



آموزش ریاضی

مولف: پرویز شهریاری





آموزش ریاضی

مؤلف: پرویز شهریاری

چاپ اول: ۱۳۸۴

شمارگان: ۲۲۰۰

لیتوگرافی: پورنگ

چاپ و صحافی: فرنو

نشانی: خیابان انقلاب، خ فخر رازی، بن بست نیک پور، پلاک ۱۴

طبقه سوم

تلفن: ۶۴۱۰۰۳۶ - ۶۹۵۲۲۰۰ - نمابر: ۶۹۵۲۱۹۹

شهریاری، پرویز، ۱۳۰۵ -

آموزش ریاضی / پرویز شهریاری. - تهران: مهاجر، ۱۳۸۴.

۲۸۳ ص: مصور.

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

ISBN:964-8861-08-0

۱. ریاضیات. ۲. ریاضیات - راهنمای آموزشی. الف. عنوان.

۵۱۰

۸۲ آ ش ۲۷/۲ QA

۱۳۰۹۵ - ۸۴ م

کتابخانه ملی ایران

فهرست مطالب

۳	پیشگفتار
۲۵	فصل ۱. آموزش ریاضی اهمیت درجه اول دارد
۲۹	فصل ۲. آموزش ریاضیات
۴۵	فصل ۳. آموزش ریاضیات و تکامل اندیشه‌ی علمی دانش‌آموزان
۵۹	فصل ۴. آموزش ریاضیات و پرسش «چرا؟»
	فصل ۵. «ریاضیات جدید» در برنامه‌های دبیرستانی
۷۱	نظریه‌ی مجموعه‌ها و منطق ریاضی
۸۱	فصل ۶. مسوولیت معلمان پرتجربه‌ی ریاضی
۸۷	فصل ۷. باز هم درباره‌ی برنامه‌های ریاضی دبیرستانی
۹۷	فصل ۸. روش « ϵ و δ »
۱۰۱	فصل ۹. دانش ریاضی
۱۲۷	فصل ۱۰. ریاضیات را بهتر بشناسیم
۱۳۹	فصل ۱۱. ریاضیات در خدمت انسان
۱۶۷	فصل ۱۲. بازسازی برنامه‌های آموزشی
	فصل ۱۳. معادله‌های دیفرانسیلی به عنوان مدل‌های ریاضی
۱۷۵	جریان‌های فیزیکی
۱۹۵	فصل ۱۴. اتحاد و معادله
۲۰۵	فصل ۱۵. ریاضیات ناروشن‌ها
۲۲۷	فصل ۱۶. ریاضیات را چگونه درس بدهیم؟
۲۴۱	فصل ۱۷. هندسه در دبیرستان
۲۶۳	فصل ۱۸. مجموعه‌ها
۲۷۹	فصل ۱۹. یک پرسش و چند نکته‌ی آموزنده

پیش‌گفتار

یک روز در ابتدای سال تحصیلی، به گفت‌وگوی دو دختر دانش‌آموز سال اول دبیرستان گوش می‌کردم... آن‌ها درباره‌ی درس‌های تازه‌ای که داشتند، بحث می‌کردند. دختر بزرگ‌تر، از درس هندسه با شگفتی یاد می‌کرد؛ او می‌گفت: «درس بسیار عجیبی است، معلم به کلاس وارد می‌شود، دو مثلث برابر روی تخته رسم می‌کند، و در تمام طول ساعت تلاش می‌کند، برابری آن‌ها را برای ما ثابت کند. هیچ‌کس نمی‌فهمد که این تلاش بیهوده درباره‌ی اثبات مطلبی که واضح است، چه لزومی دارد؟» دختر کوچک‌تر پرسید: «و شما درستان را چگونه جواب می‌دهید؟» - «کار بسیار مشکلی است، البته از کتاب درسی یاد می‌گیریم، ولی آن‌جا هم معلوم نیست چه چیزی را باید ثابت کرد و چه چیزی را بی‌استدلال قبول کرد؟ و چقدر سخت است که آدم به‌خاطرش بماند که کدام حرف را در کجا بگذارد؟ از کتاب «درباره‌ی استدلال‌های هندسی» - آ.ای. فمتی‌موف

اغلب دبیران ریاضی، در برابر دانش‌آموزانی که تازه هندسه را آغاز کرده‌اند، با این پرسش مواجه می‌شوند که اثبات قضیه‌های هندسه چرا لازم است؟ چرا باید ثابت کنیم که دو زاویه‌ی روبه‌رو برابرند؟ چیزی که درستی آن را به روشنی روی شکل می‌بینیم. چرا باید ثابت کنیم که در مثلث متساوی‌الساقین، دو زاویه‌ی پهلوی قاعده با هم برابرند؟ این را که خود شکل ثابت می‌کند. دانش‌آموزان شگفت‌زده می‌پرسند: این تلاش‌ها برای چیست؟ چرا باید برای آن‌چه واضح است، وقت و فکر خود را صرف کنیم؟

این‌گونه پرسش‌ها را نمی‌توان بدون پاسخ گذاشت و ما در این‌جا به بررسی

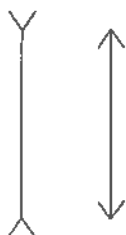
۱- در اتحاد شوروی بعد از ۵ سال دبستان، ۵ سال دبیرستان شروع می‌شود. یعنی این دو دختر سال ششم تحصیل را می‌گذرانده‌اند.

یکی از آن‌ها می‌پردازیم.

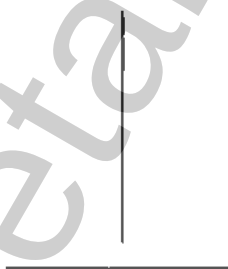
یکی از دانش‌آموزان به من می‌گفت:

- قضیه‌های هندسی را می‌توان به کمک شکل ثابت کرد. به شکل نگاه می‌کنیم و بلافاصله می‌بینیم که قضیه درست است. چشم، ما را فریب نمی‌دهد. [هندی‌ها هم اغلب خواننده را به شکل رجوع می‌دادند و کنار آن می‌نوشتند: «بین». م.] من چند شکلی را که در دسترس داشتم به این دانش‌آموزان نشان دادم و از او پرسیدم:

- این دو پاره‌خط را با هم مقایسه کن (شکل ۱)؛ کدام بزرگ‌تر است؟



شکل ۲



شکل ۱

دانش‌آموز به آن‌ها نظری انداخت و گفت:

- البته پاره‌خط عمودی بزرگ‌تر است.

شکل ۲ را به او نشان دادم و پرسیدم:

- این دو پاره‌خط چگونه؟ گفت:

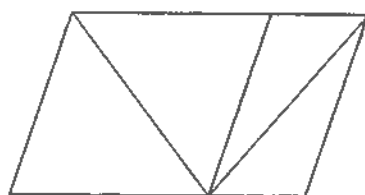
- روشن است که پاره‌خط سمت چپ بزرگ‌تر است.

گفتم:

- حالا در شکل ۳، دو متوازی‌الاضلاع می‌بینی که پهلوی هم رسم شده‌اند،

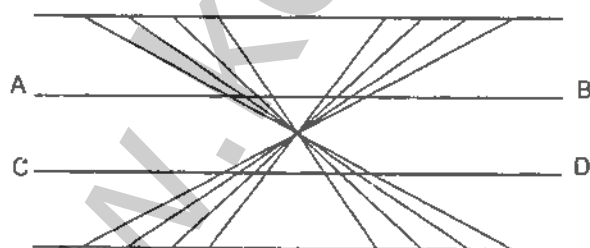
قطرهای آن‌ها را با هم مقایسه کن، کدام بزرگ‌تر است؟ در این جا هم، دانش‌آموز مطمئن بود که قطر سمت چپ، بزرگ‌تر است.

آن وقت از دانش‌آموز خواستم، خط‌کش مدرجی بردارد و همه‌ی پاره‌خط‌هایی

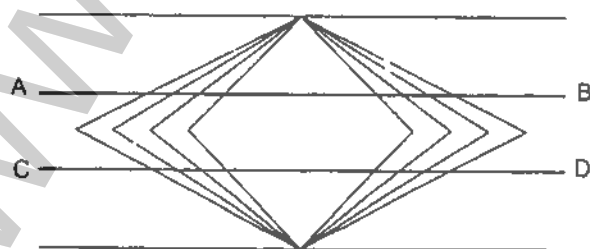


شکل ۳

را که با هم مقایسه کرده است، اندازه بگیرد. او با کمال میل به اندازه‌گیری مشغول شد، هیچ تردیدی نداشت که با اندازه‌گیری، پاسخ‌های او تایید می‌شود. ولی برخلاف انتظار او، اندازه‌گیری نشان داد که در هر سه حالت، دو پاره‌خط مورد مقایسه با هم برابرند. دانش‌آموز، این نتیجه را بلور نمی‌کرد و دوباره آغاز به اندازه‌گیری کرد، ولی اندازه‌گیری‌های جدید هم، به همان نتیجه رسید: پاره‌خط‌ها برابر بودند. دانش‌آموز تسلیم شده بود و چشم‌هایش را به هم می‌زد، او فهمیده بود که داستان از چه قرار

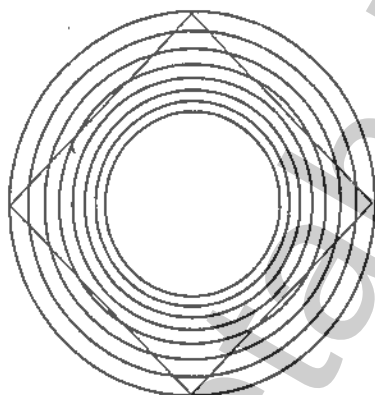


شکل ۴



شکل ۵

است. سپس شکل‌های ۴ و ۵ و ۶ را در مقابل دانش‌آموز گذاشتم و از او خواستم مشخص کند که آیا خط‌های AB و CD ، خط راست‌اند یا منحنی؟ و او پاسخ داد: «البته که منحنی‌اند». ولی وقتی که دوباره خط‌کش به دست گرفت و روی این خط‌ها قرار داد، معلوم شد که همه‌ی این خط‌ها، مستقیم‌اند، نه منحنی.



شکل ۶

سرانجام شکل ۷ را به او نشان دادم و از او پرسیدم:

- روی آن چه چیزی نشان داده شده است؟

او با دقت به شکل نگاه کرد و گفت:

- در این جا سه مکعب می‌بینیم، یکی بالا و دو تا پایین.

به او گفتم:

- دوباره نگاه کن به نظر من سه مکعب می‌بینیم: دو تا بالا و یکی پایین.

او دوباره با دقت به شکل نگاه کرد و گفت:

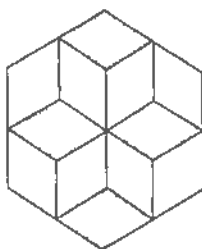
- درست است دو تا بالا و یکی پایین است پس چرا در ابتدا عکس آن به نظر

من می‌رسید؟ اجازه بدهید، عجب! باز هم یکی بالا و دو تا پایین است.

او شگفت‌زده می‌گفت:

- چیز غریبی است دوباره دو مکعب بالا و یک مکعب پایین است.

بعد از همه‌ی این‌ها از دانش‌آموز پرسیدم که آیا باز هم گمان می‌کنی که بشود



شکل ۷

تنها به کمک شکل قضیه‌ها را ثابت کرد؟ آیا هنوز اطمینان داری که چشم‌هایمان ما را فریب نمی‌دهند؟ ولی او دیگر به روشنی فهمیده بود که بررسی شکل، ممکن است منجر به اشتباه‌هایی بشود. او کمی فکر کرد و با گرمی گفت: «نه! به چشم‌ها نمی‌توان اعتماد کرد. باید اندازه گرفت، باید اندازه گرفت.» من بحث را ادامه دادم و به او گفتم که اندازه‌گیری هم کافی نیست، زیرا همه‌ی اندازه‌گیری‌ها غیر دقیق‌اند، به‌جز آن اغلب انجام اندازه‌گیری دشوار است. از جمله ممکن است که وسیله‌های لازم را در اختیار نداشته باشیم. ولی اصل مطلب چیز دیگری است. البته می‌توان یک یا چند پاره‌خط، یک یا چند زاویه را اندازه گرفت، ولی همه‌ی شکل‌ها را نمی‌توان اندازه گرفت. آن‌چه با اندازه‌گیری، برای دو مثلث درست باشد، ممکن است برای دو مثلث دیگر نادرست باشد. پس چه باید کرد؟ جواب را خود دانش‌آموز داد: «باید راه استدلال را پیدا کرد که قضیه را ثابت کند.» و این نتیجه‌گیری درستی بود. در واقع باید راه درست استدلال منطقی را یاد گرفت.

من دنباله‌ی بحث خود را به یکی از قضیه‌های مقدماتی هندسه کشاندم. فرض کنید که می‌خواهیم ثابت کنیم در هر مثلث متساوی‌الساقین، دو زاویه‌ی درونی پهلوی قاعده با هم برابرند. به هر دانش‌آموز کلاس پیشنهاد می‌کنیم که در دفتر خود مثلث متساوی‌الساقینی رسم کند و به کمک نقاله دو زاویه‌ی پهلوی قاعده‌ی آن را اندازه بگیرد. بعد از این آزمایش هم نتیجه بگیریم که دو زاویه‌ی پهلوی قاعده در مثلث متساوی‌الساقین، با هم برابرند، به این ترتیب، یک قضیه تنظیم می‌شود. آن وقت به دانش‌آموزان می‌گوییم:

«ما درستی این قضیه را در باره‌ی ۳۵ مثلث متساوی‌الساقین، آزمایش کردیم (فرض کنید که در کلاس ۳۵ دانش‌آموز باشد)؛ اگر این قضیه، برای ۳۵ مثلث متساوی‌الساقین درست است، آیا از آن‌جا می‌توان این نتیجه را گرفت که برای هر مثلث متساوی‌الساقین دلخواهی، درست است؟ یا ممکن است که برای نمونه در مورد مثلث سی‌وششم درست نباشد؟ و اگر همه‌ی شما شروع به کار کنید، آیا می‌توانید آن را در باره‌ی همه‌ی مثلث‌های متساوی‌الساقین ممکن آزمایش کنید؟ به چه مناسبت نمی‌توان این آزمایش را برای همه‌ی مثلث‌های متساوی‌الساقین انجام داد، حتی اگر در تمام عمر خود به آن مشغول باشید؟ اگر همه‌ی مردم در تمام کره‌ی زمین به این آزمایش مشغول شوند، باز هم در باره‌ی درستی این قضیه به اطمینان کامل نمی‌رسیم. پس چه باید کرد؟ به کمک استدلال منطقی می‌توانیم کاری که همه‌ی دانش‌آموزان در همه‌ی مدرسه‌ها قادر به آزمایش کامل آن نیستند، در ۱۰ دقیقه انجام دهیم. به کمک استدلال منطقی، می‌توان قضیه را برای همه‌ی انواع ممکنه‌ی مثلث متساوی‌الساقین ثابت کرد. و این مهم‌ترین و اساسی‌ترین نقش استدلال در هندسه است.»

دانش‌آموز به جرف‌های من با دقت گوش می‌داد. و وقتی که از هم جدا می‌شدیم، گفت حالا می‌فهمد که چرا اثبات یک قضیه لازم است و چرا وقت کلاس به خاطر استدلال درست و منطقی گرفته می‌شود.

به این دلیل‌ها است که ما باید راه استدلال منطقی و روش درست اندیشیدن را یاد بگیریم.

برای اثبات یک قضیه باید یک رشته استدلال منطقی، بر اساس قضیه‌های ثابت شده‌ی قبلی و اصل‌هایی که بدون اثبات مورد قبول قرار گرفته است، انجام دهیم. ولی اثبات قضیه‌های قبلی هم بر اساس قضیه‌هایی که باز هم قبل از آن‌ها ثابت شده‌اند، انجام می‌گیرد. و اگر این رشته را ادامه دهیم معلوم می‌شود که اثبات همه‌ی قضیه‌ها بر اساس اصل‌هایی قرار دارند که بی‌اثبات و به‌عنوان نتیجه‌ای از تجربه مورد قبول قرار می‌گیرند.

علمی وجود دارد که آن را منطق می‌نامند. این علم به ما می‌آموزد که چگونه

قضایات کنیم تا افکار ما معین، به هم پیوسته، پشت سر هم، قابل اثبات و بی تناقض باشد. همان طور که اگر کسی حساب و دستور زبان را نداند، نمی تواند به درستی حساب کند و یا درست و به قاعده بنویسد همان طور هم کسی که از قاعده های منطق بی اطلاع باشد، نمی تواند بی اشتباه داوری و عمل کند.

به ویژه، در ریاضیات، همیشه با داوری و استدلال سر و کار داریم. کسی که با ریاضیات کار می کند، باید مفهوم ها را تعریف و رابطه ی بین آن ها را روشن کند، باید بتواند شکل ها، -عددها، معادله ها... را به گروه های مورد نیاز تقسیم کند و غیره. ولی اغلب در ریاضیات، با ادامه ی استدلال به شکل ها و قانون های مختلف و به اثبات قضیه های متفاوت نیاز داریم. تصادفی نیست که بعضی از ریاضی دان ها، ریاضیات را علمی می دانند که درباره ی میوه و محصول ذهن و فکر آدمی بررسی می کند. البته این نقطه نظر درست نیست، ولی این درست است که بدون منطق و تفکر، ریاضیاتی وجود ندارد و این به معنای آن است که برای موفقیت در آموزش ریاضی، باید قاعده ی داوری را به درستی و با دقت آموخت. و به معنای این هم هست که خود مطالعه ی ریاضیات، برای تسلط بر قانون های تفکر، مفید است. بی جهت نیست که می گویند: ریاضیات، ذهن را روشن و فکر را تقویت می کند، بی جهت نیست که م.ای. کالینین در برابر دانش آموزان دبیرستانی گفت که:

«ریاضیات به ذهن آدمی نظم می دهد و عادت به تفکر منطقی را در او به وجود می آورد. این حقیقت است که می گویند: «ریاضیات ورزش فکر است». من تردید ندارم که همه ی شما صاحب فکر هستید، ولی این فکر باید منظم شود، جهت پیدا کند، و اگر بتوان گفت در مسیر درست کار قرار گیرد و این ریاضیات است که می تواند به این هدف ها کمک کند.»

زندگی، صنعت و علوم مختلف، مساله های تازه و تازه تری در برابر ریاضیات قرار می دهند. به خاطر حل این مساله به کمک ریاضیات، روش ها و نظریه های تازه ای در ریاضیات به وجود می آید تا به کار برطرف کردن مشکلاتی که پیدا شده است، بخورد.

ریاضیات چگونه عمل می کند؟ به کمک ریاضیات، داوری ها منطقی می شود.

حل یک مساله به کمک ریاضیات، قبل از همه به یک رشته دآوری های منطقی نیاز دارد. محاسبه و ساخت هندسی، که اغلب برای حل یک مساله مورد استفاده قرار می گیرد، بدون استدلال منطقی ممکن نیست؛ آن ها فقط به استدلال جهت می دهند. یعنی در ریاضیات، بدون استدلال، حتی یک گام هم نمی توان برداشت. چند نمونه می آوریم. در سال ۱۷۸۱ سیاره ی اورانوس کشف شد. در اواخر سده ی هجدهم و آغاز سده ی نوزدهم، با بررسی هایی که انجام گرفت، معلوم شد که حرکت این سیاره با آن چه که به وسیله ی محاسبه های نظری به دست می آید، تفاوت هایی دارد. این وضع را تنها به این ترتیب می شد توضیح داد که اثر سیاره ی ناشناخته ای را روی اورانوس به حساب بیاوریم. «وله وریه» (۱۸۱۱-۱۸۷۷)، دانشمند فرانسوی، با در نظر گرفتن انحرافی که در حرکت اورانوس بود، توانست با استدلال منطقی و محاسبه های پیچیده، جای این سیاره ی ناشناخته را در آسمان معین کند. و بعد در ۲۳ سپتامبر ۱۸۴۶، هالی اخترشناس، سیاره جدید را، که بعدها نپتون نامیده شد، پیدا کرد. این کشف، یکی از موفقیت های برجسته ی تفکر و اندیشه ی آدمی است. سیاره ی مهمی هم که بعد از نپتون قرار گرفته است، یعنی سیاره ی پلوتون، به همین ترتیب کشف شد.

ریاضیات، به کشف بسیاری از سیاره های کوچک (سیارک ها) هم کمک کرده است. از جمله پیاتسی اخترشناس، برای نخستین بار، سیارک تسهری را مشاهده کرد، ولی به علت قطع مشاهده آن را گم کرد. گوس ریاضی دان به یاری او آمد. او با توجه به بعضی مفروضاتی که پیاتسی درباره ی این سیارک به دست آورده بود، مسیر آن را محاسبه کرد. و در نتیجه با توجه به جایی که گوس به کمک محاسبه ی ریاضی معین کرده بود، دوباره سیارک را پیدا کردند.

نمونه ی دیگری می آوریم که اهمیت منطق را در ریاضیات روشن می کند. از قدیم ترین روزگاران مردم می خواستند با تجربه نسبت طول محیط دایره را به طول قطر آن پیدا کنند، یعنی عددی را پیدا کنند که معلوم کند طول محیط دایره چند برابر طول قطر آن است. با این عدد که π نامیده می شود، می توان با در دست داشتن قطر دایره محیط و مساحت آن را پیدا کرد. همچنین بسیاری از مساله های

مهم دیگر هم به کمک همین عدد π حل می‌شوند. بنابراین باید عدد π را با دقت لازم در اختیار داشت. محاسبه‌ی تجربی π تنها می‌تواند تقریب بدی از آن را به ما بدهد. در مرحله‌های نخستین تمدن انسانی هم از همین مقدار غیر دقیق π استفاده می‌کردند. از جمله در مصر سه هزار سال قبل عدد π را برابر ۳ به حساب می‌آوردند. حتی نوشته‌هایی از سده‌ی هفدهم میلادی در دست است، که در آن زمان هم برای عدد π همین مقدار را قبول داشتند. بعدها π را $3/14$ و گاهی $3/16$ به حساب می‌آوردند. در سده‌ی سوم پیش از میلاد ارشمیدس بزرگ‌ترین ریاضی‌دان یونان باستان، که در حمله‌ی بربرها کشته شد، بدون اندازه‌گیری، و تنها با استدلال و محاسبه، برای عدد π ، مقدار $3\frac{1}{7}$ را که دقت آن رضایت‌بخش است، پیدا کرد (عدد ارشمیدس). بعدها، ریاضی‌دانان دیگر با استفاده از کشف ارشمیدس، عدد π را با دقت باز هم بیش‌تری به دست آوردند. جمشید کاشانی، ریاضی‌دان و اخترشناس ایرانی عدد π را تا ۱۷ رقم و لودولف، ریاضی‌دان آلمانی سده‌ی شانزدهم، صد سال بعد از جمشید کاشانی با صرف وقت بسیار، توانست عدد π را تا ۳۵ رقم اعشار پیدا کند، به این ترتیب:

۳/۱۴، ۱۵۹، ۲۶۵، ۳۵۸، ۹۷۹، ۳۲۳، ۸۴۶، ۲۶۴، ۳۳۸، ۳۲۷، ۹۵۰، ۲۲۸

محاسبه دقیق‌تر مقدار π ، بعد از لودولف هم قطع شد. در سال ۱۸۷۳، شنکس، ریاضی‌دانی که خیلی کم مشهور است، ۵۲۷ رقم اعشار این عدد را پیدا کرد. در واقع شنکس، ۷۰۷ رقم آن را پیدا کرده بود، ولی محاسبه‌ی او، از رقم ۵۲۸ به بعد اشتباه است. البته، چنین مقدار تقریبی از عدد π ، که شنکس پیدا کرد، دارای ارزش عملی و یا نظری نیست. با وجود این، ریاضی‌دانان انگلیسی و امریکایی، در سال‌های ۱۹۴۶ تا ۱۹۴۷ ۸۰۸ رقم از عدد π را به دست آوردند. مهم این است که استدلال منطقی، هندسه و دیگر شاخه‌های ریاضیات را چنان تکامل داده است که می‌توان عدد π را، بدون هیچ‌گونه اندازه‌گیری، تا هر دقتی که لازم باشد، محاسبه کرد.

آنچه را که درباره‌ی اهمیت استدلال منطقی گفتیم، ما را قانع می‌کند که

بی‌گیرانه قدرت داورى منطقى خود را بالا ببریم. هر دانش‌آموزى باید به خوبى یاد بگیرد که چگونه به درستى بیندیشد. درست‌اندیشى، نه تنها در ریاضیات لازم است، بلکه شرط لازم زندگى کردن در جهان امروز است.

حالا سعی کنید این مسأله‌ها را با استدلال منطقى حل کنید (پاسخ‌هاى درست را در پایان همین پیش‌گفتار ببینید).

۱. حاصل ضرب چهار عدد پشت سر هم برابر 24×30 شده است. این عددها را پیدا کنید.

۲. مى‌خواهیم ۷ سیب برابر و یک جور را بین ۸ نفر به طور برابر تقسیم کنیم. چگونه عمل کنیم، تا حداقل بریدگى در سیب‌ها انجام شود؟

۳. وقتى که امروز صبح از خواب بلند شدم، دیدم که ساعت دیوارى خوابیده است. ساعت دیگرى هم نداشتم. کمی فکر کردم که چگونه ساعت را میزان کنم، بعد لباس پوشیدم، به ساختمان دوستم که در طبقه‌ی پایین بود رفتم. در بدو ورود ساعت دیوارى او را نگاه کردم، کمی با او صحبت کردم و موقع خداحافظى دوباره به ساعت دیوارى نظرى انداختم. به ساختمان خودم برگشتم و بلافاصله ساعت دیوارى را میزان کردم. چگونه این کار را انجام دادم؟

۴. دو منطقه مسكونى A و B ، در نزديكى يكدیگر واقع شده‌اند. همى مردم منطقه‌ی A راست‌گو و همى مردم منطقه‌ی B دروغ‌گو هستند. مردم این دو منطقه به طور دایم به ديدار يكدیگر مى‌روند. شما به يکى از این دو منطقه رسيده‌ايد. چگونه مى‌توانيد با يک پرسش (تنها يکى) از اولين کسى که به شما برخورد مى‌کند، بفهميد که آیا به منطقه‌ی A رسيده‌ايد يا به منطقه‌ی B ؟

۵. سه نفر به رستوران رفتند، حساب آن‌ها ۱۵۰۰۰ ریال شد. نفرى ۵۰۰۰ ریال دادند، ولى صندوق‌دار گفت که اشتباه کرده است و ۲۵۰۰ ریال به آن‌ها پس داد. آن‌ها ۱۰۰۰۰ ریال را انعام دادند و نفرى ۸۰۰۰ ریال را

برداشتند. به این ترتیب هر کدام ۴۲۰۰ ریال و روی هم ۱۲۶۰۰ ریال خرج کردند، ۱۰۰۰ ریال هم انعام دادند، روی هم می‌شود ۱۳۶۰۰ ریال. بقیه‌ی ۱۴۰۰ ریال کجا رفته است؟



سفسطه، یعنی استنباط فکری نادرستی که ظاهر آراسته و درستی داشته باشد. کسی که سفسطه می‌کند، به معنای این است که در زیر «استدلال‌های» خود، یک یا چند اشتباه را پنهان کرده است. به خصوص سفسطه‌های ریاضی، اغلب همراه با انجام عمل‌های غیر مجاز و یا به حساب نیاروردن شرط‌های لازم در قضیه‌ها، فرمول‌ها و قاعده‌هاست. گاهی هم، استدلال را متکی بر شکل نادرست و یا استفاده‌ی نابجا از جمله‌ی «روشن است» می‌کنند. در تاریخ تکامل ریاضیات، سفسطه‌ها، نقش اساسی داشته‌اند. آن‌ها، کمک کردند تا در استدلال‌های ریاضی، دقت بیشتری بشود و مفهوم‌ها و روش‌های ریاضی، عمق بیشتری پیدا کنند. نقش سفسطه‌ها، در تکامل ریاضیات، شبیه نقش اشتباهات غیر عمدی است که در استدلال‌های ریاضی، حتا برای ریاضی‌دانان مشهور هم پیش می‌آمد. ایوان پاولوویچ پاولوف می‌گوید: «درست، اشتباه‌های روشن و بیش‌یا افتاده است که راه را به سوی کشف باز می‌کند». در واقع، ردیابی و روشن کردن اشتباه‌هایی که در استدلال‌های ریاضی وجود داشته است، اغلب به پیشرفت ریاضیات، یاری داده است. در این زمینه، به‌ویژه تاریخ اصل اقلیدس درباره‌ی خط‌های موازی، بسیار آموزنده است. می‌دانیم که این اصل، به این صورت تنظیم شده است: از نقطه‌ی مفروض واقع در بیرون یک خط راست، تنها یک خط راست می‌توان موازی با آن رسم کرد. در طول بیش از دو هزار سال، بسیاری از ریاضی‌دانان مشهور، در زمان‌های مختلف و از کشورهای مختلف، تلاش می‌کردند تا این حکم را ثابت کنند، یعنی آن را، به عنوان نتیجه‌ای از دیگر

اصل‌ها، به دست آورند.^۲ همه‌ی این تلاش‌ها با عدم موفقیت روبرو شد. نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی، ریاضی‌دان بزرگ روس، در سال ۱۸۲۳ در کتاب درس هندسه‌ی خود نوشت: «اثبات دقیق این حکم را تا کنون نتوانسته‌اند پیدا کنند، آن چه را که تاکنون داده شده است، می‌توان تنها نوعی توضیح دانست، والا هیچ کدام از آن‌ها را نمی‌توان، اثبات ریاضی، به معنای کامل خود به حساب آورد». ولی با همه‌ی این که این اثبات‌ها همراه با اشتباه بود، توانستند برای پیشرفت هندسه، مفید واقع شوند. بستگی بین قضیه‌های مختلف هندسه، به طور کامل روشن شد و در آخر می‌توان گفت که این «اثبات‌ها» کمک کردند تا یکی از بزرگ‌ترین کشف‌ها در زمینه‌ی هندسه و به احتمالی در تمامی ریاضیات، یعنی کشف هندسه‌ی نا اقلیدسی انجام گیرد، که افتخار آن نصیب لباچوسکی شد. خود لباچوسکی هم، در آغاز می‌کوشید تا اصل توازی را ثابت کند، ولی خیلی زود متوجه شد که این کار عملی نیست. او در سال ۱۸۲۶ ثابت کرد که حکم مربوط به اصل توازی، به کمک بقیه‌ی اصل‌های هندسه، قابل اثبات نیست. راهی که او انتخاب کرد تا عدم امکان اثبات اصل توازی را نتیجه بگیرد، او را به کشف هندسه‌ی جدید راهنمایی کرد. این مثال‌ها و نمونه‌های دیگری که می‌توان آورد، ما را قانع می‌کند که تلاش برای برطرف کردن اشتباه‌ها در استدلال‌های ریاضی را می‌توان، به عنوان یکی از انگیزه‌ها برای پیشرفت ریاضیات، به حساب آورد.

اکنون ببینیم که سفسطه چه فایده‌ای برای ریاضیات دارد! تشریح سفسطه‌ها، قبل از هر چیز، تفکر منطقی را تکامل می‌دهد، و راه درست اندیشیدن را، که شرط لازم زندگی است، به ما تلقین می‌کند. کشف اشتباه در سفسطه، به معنای این است که ما را از دام‌هایی که در سر

۲- اصل، یعنی حکم اولیه‌ای که ناشی از تجربه است و در ریاضیات، بدون استدلال — منطقی پذیرفته می‌شود. ویژگی اصل اقلیدس در این است که گمان می‌کردند می‌توان آن را به یک قضیه تبدیل کرد، یعنی آن را به کمک دیگر اصل‌های هندسه، ثابت کرد.

راه «استدلال» وجود دارد، آگاه می‌کند، و این آگاهی ما را از تکرار چنین اشتباه‌هایی در دیگر استدلال‌های ریاضی بر حذر می‌دارد. وقتی که چیز داغی یک بار دست بچه‌ای را بسوزاند، برای بار دوم آن را آزمایش نمی‌کند و خیلی با احتیاط‌تر با آن روبه‌رو می‌شود. به همین ترتیب هم، کسی که یک بار به دام «استدلال» سفسطه‌آمیز افتاده باشد، بار دوم با احتیاط و دقت بیش‌تری به کار می‌پردازد.

مهم‌تر از آن این که، تجزیه و تحلیل سفسطه‌ها، به درک آگاهانه‌ی موضوع ریاضیات کمک می‌کند و قدرت مشاهده، تفکر و نقطه نظر انتقادی را زیاد می‌کند. وقتی که شما با بررسی یک سفسطه سر و کار دارید، می‌دانید که ممکن است در دام بیفتید و به همین مناسبت تلاش می‌کنید تا با هوشیاری، خود را از آن کنار بکشید. برای این که به دام نیفتید، خیلی با دقت جلو می‌روید و در هر گام، احتیاط‌های لازم را در نظر می‌گیرید. کسی که با یک سفسطه سر و کار دارد، مثل این است که در نبردی درگیر شده است و می‌خواهد بداند که آیا می‌تواند در این مسابقه پیروز شود یا نه! به این علت است که در برخورد با سفسطه‌های ریاضی، با دقت و احتیاط تمام، به جلو می‌رود، دقت فرمول‌ها و درستی نوشته‌ها و شکل‌ها را بررسی و شرط‌های خاص مسأله را تجزیه و تحلیل می‌کند، قابل قبول بودن عمل‌ها را مورد توجه قرار می‌دهد و غیره. و این‌ها، همان چیزهایی است که یک ریاضی‌دان باید داشته باشد.

از همه‌ی این‌ها گذشته، تجزیه و تحلیل سفسطه‌ها، جالب و سرگرم‌کننده است. تنها برای آدم‌های خشک، ممکن است سرگرمی با سفسطه‌ها، جالب نباشد. کشف اشتباه به ویژه، در «استدلال‌های» ریاضی، همیشه آدمی را به شوق می‌آورد: انسان همیشه به دنبال حقیقت و راستی است و از پیدا کردن آن لذت می‌برد. هر چه، سفسطه پیچیده‌تر و دشوارتر باشد، کار با آن سرگرم‌کننده‌تر و جالب‌تر می‌شود.

در این جا چند مسأله می‌آوریم. برای کشف نادرستی آن‌ها، خیلی زود به

پاسخ آن‌ها در آخر مقاله مراجعه نکنید و تلاش کنید پاسخ خود را با آن‌ها مقایسه کنید.

۶. ۴ تومان برابر است با ۴۰۰ ریال.

تساوی درست زیر را در نظر بگیرید.

$$۲۰ \text{ ریال} = ۲ \text{ تومان}$$

دو طرف را مجذور می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$۴۰۰ \text{ ریال} = ۴ \text{ تومان}$$

اشتباه در کجاست؟

۷. ۲=۳ داریم:

$$۴ - ۱۰ = ۹ - ۱۵$$

به دو طرف این برابری $\frac{۲۵}{۴}$ را اضافه می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$۴ - ۱۰ + \frac{۲۵}{۴} = ۹ - ۱۵ + \frac{۲۵}{۴}$$

این اتحاد را می‌توان این طور نوشت:

$$\left(۲ - \frac{۵}{۲}\right)^۲ = \left(۳ - \frac{۵}{۲}\right)^۲$$

و از آن جا

$$۲ - \frac{۵}{۲} = ۳ - \frac{۵}{۲}$$

و یا:

$$۲ = ۳$$

۸. ۴=۸. این دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ۲x + y = ۸ \\ x = ۲ - \frac{y}{۲} \end{cases}$$

مقدار x را از معادله دوم در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$4 - y + y = 8$$

$$4 = 8$$

۹. هر عددی با قرینه‌ی خودش، یکی است.

عددی مخالف صفر، مثل a در نظر می‌گیریم و آن را x می‌نامیم: $x = a$.
دو طرف برابری را در $-4a$ ضرب می‌کنیم:

$$-4ax + 4a^2 = 0 \quad \text{یا} \quad -4ax = -4a^2$$

به دو طرف برابری x^2 را اضافه می‌کنیم:

$$x^2 - 4ax + 4a^2 = x^2 \quad \text{یا} \quad (x - 2a)^2 = x^2 \quad \text{و یا} \quad x - 2a = x$$

به جای x مقدارش a را قرار می‌دهیم:

$$-a = a \quad \text{یا} \quad a - 2a = a$$

۱۰. زاویه‌ی قائمه با زاویه‌ی منفرجه برابر است. پاره خطی راست مثل AB

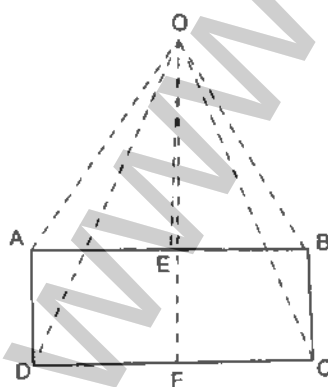
را در نظر می‌گیریم و از دو انتهای A و B آن، یک زاویه‌ی قائمه و یک زاویه‌ی منفرجه جدا می‌کنیم (شکل ۸). روی ضلع‌های این زاویه‌ها، دو پاره خط راست برابر $AB = BC$ را جدا می‌کنیم. عمود منصف‌های پاره خط‌های راست AB و CD را رسم می‌کنیم. چون پاره خط‌های AB و BC موازی نیستند، این عمود منصف‌ها، در نقطه‌ای مثل O به هم می‌رسند. از O به نقطه‌های A ، B ، C و D وصل می‌کنیم. دو مثلث AOD و BOC برابرند، زیرا $DO = CO$ ، $AD = BC$ ، $AO = OB$ داشت؛ بنابراین $\widehat{DAE} = \widehat{CBE}$ ، ولی $\widehat{EAO} = \widehat{EBO}$ و $\widehat{OAD} = \widehat{OBC}$ یعنی زاویه‌ی قائمه برابر است با زاویه‌ی منفرجه.

به همین ترتیب، در حالتی هم که نقطه O زیر AB قرار گیرد، می توان استدلال کرد (شکل ۹). در این حالت هم، به همان نتیجه ی برابری زاویه ی قائمه با زاویه ی منفرجه می رسیم، اشتباه در کجاست؟

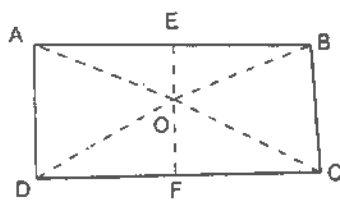
۱۱. وترى از مرکز دایره نگذشته است، برابر است با قطر دایره. در دایره، قطر AB را رسم می کنیم. از نقطه ی B وتر دلخواه BC را، که از مرکز نگذشته است، می کشیم. بعد از نقطه ی A به نقطه ی D ، وسط وتر BC ، وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه E قطع کند. (در شکل ۱۰) از E به C وصل می کنیم. دو مثلث BDA و EDC برابرند، زیرا: $BD = DC$ (طبق فرض)، $\hat{A} = \hat{C}$ (زاویه های محاطی مقابل به یک کمان)، $\widehat{BDA} = \widehat{EDC}$ (زاویه های روبه رو). و می دانیم که اگر دو مثلث در دو زاویه و یک ضلع برابر باشند، با هم برابرند. در نتیجه زاویه های برابر BDA و EDC در دو مثلث مقابل به ضلع های برابرند، یعنی $AB = EC$. در کجا اشتباه کرده ایم؟

۱۲. این معادله را در نظر می گیریم:

$$2 + \frac{1}{x-3} = \frac{4-x}{x-3}$$



شکل ۹



شکل ۸

و آن را به این ترتیب حل می‌کنیم (مخرج را از بین برده‌ایم):

$$2(x - 3) + 1 = 4 - x$$

$$2x - 6 + 1 = 4 - x$$

$$2x + x = 4 + 6 - 1$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

آیا این راه حل درست است؟ چه اشتباه بزرگی مرتکب شده‌ایم؟

پاسخ مساله‌های متن

۱. بین این چهار عدد، عددهای ۵ و ۱۰ وجود ندارد (زیرا در این صورت

حاصل ضرب آن‌ها به صفر ختم می‌شد). هر چهار عدد از ۱۰ بزرگتر

نیستند، زیرا در این صورت حاصل ضرب آن‌ها از ۱۰^۴ یعنی ۱۰۰۰۰

بزرگتر می‌شد. بنابراین باید یکی از دو حالت ۱، ۲، ۳، ۴، و یا ۶، ۷، ۸، ۹

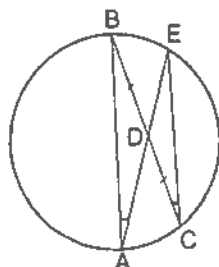
باشد. حاصل ضرب چهار عدد در حالت اول برابر ۲۴ می‌شود. بنابراین

عددهای ۶، ۷، ۸، ۹ هستند که حاصل ضرب آن‌ها برابر ۳۰۲۴ می‌شد.

۲. سهم هر کدام برابر است با $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ سیب. بنابراین می‌توان از جمله به

این ترتیب عمل کرد: یک سیب را به ۸ بخش، ۲ سیب را هر کدام به ۴

بخش و ۴ سیب را هر کدام به ۲ بخش تقسیم کرد.



شکل ۱۰

۳. وقتی می‌خواستم از ساختمان خودم خارج شوم تا به ساختمان دوستم برسم، ساعت دیواری خودم را به راه انداختم و به ذهن خود سپردم چه ساعتی را نشان می‌دهد. در ساختمان دوستم چون هم در لحظه‌ی ورود و هم در لحظه‌ی خروج، ساعت را دیده بودم، متوجه شدم که چه مدت را با دوستم صحبت کرده‌ام. وقتی به ساختمان خودم رسیدم، معلوم بود از لحظه‌ی رفتن تا لحظه‌ی برگشتن چقدر طول کشیده است (این را، ساعت دیواری خودم نشان می‌داد). از این میزان زمانی را که صرف صحبت با دوستم کرده بودم، کم کردم. نصف بقیه برای آمدن و رفتن از منزل خودم تا منزل دوستم صرف شده بود. این مقدار را به ساعت دیواری دوستم، که در لحظه خروج از ساختمان او نشان می‌داد اضافه کردم تا ساعت درست آن لحظه را پیدا کنم.

۴. می‌توان پرسید «آیا شما در این منطقه زندگی می‌کنید؟». اگر پاسخ مثبت داد، متوجه می‌شوید که شما در منطقه‌ی A هستید، در غیر این صورت در منطقه B قرار دارید.

۵. پرسش این مساله درست نیست. دیگر ۱۴۰۰ ریالی در کار نیست. نفری ۴۲۰۰ ریال روی هم ۱۲۶۰۰ ریال خرج کردند. از این مبلغ ۱۲۶۰۰ ریال، ۱۱۶۰۰ ریال به صندوق دادند و ۱۰۰۰ ریال انعام. همین.

۶. به توان رساندن یک مقدار پول معنی ندارد. عددها را می‌توان مجذور کرد، ولی کمیت‌ها را نمی‌توان.

۷. وقتی که داشته باشیم $a^2 = b^2$ ، همیشه به معنای برابر بودن a و b نیست. از این که مجذورهای a و b برابرند، تنها می‌توان نتیجه گرفت که قدرمطلق‌های a و b برابرند: $|a| = |b|$. در این مساله باید نتیجه می‌گرفتیم:

$$\left| 2 - \frac{5}{4} \right| = \left| 3 - \frac{5}{4} \right|$$

که به نتیجه‌ی درست $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ می‌رسیم.

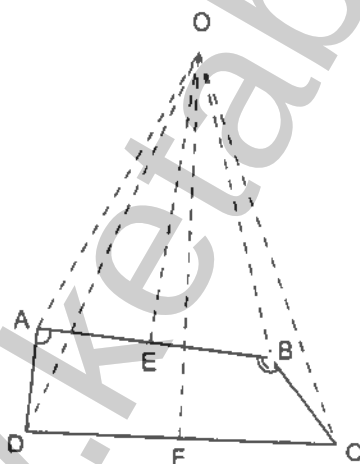
۸. دو معادله‌ی دستگاه یکدیگر را نقض می‌کنند. اگر معادله دوم را اندکی تغییر

دهیم، به صورت $2x + y = 4$ درمی آید که با معادله‌ی اولی یعنی $2x + y =$

۸، متناقض است. چنین دستگاهی را «غیر ممکن» گویند، یعنی برای x و y نمی‌توان عددهایی در نظر گرفت که در هر دو معادله‌ی دستگاه صدق کند.

۹. اشتباه استدلال در این مساله، شبیه اشتباهی است که در مساله ۷ دچار شده بودیم.

۱۰. خیلی ساده، شکل را نادرست رسم کرده‌ایم. شکل درست را در این جا (شکل ۱۱) می‌بینید.



شکل ۱۱

۱۱. وقتی دو زاویه (و در نتیجه سه زاویه) و یک ضلع از مثلثی با دو زاویه و یک ضلع از مثلث دیگر برابر باشند، همیشه به معنای این نیست که دو مثلث با هم برابر شوند. باید زاویه‌های نظیر و ضلع‌های نظیر در دو مثلث برابر باشند، تا مثلث‌ها برابر شوند.

۱۲. وقتی معادله‌ی $\frac{4x}{x-3} = 2 + \frac{1}{x-3}$ به صورت

$$2(x-3) + 1 = 4 - x$$

نوشتیم، به این معناست که دو طرف معادله را در $x - 3$ ضرب کرده‌ایم، ولی این عمل به شرطی ممکن است که x برابر ۳ نباشد، زیرا دو طرف برابری را در صفر نمی‌توان ضرب کرد. بنابراین شرط تبدیل معادله $x \neq 3$ است، یعنی پاسخی که به صورت $x = 3$ به دست آورده‌ایم قابل پذیرش نیست. این معادله پاسخ ندارد و بدون جواب است.



در این کتاب به جز فصل‌های مربوط که هر یک به جای خود خواندنی است، به نمونه‌هایی از درس‌ها هم پرداخته شده است. مثل مقال‌ی «دو معادله» و یا «مجموعه‌های ناروشن» که نظریه‌ی تازه‌ای است و به‌وسیله‌ی یک ایرانی مقیم امریکا تنظیم شده است. این دو مقاله، برای آگاهی بیشتر خوانندگان است.