
مقدمه‌ای بر تانسور

تألیف: دکتر حمدا. صالحی

دانشیار دانشگاه شهید چمران اهواز

انتشارات رسانه مکتوب

۱۳۹۰

سرشناسه	:	صالحی، حمدالله، ۱۳۴۵ -
عنوان و نام پدیدآور	:	مقدمه‌ای بر تانسور/تالیف حمدالله صالحی.
مشخصات نشر	:	اهواز: رسانه مکتوب، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری	:	۱ج. (بدون شماره‌گذاری): جدول، نمودار.
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۲۰۲-۵۷۰۲-۱۶-۳
وضعیت فهرست نویسی	:	فیبا
موضوع	:	حساب تانسورها
موضوع	:	فیزیک ریاضی
رده بندی کنگره	:	۲۳۳QA ص ۷م ۱۳۹۰
رده بندی دیویی	:	۵۱۶/۸۳
شماره کتابشناسی ملی	:	۳۲۶۸۱۲۷



نام کتاب: مقدمه‌ای بر تانسور
تألیف: دکتر حمدالله صالحی
ناشر: رسانه مکتوب
تیراژ: ۵۰۰
نوبت چاپ: اول
لیتوگرافی/ چاپ/ صحافی: چاپ جنوب اهواز
تعداد صفحه: ۳۵۲
شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۵۷۰۲-۱۶-۳
قیمت: ۸۰۰۰۰ ریال

پیش گفتار مؤلف

سپاس بیکران پروردگار را که به انسان قدرت اندیشیدن بخشید تا به یاری این موهبت الهی راه برقی و تعالی را پیموده و در درک علم که یکی از راه‌های تقرب به ذات اوست کوشا و در انتقال آموخته‌های علمی خود به جویندگان علم و دانش توانا و در انتشار و انتقال آن از مهمترین ابزار که همانا کتاب است به شایستگی بهره جوید.

سپاس و تحیات الهی بر پیامبر بزرگ اسلام (ص) که والاترین عالم و معلم انسان‌ها و جامعه بشریت است.

درود بی‌پایان بر ائمه بزرگوار "علیهم السلام" که سراسر زندگی و مساعی خویش را در جهت تزکیه، تعلیم و ارشاد جوامع بشری مصروف داشتند و انسانیت را با آداب و آئین الهی آراسته و پیراسته ساختند.

در فیزیک، سعی می‌کنیم اندازه بگیریم، چون فیزیک کارش ربط دادن این اندازه‌گیری‌ها به همدیگر است. اندازه‌گیری یعنی ربط دادن یک واقعیت فیزیکی به یک ساختار (مفهوم) ریاضی، یعنی این که ما چه جوری باید این کار را انجام بدهیم. آن چیزی را که بشود اندازه‌گیری کرد را کمیت فیزیکی می‌گوییم. بنابراین ساده‌ترین نوع کمیت‌های فیزیکی، کمیت‌هایی هستند که صرفاً با یک عدد نمایش داده می‌شوند. تجارب فیزیکی و خواص اعداد حقیقی در ریاضیات نشان داده که این نوع اعداد کاندیدای بسیار مناسبی برای کمیت‌های فیزیکی تک عددی هستند، ما به این نوع کمیت‌های فیزیکی، کمیت‌های نرده‌ای (اسکالر) می‌گوییم یعنی کمیتی که صرفاً با یک عدد حقیقی متناظر است و ما در آزمایشگاه یا جاهای دیگر با اندازه‌گیری ارقام این عدد حقیقی آن را معین می‌کنیم. مثلاً ما یک بسته خرما را

روی ترازویی قرار می‌دهیم و جرم آن را ۵۰۰ گرم می‌خوانیم. این مقدار کمیتی نرده‌ای است که به واقعیت فیزیکی جرم آن بسته خرما نسبت می‌دهیم. نکته‌ی مهم این جاست که اندازه‌گیری جرم بسته خرما به جهتی که ما آن را اندازه‌گیری می‌کنیم بستگی ندارد. یعنی اگر بسته را روی ترازو در همان نقطه بچرخانیم طبیعتاً مقدار جرم را همان قبلی اندازه می‌گیریم یا مثلاً اگر دور ترازو بچرخیم و از جهات مختلف جرم را اندازه بگیریم نتیجه همواره یک چیز است. این از خواص مهم کمیت‌های نرده‌ای است که در یک موقعیت مکانی و زمانی مشخص مقدار آن‌ها به جهت اندازه‌گیری آن بستگی ندارد.

اما فیزیکدان‌ها (و البته خیلی اقشار دیگر) بارها در برخورد با واقعیت‌های مختلف فیزیکی دیده‌اند که برای کامل بیان کردن آن واقعیت و یا اتفاق فیزیکی صرفاً بیان یک عدد کافی نیست مثلاً وقتی که می‌خواهیم در مورد حرکت یک ماشین صحبت کنیم صرفاً بیان مقدار سرعت آن مثلاً ۷۰ کیلومتر بر ساعت به اندازه‌ی کافی حرکت ماشین را تشریح نمی‌کند زیرا این که این ماشین در چه جهتی حرکت کند نتایج مختلفی به بار می‌آورد. پس برای توصیف بهتر کمیت‌های فیزیکی نیاز به ربط آن‌ها با ساختارهای پیشرفته‌ی ریاضی هستیم. مثلاً در این مورد ما باید هم مقدار سرعت را عدداً بیان کنیم و هم جهت هندسی آن را به این نوع کمیت‌ها، کمیت‌های برداری گویند.

یعنی کمیت‌هایی که غیر از مقدار به جهت نیز برای بیان آن‌ها نیاز داریم. نکته‌ی مهم در مورد بردارها آن است که می‌بایست در مکان و زمانی مشخص دارای مقدار یا شدت و همچنین جهت هندسی باشند یعنی حتماً باید در جهات فیزیکی (مکان‌ها) این جهت وجود داشته باشد.

در ریاضی، تانسور آرایه‌ای از اعداد است یعنی یک سری اعداد که به طور خاصی مرتب شده‌اند یعنی در یک جدول (نامحسوس) چیده شده‌اند. در واقع تانسور تعمیمی است از مفاهیم اسکالر، بردار و ماتریس^۱.

تانسورها موجوداتی ریاضی هستند که تحت تبدیلات مختصات تغییر می‌کنند اما تغییرشان طور نیست که طولشان ثابت باشد. بردار یک نوع تانسور است؛

تانسوری با رتبه‌ی یک. ماتریس می‌تواند یک تانسور با رتبه‌ی دو باشد و یا می‌تواند اصلاً تانسور نباشد. بستگی به این دارد که تحت تبدیلات محتصات بتواند از رابطه‌ی تانسوری پیروی کند. تانسورها می‌توانند مراتب بالاتری داشته باشند و بر سه نوع هموردا، پادوردا و مختلطاند. تانسور هموردا اندیس آن پایین و تانسور پادوردا اندیس آن بالاست و مختلط هم مخلوط این دو تاست. تبدیل تانسور از یک دستگاه به دستگاه دیگر در تانسور هموردا و پادوردا کمی متفاوت است اما نهایتاً نتیجه هر چه باشد به ما نتیجه‌ای امن می‌دهد که استفاده از آن در فرمول‌ها بسیار ایمن است. یعنی اگر قانون دوم نیوتن که بین بردارهاست را در نظر بگیریم با تبدیل محتصات نیرو و شتاب به دلیل تانسور بودن طوری عوض می‌شوند که در دستگاه جدید باز فرمول نیوتن نسبت به چارچوب جدید برقرار باشد.

تانسورها بستر ریاضی مناسب و ساده‌ای را جهت فرمول‌بندی و حل مسائل متعدد در سیطره‌ی مباحث گوناگون فیزیک نظیر مکانیک سیالات و نسبیت عام فراهم می‌کنند.

می‌توان عملیات جبری و دیفرانسیل را بر روی تانسورها انجام داد مانند تانسورهای متریک و تانسور جایگشت یا نماد دلتای کرونکر (که قابلیت تعریف پذیری عملگرهای تانسوری را دارا هستند) مانند مشتق هم وردا. با جابه جایی شاخص‌های هم وردا و پادوردا می‌توان به عبارات و تانسورهای ساده‌تری دست یافت که این کار شامل بالا بردن یا پایین آوردن شاخص‌ها یا به عبارت کلی بالانس شاخص‌ها می‌باشد که آن‌ها را می‌توان با ضرب در تانسور متریک، g_{ij} ، g^{ij} و ... به دست آورد. آنالیز تانسوری و هندسه دیفرانسیل برای نظریه‌ی نسبیت مبنایی ریاضی فراهم می‌آورد.

از طرف دیگر قوانین اولیه فیزیک حالاتی خاصاند و تنها برای محیط‌های همسانگرد یا با تقارن بالا به کار می‌روند؛ در حالی که بسیاری از محیط‌ها ناهمسانگردند و در نتیجه شتاب لزوماً با نیروی اعمال شده موازی نیست؛ یا جریان در جهتی متفاوت با میدان الکتریکی شارش می‌کند و غیره. در این حالت تانسور وارد عمل می‌شود.

این اولین تلاش من برای نوشتن کتابی در مورد تانسور است. هدف اصلی این کتاب برطرف کردن نیازهای دانشجویان رشته‌های مختلف علوم و مهندسی می‌باشد.

از سوی دیگر؛ با توجه به این که تانسورها تعمیم بردارها و اسکالرها هستند. در این کتاب به تانسورها یعنی تعمیم و گسترش کمیت‌های برداری و نرده‌ای؛ که در گرایش‌های فیزیک؛ مانند الکترومغناطیس؛ نسبیت خاص و عام؛ ذرات بنیادی؛ فیزیک ماده چگال و غیره کاربرد و اهمیت دارند می‌پردازیم.

موضوع اصلی به گونه‌ای مرتب شده است که حتی یک دانشجوی متوسط بتواند بفهمد که چگونه عملگرهای ریاضی را برای مسائل فیزیک به کار برد.

با این حال مسلماً کار بی‌عیب نیست و در این مورد هیچ ادعایی نداریم، بلکه انتظار داریم که همکاران و دانشجویان محترم کمبودهای کار را گوشزد کنند تا در چاپ‌های بعدی کتاب این کاستی‌ها را برطرف کنیم. پیشاپیش از همه‌ی عزیزانی که در این راه یاریمان کنند سپاسگزاری می‌کنیم.

حمدا.. صالحی، عضو هیات علمی دانشگاه شهید چمران

تأیستان ۱۳۹۰

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۵	پیشگفتار مؤلف
	فصل اول: مقدمه
۱۹	۱-۱: مقدمه
۲۰	۲-۱: ساختارها و ابرساختارها
۲۵	۳-۱: تانسور چیست؟
۳۳	۴-۱: فلسفه‌ی انتخاب علامت تانسور و بردار
۳۶	۵-۱: برخی اصطلاحات علمی در مورد تجزیه‌ی تابعی
	فصل دوم: آنالیز ماتریسی
۴۹	۱-۲: تعریف ماتریس
۵۰	۲-۲: مؤلفه‌های ماتریس وابسته به بردار و تانسور...
۵۰	۳-۲: ضرب ماتریس‌ها
۵۵	۴-۲: مشتق از عبارت‌های برداری و ماتریسی
۵۸	۵-۲: ترانهادهی ماتریس
۵۹	۶-۲: ضرب داخلی دو ماتریس ستونی
۷۱	۷-۲: دترمینان ماتریس مربعی
	فصل سوم: نمادگذاری تانسور و بردار
۹۵	۱-۳: بردارهای معمولی در مهندسی

- ۹۷ ۲-۳: جزئیات قرارداد جمع
- ۱۰۳ ۳-۳: خواندن ساختار اندیسی، نه علامت‌های اندیس
- ۱۰۸ ۴-۳: ویژگی‌های تغییراندیس دلتای کرونکر

فصل چهارم: عملیات برداری ساده و ویژگی‌ها

- ۱۲۱ ۴-۱: ضرب نقطه‌ای بین دو بردار
- ۱۲۲ ۴-۲: قانون خارج قسمت (بررسی صفر بودن یک بردار)
- ۱۲۵ ۴-۳: توابع برداری فرد و زوج
- ۱۲۷ ۴-۴: ضرب خارجی
- ۱۳۰ ۴-۵: ضرب سه گانه اسکالر

فصل پنجم: تصویرها

- ۱۳۵ ۵-۱: تصاویر خطی متعامد (عمود بر هم)
- ۱۳۹ ۵-۲: توصیف پایه تصاویر متعامد
- ۱۴۲ ۵-۳: تصویر خطی رتبه صفر تبهگن (جزئی)
- ۱۴۸ ۵-۴: تصاویر عمومی
- ۱۵۳ ۵-۵: قضیه تصویر

فصل ششم: تانسورها

- ۱۶۰ ۶-۱: مقایسه‌ی میان تانسورها و مفاهیم (مشابه) دیگر
- ۱۶۵ ۶-۲: عملگرهای خطی (تبدیلات)
- ۱۶۹ ۶-۳: دوگان‌ها و عمل ضرب دوگانه
- ۱۸۰ ۶-۴: سه تایی‌ها و تانسورهای مرتبه‌ی بالاتر
- ۱۸۱ ۶-۵: نمادگذاری مجموعه V_m^n تانسور
- ۱۸۵ ۶-۶: عملیاتی بر روی تانسور

فصل هفتم: تحلیل اولیه‌ی تانسور

- ۱۹۳ ۷-۱: سه نوع بردار و نمادگذاری تانسور
- ۱۹۷ ۷-۲: قضیه‌ی نمایش برای شکل‌های خطی
- ۱۹۸ ۷-۳: قضیه‌ی نمایش برای توابع خطی بردار به اسکالر
- ۲۰۲ ۷-۴: کشف تانسور وابسته با یک تابع خطی
- ۲۰۵ ۷-۵: تانسور وابسته با ترکیب دو تبدیل خطی
- ۲۰۸ ۷-۶: معکوس یک تانسور
- ۲۰۹ ۷-۷: تانسور همساز (هم عامل)
- ۲۱۵ ۷-۸: معکوس یک تغییر مرتبه اول (فرمول شرمان موریس)
- ۲۱۹ ۷-۹: تساوی در نمادگذاری تانسور
- ۲۲۱ ۷-۱۰: بیان تساوی خطی متعامد بر حسب دوتایی‌ها
- ۲۲۶ ۷-۱۱: خصوصیات تانسورهای تصویر مکمل

فصل هشتم: تانسورهای اولیه

- ۲۳۵ ۸-۱: خصوصیات تانسورها
- ۲۴۰ ۸-۲: تانسور وابسته به حاصل ضرب خارجی
- ۲۴۴ ۸-۳: تانسورهای متقارن و نامتقارن
- ۲۴۶ ۸-۴: تانسورهای مثبت معین
- ۲۴۸ ۸-۵: حاصل ضرب داخلی تانسور درجه‌ی دوم
- ۲۵۰ ۸-۶: حاصل ضرب داخلی تانسور مرتبه‌ی چهارم
- ۲۵۲ ۸-۷: نمادگذاری خود تعریف
- ۲۵۶ ۸-۸: پایه‌گذاری شده روی تئوری ماتریس به خوبی شناخته شده

فصل نهم: تبدیل مختصات / پایه

- ۲۶۱ ۹-۱: تغییر پایه (و تبدیل مختصات)
- ۲۶۸ ۹-۲: تعریف یک بردار و یک تانسور

۲۷۰	۳-۹: ناوردایی تانسور
۲۷۸	۴-۹: تانسور اینرسی
۲۸۰	۵-۹: ناوردایی بردارها یا تانسورها
۲۸۱	۶-۹: ناوردایی‌های رد
۲۸۴	۷-۹: هم عامل در ضرب اسکالر سه گانه
۲۸۵	۸-۹: ناوردایی‌های جمع دو تانسور
۲۸۸	۹-۹: مسائل ویژه مقداری
۲۸۹	۱۰-۹: ضرب جبری و هندسی ویژه مقادیر
۲۹۱	۱۱-۹: تانسورهای قابل قطری شدن
۲۹۲	۱۲-۹: ویژه تصویرگرها
	فصل دهم: نمادهای هندسی
۲۹۷	۱-۱۰: معادله‌ی یک صفحه
۲۹۸	۲-۱۰: معادله‌ی خط
۳۰۰	۳-۱۰: معادله‌ی بیضی
۳۰۲	۴-۱۰: معادله‌ی استوانه‌ای با سطح مقطع بیضی
	فصل یازدهم: تجزیه‌ی قطبی
۳۰۹	۱-۱۱: تجزیه تک مقداری
۳۱۰	۲-۱۱: قضیه‌ی تجزیه قطبی
۳۱۲	۳-۱۱: روش سریع برای انجام تجزیه قطبی در دوبعد (2D)
۳۱۸	۴-۱۱: تقارن مواد
۳۲۲	۵-۱۱: تانسورهای مرتبه دوم همسانگرد در فضای سه بعدی (3D)
۳۲۸	۶-۱۱: تانسورهای همسانگرد مرتبه‌ی چهارم
۳۳۰	۷-۱۱: محاسبه نرده‌ای در صد همسانگردی

فصل دوازدهم: جبر تانسورها و بردار مجرد

۲۳۵ ۱-۱۲: ساختارها

۲۴۲ ۲-۱۲: حساب تانسوری

۲۴۷ ۳-۱۲: تانسور تنش و تانسور استرس انرژی نسبیتی

۲۵۱ مراجع

www.ketab.ir