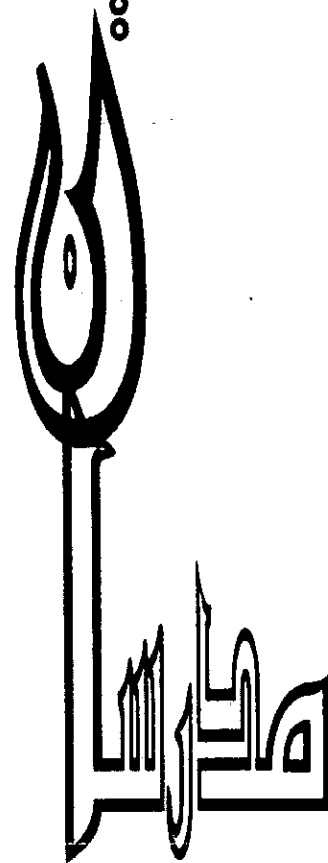


صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
	فصل اول: دستگاه اعداد حقیقی و مختلط
۴	مقدمه
۴	آنچه از نظریه مجموعه‌ها نیاز داریم
۵	اصول نظریه مجموعه‌های تسرملو - فرانکل (Zermelo-Frankel)
۸	یادآوری برخی از مباحث در مورد تابع و رابطه
۹	خواص رابطه‌ها
۱۱	کلاس‌های هم ارزی و افزاز
۱۴	تابع
۱۶	تصویر و تصویر وارون یک مجموعه
۱۹	تابع یک به یک
۲۲	تابع پوشا
۲۶	وارون یک تابع (تابع معکوس)
۲۹	جانشین
۳۱	ساختار
۳۲	نمونه‌ها
۳۴	مجموعه‌های نامتناهی، عددهای اصلی
۳۷	یادآوری مجموعه‌های مابعدی
۴۸	ترتیب بر روی مجموعه‌های مرتب
۵۳	وجود $\sup$ و $\inf$ برای یک مجموعه
۵۶	مقدمات لازم برای ساختن مجموعه $\mathbb{R}$
۶۱	میدان‌های ارشمیدسی
۷۵	زیرمجموعه چگال
۷۸	بازگشت به جبر
۸۱	فضای اقلیدسی
۸۴	مفهوم نرم در یک فضای برداری
۸۹	میدان اعداد مختلط
۹۲	اعداد حقیقی توسعه یافته
۹۳	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول
۹۴	پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول
۹۶	آزمون فصل اول
	فصل دوم: فضاهای متریک و توپولوژیک
۹۸	مقدمه
۹۸	متر و فضاهای متریک
۱۰۹	همسایگی‌ها و گوی‌های باز در فضاهای متریک
۱۱۲	ویژگی‌های نقاط در فضاهای متریک
۱۴۵	مجموعه‌های کراندار
۱۵۱	فاصله نقطه از یک مجموعه

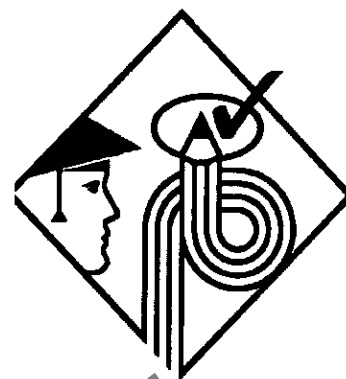
صفحه	عنوان
۱۵۳	مجموعه کامل
۱۵۶	مجموعه‌های محدب
۱۵۸	مجموعه‌های فشرده
۱۶۹	ویژگی‌های حجره k بعدی در فضای $\mathbb{R}^n$
۱۷۷	مجموعه‌های هم‌بند
۱۸۴	مؤلفه‌های هم‌بندی (اختیاری)
۱۹۱	فضاهای متری گسسته
۱۹۴	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم
۲۰۳	پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم
۲۲۳	آزمون فصل دوم
	فصل سوم: دنباله و سری
۲۲۵	نمونه
۲۲۵	تعریف دنباله
۲۲۶	بازگشت
۲۲۸	همگرایی
۲۳۳	تفاوت حد و دنباله
۲۴۶	زیردنباله
۲۴۷	رابطه حد دنباله و حد دنباله‌های آن
۲۵۶	فضاهای تام
۲۵۷	دنباله‌های یکنوا
۲۶۱	حد بالا و حد پایین یک دنباله حقیقی
۲۷۳	سری
۲۸۲	آزمون‌های همگرایی
۲۹۹	عدد e
۳۰۲	سری‌های توانی
۳۰۴	همگرایی مطلق و همگرایی مشروط
۳۰۸	آزمون انتگرال (اختیاری)
۳۱۰	آزمون‌های دیریکله و آبل
۳۱۵	جبر سری‌ها
۳۱۶	ضرب سری‌ها
۳۲۰	تغییر در آرایش (اختیاری)
۳۲۲	بازگشت به فضای متریک، رابطه‌ی دنباله‌ها با مجموعه‌های فشرده
۳۲۲	عدد لیگ
۳۲۴	رابطه‌ی دنباله‌ها با فضاهای تام (اختیاری)
۳۳۱	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم
۳۴۰	پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم
۳۶۲	آزمون فصل سوم



شیراف



صفحه	عنوان
فصل چهارم: حد و پیوستگی	
۳۶۵	مقدمه
۳۶۵	حد تابع
۳۶۹	فضای برداری $\mathbb{R}^X$
۳۷۳	حدهای نامتناهی
۳۷۵	حد در بی‌نهایت
۳۸۰	رابطه‌ی حد توابع با دنباله‌ها
۳۸۸	حد از نگاهی دیگر: تعریف حد بر اساس مفهوم همسایگی
۳۹۰	توابع پیوسته
۴۰۶	پیوستگی توابع برداری
۴۰۸	فضای برداری $C(X)$
۴۰۸	توابع پیوسته و زیرمجموعه‌های فشرده
۴۱۵	پیوستگی یکنواخت
۴۲۵	توابع پیوسته و مجموعه‌های هم‌بند
۴۳۰	نتایج قضیه‌ی مقدار میانی در مبانی و پایه‌های ریاضی
۴۳۵	بازگشت به فضای $\mathbb{R}$ (ناپیوستگی توابع حقیقی مقدار بر یک بازه)
۴۳۹	توابع یکنواخت
۴۴۹	گراف تابع (نمودار تابع)
۴۵۱	توابع محدب
۴۵۶	جمع‌بندی مبحث پیوستگی و حد تابعی دیگر
۴۵۷	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم
۴۶۷	پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم
۴۹۰	آزمون فصل چهارم
فصل پنجم: مشتق‌گیری	
۴۹۲	مشتق یک تابع حقیقی
۵۰۱	خواص توابع مشتق‌پذیر (قضایای مقدار میانگین)
۵۰۴	خاصیت مقدار میانی مشتق‌ها
۵۰۹	مشتق تابع معکوس
۵۰۹	قاعده هوییتال
۵۱۲	قضیه‌ی تیلور
۵۱۳	مشتق‌گیری از توابع برداری
۵۲۳	ضمیمه
۵۲۵	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم
۵۲۹	پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم
۵۳۹	آزمون فصل پنجم

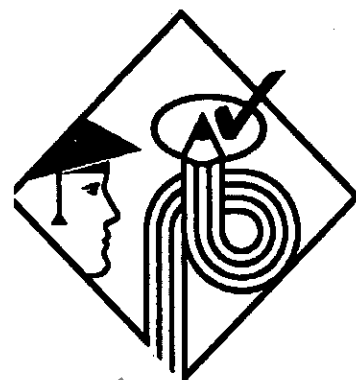


شرف

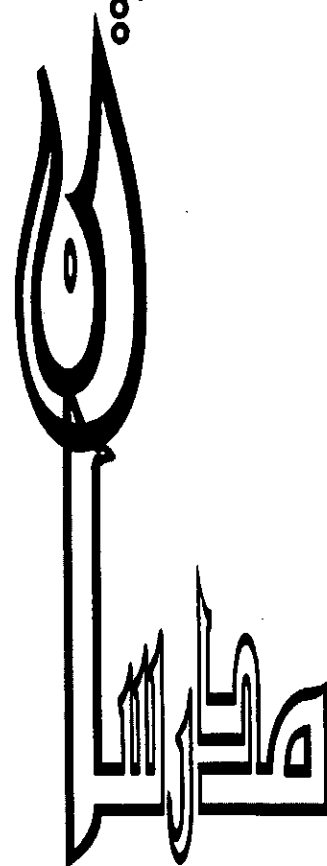


مطالعات

صفحه	عنوان
فصل ششم: انتگرال ریمان - اشتیل یس	
۵۴۳	مقدمه
۵۴۳	تعریف و وجود انتگرال
۵۵۳	خواص انتگرال
۵۵۹	انتگرال گیرهای پله‌ای
۵۶۱	تغییر متغیر
۵۶۲	انتگرال گیری و مشتق گیری
۵۶۵	قضایای مقدار میانگین برای انتگرالها
۵۷۰	انتگرال گیری از توابع برداری
۵۷۱	توابع با تغییر کراندار
۵۸۳	ضمیمه
۵۸۳	نظریه‌های انتگرالگیری
۵۸۴	مجموعه‌ی کانتور تعمیم یافته
۵۸۶	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل ششم
۵۹۸	پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل ششم
۶۲۶	آزمون فصل ششم
فصل هفتم: دنباله‌ها و سری‌های توابع	
۶۳۴	همگرایی یکنواخت
۶۴۶	همگرایی یک‌بخش پیوستگی
۶۴۹	ضمیمه
۶۵۴	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم
۶۶۷	پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم
۶۹۷	آزمون فصل هفتم
فصل هشتم: سری‌های توانی و فوریه	
۷۰۳	مقدمه
۷۰۴	سری توانی
۷۱۵	سری‌های مثلثاتی و سری فوریه
۷۱۹	ضمیمه
۷۲۳	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم
۷۲۵	پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم
۷۳۰	آزمون فصل هشتم
۷۳۳	آزمون‌های خودسنجی
۷۴۵	سؤالات آزمون دکتری ۹۳
۷۴۶	پاسخنامه آزمون دکتری ۹۳
۷۴۹	سؤالات آزمون سراسری ۹۳ - آمار و ریاضی
۷۵۰	پاسخنامه آزمون سراسری ۹۳ - آمار و ریاضی
۷۵۵	سؤالات آزمون سراسری ۹۳ - علوم کامپیوتر
۷۵۶	پاسخنامه آزمون سراسری ۹۳ - علوم کامپیوتر
۷۵۹	پاسخنامه آزمون‌ها
۷۶۰	منابع و مراجع



ناشر پرف





سازمان آموزش و مدیریت استراتژیک مدرسان شریف در راستای ارتقاء سطح علمی و پیشرفت تحصیلی تمامی دانشجویان، اساتید و جامعه‌ی دانشگاهی کشور عزیزمان، با مطالعه و تحقیقات میدانی بر روی طیف‌های مختلف متقاضیان، راهکارهای قبولی و برخی برنامه‌های آموزشی خود را در قالب «طرح نامی» ارائه کرده است.

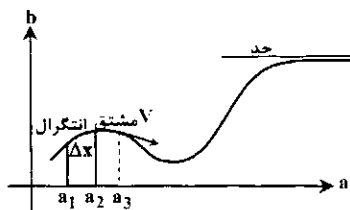
این طرح براساس مطالعات مستمر بر سیستم‌های آموزشی نوین دنیا و نیازسنجی جامعه‌ی دانشگاهی کشور همه ساله بازبینی و در صورت لزوم اصلاح می‌شود. برگزاری آزمون‌های آزمایشی هوشمند و استاندارد، تهیه بسته‌ی آموزشی منحصر به فرد، آماده‌سازی و ارائه کتاب‌های آموزشی متفاوت براساس آخرین تغییرات منابع آزمون، در نظر گرفتن مشاوره‌های تخصصی و عمومی برای داوطلبان تا روز آزمون، استفاده از بهترین و برترین اساتید کشور جهت تدریس در کلاس‌های حضوری، طراحی تست و تألیف کتاب از جمله مشخصات «طرح نامی» می‌باشد. امید است این طرح راهگشای ورود دانشجویان به مقاطع تحصیلی بالاتر و به تبع آن پیشرفت و ارتقای روزافزون سطح علمی کشور در جامعه‌ی جهانی باشد.



مدرسای شریف

پیشگفتار

در اینجا می‌خواهیم دور نمایی از مفاهیم بنیادین حساب دیفرانسیل و انتگرال ارائه دهیم و بگوییم که چرا این علم، مُدل طبیعت است. سه مفهوم بنیادین در حساب دیفرانسیل و انتگرال عبارتند از: حد، مشتق و انتگرال. در آنالیز ریاضی (۱) با حد آشنا شدید، در اینجا می‌خواهیم بگوییم که چرا این مفاهیم بنیادین هستند و از کجا به کجا گرفته‌اند و در ادامه‌ی مسیر تکامل خود به کجا منتهی می‌شوند. شاید تعجب کنید اما این سه مفهوم از آسمان آمده‌اند! بله از آسمان! چون برای انسان‌های پیش از این مسأله‌ی جهت‌یابی مهم بوده است پس به حرکت ستارگان و اجرام آسمانی علاقمند بوده‌اند و در این راستا علم نجوم ابداع گردید. ظاهراً یکی از دغدغه‌های منجم نیوتن، از نیوتن خواسته بود که با استفاده از قوانین خود مسیر یک ستاره‌ی دنباله‌دار را مشخص کند گرچه قبل از نیوتن بعضی از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفت کرده بود اما ظاهراً نیوتن اولین نفر بوده است که به این ایده نائل آمده که با استفاده از ابزارها و مفاهیم ابداع شده‌ی بشری مثل ریاضیات و ... می‌توان طبیعت را مطالعه کرد. به هر حال نیوتن هنگام این بررسی توانست مفاهیم حد، مشتق و انتگرال را ابداع کند. برای پی بردن به مفاهیمی که این مفاهیم نمودار زیر را در نظر بگیرید:



(الف) اگر نمودار مربوطه، نشانگر نمودار سرعت (b) بر حسب زمان (a) باشد، آنگاه تغییر مکان (Δx) از زمان a_1 تا زمان a_2 عبارت است از مساحت زیر منحنی از لحظه‌ی a_1 تا لحظه‌ی a_2 که با استفاده از انتگرال محاسبه می‌شود.

(ب) اگر نمودار مربوطه، نمودار مسیر حرکت ذره در صفحه باشد یا نشانگر مکان (b) بر حسب زمان (a) باشد آنگاه سرعت (V) بر نمودار در لحظه a_2 مماس است و از طریق مشتق‌گیری محاسبه می‌شود.

(پ) اگر نمودار مربوطه، همانند حالت قبل باشد آنگاه برای بررسی رفتار مجانبی ذره یا رفتار ذره در بی‌نهایت از مفهوم حد استفاده می‌شود.

این مفاهیم در طول زمان تعمیم یافتند. برای مثال حد در مسیر تکامل خود سر از فضاهاى متریک اقلیدس به فضاهاى متریک دیگر درآورد. برای انتگرال مفاهیم متعددی پیدا شد، مثلاً برای نیوتن به مفهوم پاد مشتق بود، تحت تأثیر کارهای فوریه، کوشی و ریمان ابتدا مفهوم کوشی و ریمان از انتگرال پدید آمد اما به علت نارسائی‌های زیادی که در آن احساس می‌شد مفهوم لیگ از انتگرال پدید آمد. در فصل مربوط به انتگرال ریمان و تعمیم‌های آن دربارۀ برخی از این نارسائی‌ها صحبت خواهیم کرد. بهر حال الهام بخش اصلی انتگرال لیگ، فوریه بود چرا که وی در کارهای خود از خواص انتگرال بهره برده که این خواص مختص انتگرال لیگ‌اندا هر چند که انتگرال لیگ یک قرن دیرتر از کارهای فوریه پا به عرصه وجود گذاشت. بعداً در این خصوص بیشتر شرح خواهیم داد. تعمیم مفاهیم انتگرال کار آنالیزدان‌هاست، اما تعمیم مفهوم مشتق کار هندسه‌دان‌هاست.

شاید در وهله‌ی اول مفهوم مشتق ساده به نظر رسد. هر چند که کشف انتگرال لیگ ریاضیدانان قرن نوزدهم را براستی اذیت کرد اما تعمیم مفهوم مشتق وارد سنگین‌ترین و جذاب‌ترین بخش ریاضیات، یعنی هندسه می‌شود. در حسابان و آنالیز ریاضی، مفهوم مشتق برای توابعی که دامنه‌هایشان زیر مجموعه‌های بازی از فضاهاى مسطح $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^n$ هستند تعریف می‌شود، برای تعمیم مشتق باید دامنه‌ی توابع را به مجموعه‌های دیگر تعمیم داد. شاید با استفاده از ایده‌ی مشتق $\mathbb{R}^n$ بتوان برای توابع تعریف شده روی فضاهاى برداری نرم‌دار ایده‌ی مشتق را تعمیم داد، اما چرا نتوان آنها را به مجموعه‌های کلی‌تری تحت عنوان منیفلد (manifold) تعمیم داد؟ منیفلد به طور شهودی یعنی شکلی که زیاد پیچ و تا خورده است و خواص توپولوژیکی ویژه‌ای دارد. در هندسه‌ی منیفلد از یک سری نگاشت‌های خاص موسوم به کارت‌ها استفاده می‌کنند، دامنه این نگاشت‌ها همان منیفلد و برد این نگاشت‌ها یک $\mathbb{R}^n$ خاص است و به مدد این کارت‌ها، مشتق توابعی را که دامنه‌ی آنها یک منیفلد خاص است را محاسبه می‌کنند. انگار این کارت‌ها پیچ و تایی را که منیفلد



داراست باز و مسطح می‌کنند و آنرا شبیه به یک $\mathbb{R}^n$ باسازی می‌کنند! مثل این است که یک پارچه‌ی پر چین و چروک را با آتو کردن مسطح کنیم! بهرحال در این مقدمه‌ی کوتاه نمی‌خواهیم مفاهیم پیچیده‌ی ریاضی را در چند سطر شرح دهیم هدف این است که خوانندگان یک دید کلی نسبت به این مفاهیم بنیادین پیدا کنند و بدانند که این مفاهیم از کجا آغاز و به کجا ختم می‌شوند و برخی ایده‌های کلی پشت سر این مفاهیم چیست.

یک دیدگاه کلی در مورد برخی شاخه‌های ریاضی از جمله نظریه‌ی مجموعه‌ها، جبر، آنالیز و هندسه حائز اهمیت است و آن اینکه شما تا وقتی که در نظریه‌ی مجموعه‌ها مطالعه می‌کنید یک مجموعه بدون هیچ ساختار اضافی همراه با نگاشت‌های یک به یک برای شما مهم هستند. هنگام ورود به قلمرو جبر این مجموعه ساختارهای اضافی تری به نام اعمال جبری به خود می‌گیرد، در این حالت نگاشت‌های حافظ ساختار جبری مهم‌اند. اما در توپولوژی نگاشت‌هایی دو سویی که از دو طرف حافظ ساختار پیوستگی هستند حائز اهمیت‌اند، چنین نگاشت‌هایی دو سویی که خودشان و معکوشان پیوسته‌اند، هومئومورفیسم

(یا همسانریختی) نام دارند. توپولوژی یعنی علم «سطح‌شناسی» و با تغییر شکل‌های پیوسته‌ی سطوح سر و کار دارد تا از این طریق بتواند این سطوح را دسته‌بندی کند [برای مثال از دید یک توپولوژی‌دان، دایره و مثلث و مربع نشان‌دهنده‌ی یک سطح خاص هستند. دقت شود که تغییر شکل پیوسته شامل کشیدن، فشردن و ... است اما شامل خرد کردن، سوراخ کردن، پاره کردن و ... نیست] لذا می‌توان گفت که توپولوژی، هندسه‌ای بدون اندازه و بزرگی است، یعنی در آن اندازه و سبک نیست هنگامی که به قلمرو آنالیز یا می‌نهد یک مفهوم توپولوژیکی به نام پیوستگی وارد ماجرا می‌شود و لذا شما با مجموعه‌هایی سروکار خواهید داشت که هم از این حال جبری دارند و این اعمال جبری نیز باید پیوسته باشند، در این حالت بررسی نگاشت‌های پیوسته بین این مجموعه‌ها و برخی عملگرهای پیوسته بین آنها اهمیت دارند. در هندسه، ساختار مشتق‌پذیری هم به مجموعه اضافه می‌شود و نگاشت‌های حافظ ساختار مشتق‌پذیری اهمیت پیدا می‌کنند از دیدگاه جبری هندسه، نوعی خواصی از فضاهاست که این خواص تحت تبدیلات یک گروه جبری پایا هستند. مثلاً اگر گروه مذکور را گروه هومئومورفیسم‌های (توابعی دوسویی که خود و معکوشان پیوسته‌اند) فضا بگیریم آنگاه هندسه‌ی حاصله همان توپولوژی است که نسبت به اندازه و طول فراموشکار است! و اگر این گروه را گروه هومئومورفیسم‌های توابعی دوسویی که خودشان و معکوشان بی‌نهایت بار مشتق‌پذیرند) بگیریم هندسه‌ی منیفلد حاصل می‌شود. بهرحال از خوانندگان درس آنالیز سطحی تبدیلات تکمیلی انتظار می‌رود که دروس نظریه‌ی مجموعه‌ها، جبر، جبر خطی، توپولوژی به همراه خواص و نحوه‌ی ساختن اعداد حقیقی را خوب فرا بگیرند چون آثار پیشرفته دانستن این مفاهیم ضروری است.

«طولانی‌ترین سفرها، فقط با برداشتن یک قدم شروع شده‌اند»

در این کتاب جهت تفهیم هر چه بیشتر مطالب، از نقاط کور یادگیری استفاده می‌شده و آن‌ها را روشن کرده‌ایم. نقاط کوریادگیری، نقاطی هستند که در ذهن چهرای بزرگی ایجاد کرده و باعث می‌شود که احساس کنیم مطالب درسی سنگین هستند. ما این کار را از طریق بررسی شباهت‌ها - تفاوت‌ها، ارتباط‌ها، نمودارها و مثالهای زیادی انجام داده‌ایم که مطمئناً خواننده با خواندن آن‌ها می‌تواند «آها!» و البته این «آها گفتن» سر آغاز رمزگشایی و روشن شدن گره‌های کور یادگیری است در اینجا مروری خلاصه بر ویژگی‌های عمومی و روش‌های کتاب داریم:

- کتاب شامل تمام سرفصل‌های مصوب درس مبانی آنالیز ریاضی در یک مجلد و منطبق بر سرفصل‌های کتاب‌های مرسوم آموزشی از جمله «رودین»، پیو (pugh)، آپوستل، بارتل و کتاب دکتر مدقالجی است. همچنین از مراجع بسیار قوی و خوب برای مطالعه روز به روز بوده و به زبان اصلی هستند استفاده شده است. فهرست این منابع در آخر کتاب آمده است.

- کتاب، کتاب ایده‌هاست و در کنار آن کاربردها ذکر شده‌اند. به هنگام معرفی یک مفهوم، دلیل اصلی این است که همراه کاربردها ذکر شده‌اند [برای مثال ر.ک، انتگرال لبگ، هم‌پیوستگی، سری فوریه...] و اغلب اسکلت و چهارچوب برهان‌ها را بیان کرده‌ایم.

- مدام از منظر دیگر به مفاهیم نگریسته‌ایم، برای مثال به معرفی صرف انتگرال بسنده نکرده‌ایم بلکه گفته‌ایم که عمل انتگرال‌گیری روی فضای توابع انتگرال‌پذیر یک تابع خطی است که قضیه‌ی جابجایی حد و انتگرال، پیوستگی این تابع خطی را تخمین می‌کند [برای مثال بیشتر ر.ک به هم‌پیوستگی، قضیه‌ی استون - ویراشتراس و ...]

- مقایسه و ارتباط بین مفاهیم مشابه زیاد است مثلاً انواع پیوستگی [ساده، یکنواخت مطلق، هم‌پیوستگی] با هم مقایسه شده‌اند.
- با زبانی ساده و گیرا و به طور خلاصه به معرفی مفاهیم پیشرفته از جمله اندازه و انتگرال لبگ پرداخته‌ایم. ضرورت معرفی انتگرال لبگ را بارها ذکر کرده‌ایم و حتی با زبان شمارش سکه به تفاوت بین انتگرال ریمان و لبگ پرداخته‌ایم. [ر.ک ضامین فصول ۱ و ۲]

- قدرت برد و محدودیت قضایا و روش‌ها بحث شده است. مثلاً به تفاوت حسابانی که روی $\mathbb{R}$ و روی $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}^n$ بنا می‌شود و اینکه چرا بعضی قضایا در یکی از آن‌ها درست است اما در بقیه غلط است زیاد اشاره شده است [برای مثال ر.ک که به قضایای متشابه میانی و هوپیتال، جابجایی حد و

مشتق، توابع تحلیلی و بررسی آن‌ها در $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ این تفاوت‌ها به خواص ذاتی فضا از جمله خواص نظریه مجموعه‌ای، جبری و توپولوژیکی بر می‌گردد و به هر حال از این عجایب، راز زدایی کرده‌ایم! هدف این بوده که از قضایا تابوهای مطلق ساخته نشود و بدانیم که هر روشی محدودیتی دارد. - همانند کتاب‌های خوب رودین و پیو و ... کتاب را با دید حداقل مطلب - حداکثر کاربرد نوشته‌ایم لذا خیلی از مطالبی را که در کتابهای دیگر قضیه‌اند به عنوان مثال حل شده و تمرین خواهید دید به این امید که این دید در خواننده تقویت شود که اینها و سایر مطالب جدید، نتیجه‌ی دانسته‌ها و ابزارهای قبلی و حداقلی ماست.

« چند نکته جهت موفقیت بیشتر در آزمون »

از خواندن و حفظ اثبات قضایا به صورت مکرر اجتناب کنید، البته سعی کنید که همواره ایده اصلی آن‌ها را در ذهن داشته باشید، اکنون وقت آن است که مسأله حل کنید تا بتوانید مطالب درسی را بهتر در ذهنتان جا بیندازید.

هنگام رویارویی با مسائل سخت شما نیازمند «خرق عادت» هستید چرا که «فکر کردن مثل سابق، شما را به جوابهای سابق می‌رساند» لذا تا می‌توانید آن‌ها را به اجزای بیشتری تجزیه و هر جزء را تا می‌توانید به مطالب بیشتری که از قبل می‌دانید ربط بدهید. شاید نیازمند آن باشید که با دید و تعبیری متفاوت به مسأله بنگرید در آن دخل و تصرف کنید تا از مسأله رمزگشایی کرده و آنرا به مسأله آشناتری تبدیل کنید، همچنین بعضی مواقع بررسی حالت‌های خاص یک رابطه یا آوردن مثال نقض مفید است من مطمئنم که با خواندن این کتاب دید و شهود شما تیزتر شده و مسائل سخت را به راحتی می‌برد! چنانچه خواهان فرا گرفتن دید شریقی نسبت به حل مسأله هستید به کتابهایی در این زمینه که توسط ریاضیدانان بزرگ نوشته شده است مراجعه کنید مانند: چگونه مسأله حل کنیم (جورج پولیا)، اخلاق ریاضی (جورج پولیا) و همچنین آثاری از رنه دکارت، لایب نیتز، پوانکاره، آدامار و ... در ضمن خواندن کتابهایی در زمینه‌ی فلسفه تاریخ ریاضی توصیه می‌شود. بعداً بعد از این مطالعات دید شما نسبت به ریاضی عوض خواهد شد و اندیشیدن را خواهید آموخت نه اندیشه‌ها را!

با آرزوی موفقیت برای شما



مدرسه‌ای شریف

فصل اول

« دستگاه اعداد حقیقی و مختلط »

مقدمه

در اواخر قرن ۱۸ و اوایل قرن ۱۹ میلادی به علت رخ دادن بعضی از پارادوکس‌ها و تناقضات در ریاضی که ناشی از عدم درک و به کارگیری نادرست بعضی از مفاهیم ریاضی مانند حد، بی‌نهایت و ... بود، ریاضیدانان طراز اول به فکر دقیق‌سازی ریاضی و خالی نمودن آن از هرگونه شک و ابهام افتادند. گرچه تلاش‌های اولیه آنها خود دچار تناقضات زیادی گشت، ولی چاره‌ای جز این نبود! باید برای ریاضیات نوین پایه‌های محکم و تردیدناپذیر وضع می‌شد. ریاضیدانان ابتدا به سراغ ساخت مجموعه‌ها براساس اصولی رفتند که این اصول با یکدیگر تناقض نداشته و نتوان از آنها استدلالی متناقض به دست آورد. بعد از آن نوبت به ساخت اعداد رسید. شاید بتوان گفت این کار به‌طور کلی به‌طور ساده به نظر برسد، زیرا بسیاری وجود اعداد را از مسلمات می‌دانند. اما به دلایلی که در این فصل از آن مطلع خواهید شد، باید به نحو مطلوب اعداد طبیعی بر پایه اصول و تعاریف قبل و سپس اعداد صحیح به کمک اعداد طبیعی و در نهایت اعداد گویا از اعداد صحیح و اصول قبل ساخته می‌شد. نکته‌ای که در ساخت این اعداد به شدت باید لحاظ گردد، آرمانی نمودن آنها بود به این معنا که در نهایت آنها باید بر شهود ما و توقعی که ما از آنها داریم منطبق باشد. به‌طور مثال در مجموعه اعداد طبیعی که ساخته می‌شود باید $2 \times 2 = 4$ گردد، در غیر این صورت مجموعه‌ای که ساخته‌ایم چیز دیگری به جز مجموعه اعداد طبیعی است. ریاضیدانان تا مرحله ساخت مجموعه‌ای اعداد گویا از اصول و قضایای قبل به مشکل خاصی برخورد نکردند، اما ساخت مجموعه اعداد حقیقی از مجموعه‌های قبل به این سادگی‌ها نبود و مدتی زمان برد تا تکنیک ساخت آن کشف گردید. گرچه بعد از ساختن مجموعه اعداد حقیقی، می‌توان نگاه اصل موضوعی به آن داشت و آنالیز را به وسیله اصول موضوعه اعداد حقیقی آغاز کرد، ولی قبل از ساخت دقیق مجموعه اعداد حقیقی، این کار به لحاظ منطقی امکان‌پذیر نبود. به هر حال ما در این فصل ابتدا مروری گذرا به دستگاه اصل موضوعی مجموعه‌ها انداخته، خواص رابطه و تابع و انواع آن را در حد نیاز بررسی می‌کنیم، نگاهی به جبر و جبرخطی انداخته و آنچه را برای ساخت مجموعه اعداد حقیقی و ادامه مطالعه کتاب نیاز داریم معرفی می‌کنیم و در نهایت به بحث این مجموعه‌ها ساخت اعداد حقیقی براساس مجموعه اعداد گویا می‌پردازیم. بعد از ساخت دقیق مجموعه اعداد حقیقی، خواص آن، مانند اصل کمال، خاصیت اتر میسر، ترتیب کلی و داشتن زیر مجموعه‌ای چگال و شمارا و ... را بررسی و اثبات کرده و در نهایت وارد میدان اعداد مختلط می‌گردیم. ورود ما به مجموعه اعداد مختلط در حد مقدماتی و بیان چند تعریف و قضیه خواهد بود. بعد از این فصل آماده‌ایم که به‌طور جدی وارد آنالیز ریاضی گردیم. باید به شما دانشجو عزیز بگوییم که عمده‌ی مطالبی که در این فصل می‌خوانید جنبه یادآوری و مرور دارد، یادآوری مباحثی از مبانی ریاضی، جبر، جبر خطی و سایر دروس مقدماتی دیگر. در واقع آنالیز ریاضی از مبحث ساخت مجموعه اعداد حقیقی آغاز می‌گردد، لذا اگر اطلاعات شما در درس‌های مقدماتی ریاضی به ویژه درس مبانی ریاضی کافی می‌باشد، می‌توانید از بسیاری از این مباحث عبور کرده و مطالعه‌ی خود را از مبحث ساخت مجموعه اعداد حقیقی از سر بگیرید. اگرچه این فصل دارای کمترین تعداد سؤال در آزمون‌ها می‌باشد ولی بدون فهم آن نمی‌توان به فهم آنالیز ریاضی دست یافت.

آنچه از نظریه مجموعه‌ها نیاز داریم

در این قسمت می‌خواهیم پایه‌های بحث خود را محکم کنیم، در واقع این بخش پله‌ی اولی است که می‌خواهیم بر روی آن قرار گرفته و ادامه راه را طی کنیم. مشابه هندسه که همه‌ی حقایق و قضایای آن از چند اصل ساده و مقدماتی قابل استنتاج و استخراج می‌باشند، ریاضیات نوین و جدید نیز بر پایه چند اصل اساسی استوار گردیده است. بحث پیرامون این اصول و علت اینکه چرا آنها اصل می‌باشند، تا حد زیادی از اهداف این کتاب خارج می‌باشد، ما نیز از آنجا که هدف دیگری را دنبال می‌کنیم فقط به معرفی «اصول و تعاریف مقدماتی» می‌پردازیم، زیرا معتقدیم که در نهایت باید از یک سکوی به قدر کافی مطمئن و یک پایه استدلالی قوی بحث خود را شروع کنیم و اصول نظریه مجموعه‌ها به قدر کافی برای این کار ما مطمئن می‌باشد. با ذکر مثالی، بحث خود