

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

برد عددی تبدیل آلوتگ در فضای هیلبرت

تالیف :

فاطمه رحیمی، مریم شریفی



سرشناسه	:	رحیمی، فاطمه، ۱۳۵۵ شهریور -
عنوان و نام پدیدآور	:	برد عددی تبدیل آلوتگ در فضای هیلبرت / فاطمه رحیمی، مریم شریفی.
مشخصات نشر	:	تهران: نمای دانش، ۱۳۹۴.
مشخصات ظاهری	:	۹۵ ص.
وضعیت فهرست نویسی	:	فیا
موضوع	:	برد عددی
موضوع	:	فضای هیلبرت
شناسه افزوده	:	شریفی، مریم، ۱۳۵۵ -
رده بندی کنگره	:	۱۳۹۴ ب۴ر۳/۲ QA۳۲۹
رده بندی دیویی	:	۵۱۵/۷۲۴۶
شماره کتابشناسی ملی	:	۳۹۲۱۶۷۳

برد عددی تبدیل آلوتگ در فضای هیلبرت



نام کتاب	:	برد عددی تبدیل آلوتگ در فضای هیلبرت
تألیف	:	فاطمه رحیمی، مریم شریفی
مدیر تولید	:	حسین نوری جوشقانی
نوبت چاپ	:	اول ۱۳۹۴
تیراژ	:	۱۰۰
قیمت	:	۹۰۰۰۰ ریال
شابک	:	978-600-95047-4-9
چاپ و صحافی	:	فدک ایستاتیس

انتشارات نمای دانش : تلفن: ۰۹۱۲۵۲۷۳۲۶۲ - ایمیل: nadaketab@yahoo.com

کلیه حقوق و حق چاپ متن و عنوان کتاب که به ثبت رسیده است؛ مطابق با قانون حقوق مولفان و مصنفان مصوب ۱۳۴۸ محفوظ می‌باشد. هرگونه برداشت، تکثیر، کپی برداری به هر شکل (چاپ، فتوکپی، انتشار الکترونیکی) ممنوع بوده و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار خواهند گرفت.

انتشارات نمای دانش

چکیده

در سال ۱۹۹۰ آلتونگ^۱ عملگرهای شبه نرمال را با استفاده از تبدیلی که بعدها به نام خودش معروف شد معرفی نمود. پس از آن تعیین برد عددی این تبدیل برای عملگرهای دلخواه مورد توجه قرار گرفت. با استفاده از این تبدیل می توان عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت H که با نماد $B(H)$ مشخص می شود را رده بندی کرد. در حالتی که T یک عملگر نرمال در $B(H)$ باشد، برد عددی تبدیل آلتونگ و برد عددی کلاسیک آن باهم برابرند. همچنین در حالت کلی، برای هر عملگر دلخواه در $B(H)$ برد عددی تبدیل آلتونگ زیر مجموعه ای از برد عددی کلاسیک آن خواهد بود.

در این کتاب سعی بر آن است تا گزارشی از روند بررسی ارتباط برد و شعاع عددی عملگرها با برد و شعاع عددی تبدیل آلتونگ وابسته به آنها، ارائه شود. همچنین ارتباط C - برد عددی در فضای ماتریس های $n \times n$ و C - برد عددی تبدیل آلتونگ آنها مورد بحث قرار می گیرد. کلید واژه: برد عددی، تبدیل آلتونگ، فضای هیلبرت، عملگر خطی کراندار.

فهرست مطالب

۱	تعاریف مقدماتی	۱
۱	۱.۱ برد عددی ماتریس ها	۱
۴	۲.۱ خواص برد عددی	۴
۹	۳.۱ ترسیم برد عددی	۹
۱۷	۲ برد عددی در فضای هیلبرت	۱۷
۱۷	۱.۲ فضای هیلبرت و خواص اولیه آن	۱۷
۲۲	۲.۲ برد عددی در فضای هیلبرت	۲۲
۲۴	۳.۲ خواص برد عددی در فضای هیلبرت	۲۴
۳۱	۴.۲ تجزیه قطبی در فضای هیلبرت	۳۱
۳۴	۳ برد عددی تبدیل آلتونگ در فضای هیلبرت	۳۴
۳۴	۱.۳ معرفی و خواص اولیه	۳۴
۳۸	۲.۳ رابطه شعاع عددی عملگر و شعاع عددی تبدیل آلتونگ آن	۳۸
۴۰	۳.۳ تبدیل n ام آلتونگ و رده بندی برخی عملگرها	۴۰
۴۵	۴.۳ ارتباط برد عددی یک عملگر و تبدیل آلتونگ آن	۴۵

۵۴	۴	C- برد عددی و تبدیل آلوتگ
۵۴	۱.۴	C- برد عددی یک ماتریس و تبدیل آلوتگ آن
۶۳	۲.۴	ارائه و بررسی چند سوال باز
۷۲		کتاب نامه

www.ketab.ir

مقدمه

بررسی ویژگی های عملگرهای خطی کراندار یکی از مباحث مهم در آنالیز تابعی می باشد. ساده ترین نمونه این عملگر ها ماتریس ها هستند که در تمام گرایش های ریاضی وجود دارند. به عبارتی دیگر ماتریس ها واسطه ای بین ریاضیات و سایر علوم می باشند و همین امر لزوم بررسی های هر چه بیشتر خواص وابسته به ماتریس ها را پر رنگ می کند. شاید اولین ویژگی یک ماتریس که به ذهن متبادر می شود مقادیر ویژه و طیف آن ماتریس باشد، اما طیف یک ماتریس نمی تواند اطلاعات کاملی را در اختیار ما قرار دهد.

مشابه مفهوم طیف، برد عددی یک ماتریس $n \times n$ مجموعه اعداد مختلطی است که به طور طبیعی وابسته به آن ماتریس می باشد. طیف یک ماتریس یک مجموعه گسسته است، در صورتی که برد عددی مجموعه ای فشرده و محدب می باشد. برد عددی را می توان تصویری از خود ماتریس در نظر گرفت که حاوی اطلاعات مفیدی در مورد ماتریس می باشد که طیف ها به تنهایی نمی توانند چنین اطلاعاتی را به ما بدهند. برد عددی وسیله ای مطمئن برای تعیین محلی است که مقادیر ویژه ماتریس در آنجا متمرکز شده اند. این مفهوم این اجازه را به ما می دهد که بسیاری از ویژگی های ماتریس را بینیم حتی اگر خود ماتریس را دقیقاً نشناسیم.

مفهوم برد عددی اولین بار برای عملگرهای خطی روی C^n در سال ۱۹۱۸ توسط تئوپلیتز^۲ در ارتباط با مبحث سری های فوریه مطرح گردید. او با الهام از قضیه فجر^۳ که ارتباط بین منحنی های مسطح و سری های فوریه را بیان می کند، به هر ماتریس $n \times n$ یک مجموعه فشرده در صفحه مختلط نسبت داد. در سال ۱۹۱۹ دانشمندان آلمانی تئوپلیتز و هاسدورف^۴ قضیه تحدب برد عددی را اثبات نمودند که به قضیه تئوپلیتز - هاسدورف معروف است. این دو همچنین تئوری برد عددی عملگرهای خطی را روی فضای هیلبرت مطرح کردند که در سال ۱۹۳۲ توسط استون^۵ تکمیل گردید. در سال ۱۹۹۰ این تئوری در شاخه های آنالیز تابعی و آنالیز عددی نیز معرفی گردید. از کاربردهای برد عددی در زمینه آنالیز عددی می

^۲ Toeplitz

^۳ Fejer

^۴ Hausdorff

^۵ Stone

توان به نقش برد عددی در نظریه های ارتعاش های کوچک و تکرارهای چپیشف برای دستگاه های خطی و غیره اشاره نمود. همچنین تعمیم هایی از برد عددی در سیستم های پایدار به کارآمده که منجر به شکوفایی تحقیقات مهندسی در این زمینه و پروژه های مشترکی میان ریاضی دانان و مهندسان الکترونیک شده است. همچنین با گسترده شدن کاربرد برد عددی و تعمیم های آن خصوصاً C - برد عددی و استفاده از آن در نظریه فیزیک کوانتم اهمیت این موضوع در سایر علوم بیشتر جلوه کرده است. امروزه C - برد عددی و نظریه کوانتم چنان به هم مرتبط اند که بسیاری از فیزیک دانان نیز به بررسی وضعیت برد عددی در ابعاد مختلف پرداخته اند. همچنین استفاده از تعمیم هایی از برد عددی در شاخه طیف سنجی و نظریه اندازه گیری و کنترل در علم فیزیک و شیمی نقش موثری در پیشرفت این مفهوم داشته است.

امروزه برد عددی یک مفهوم شناخته شده در آنالیز ماتریس ها است که در تئوری عملگرها بسیار مورد بررسی قرار می گیرد. برد عددی را می توان روی انواع مختلف عملگرها به ویژه عملگرهای هرمیتی و فشرده و همینطور جبرهای باناخ و C^* - جبرها معرفی و مورد استفاده قرار داد. به طور مثال لامر^۶ نشان داد که برد عددی ابزار موثری برای مرتبط کردن ویژگی های جبری و هندسی جبرهای باناخ است و به وسیله آن اثبات برخی از قضیه ها در این حوزه ساده تر می شود.

در سال ۱۹۸۷ براون^۷ به بررسی وضعیت طیف عملگرهای شبه نرمال در زیر فضاهای نابدیایی پایا پرداخت و پس از آن در سال ۱۹۹۰ آلوتگ^۸ عملگرهای p - شبه نرمال را با استفاده از تبدیلی که بعدها به نام خودش معروف شد رده بندی کرد و لگاریتم این عملگرها را به طور خاص تحلیل کرد. پس از معرفی این تبدیل توسط آلوتگ، ریاضی دانان بسیاری به بررسی این تبدیل و خواص آن در حوزه آنالیز تابعی پرداختند. از کسانی که در این حوزه فعالیت زیادی انجام داد می توان به یامازاکی^۹ اشاره کرد. او در سال ۲۰۰۰ رابطه بین برد عددی یک عملگر و تبدیل آلوتگ آن را بدست آورد که بر اساس آن رده بندی عملگرها ساده تر صورت می گیرد.

آنچه در فصل اول این پایان نامه می خوانید معرفی برد عددی ماتریس ها و خواص اولیه آن است. در

^۶ Lumer

^۷ Brown

^۸ Aluthge

^۹ Yamazaki

فصل دوم مروری بر برد عددی در فضای هیلبرت داریم و برد عددی را برای عملگرهایی خاص مانند عملگرهای نرمال مورد بررسی قرار می دهیم. در فصل سوم به بررسی تبدیل آلوتگ و برد عددی آن می پردازیم و به رده بندی برخی عملگرها با استفاده از این تبدیل پرداخته و در مورد ارتباط شعاع عددی و شعاع طیفی یک عملگر و تبدیل آلوتگ آن بحث می کنیم. در فصل چهارم تعمیمی از برد عددی با نام C - برد عددی را معرفی کرده و برخی از نتایج ذکر شده در فصل سه را در این تعمیم تحلیل می کنیم. در پایان به معرفی و بررسی چند سوال باز می پردازیم. این کتاب بر اساس مقالات زیر تدوین شده است.

[1] T. Yamazaki, On numerical range of the Aluthge transformation, Linear Algebra Appl, 341 (2002) 111-117.

[2] P.Y. Wu, Numerical range of Aluthge transform of operators, Linear Algebra Appl, 357 (2002) 295-298.