



ریاضیات و عینیت فیزیکی

مؤلفان

دکتر محمدرضا سعیدی (عضو هیئت علمی دانشگاه شاهد)

دکتر حسین مهربان (عضو هیئت علمی دانشگاه سمنان)

انتشارات دانشگاه شاهد (۱۳۸)

سرشناسه	: سعیدی، محمدرضا، ۱۳۶۱ -
عنوان و نام پدیدآور	: ریاضیات و عینیت فیزیکی / مؤلف: محمدرضا سعیدی و حسین مهربان
مشخصات نشر	: تهران: دانشگاه شاهد، مرکز چاپ و انتشارات، ۱۳۹۳.
مشخصات ظاهری	: ۲۹۶ ص. : مصور.
شابک	: ۹۷۸ - ۶۰۰ - ۶۱۲۱ - ۳۲ - ۱
وضعیت فهرست‌نویسی	: قیپا.
موضوع	: فیزیک ریاضی
موضوع	: ریاضیات
شناسه روده	: مهربان، حسین، ۱۳۴۲ -
شناسه روده	: دانشگاه شاهد، مرکز چاپ و انتشارات
روده - ی کنگره	: ۱۳۹۳ ۷۹/س/۱/۴۴۰.QA
روده‌بندی دیوید	: ۵۱۰/۲۴۶۲
شماره کتابشنا	: ۳۵۳۷۹۸۸



ریاضیات و عینیت فیزیکی

مؤلفان	: محمدرضا سعیدی و حسین مهربان
تعداد	: ۵۰۰ نسخه
نوبت چاپ	: اول ۱۳۹۳
قیمت	: ۱۲۵۰۰۰ ریال
نشانی ناشر	: تهران، ابتدای آزادراه خلیج فارس، روبه‌روی حرم مطهر امام خمینی (ره)، معاونت پژوهش و فناوری، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شاهد

دورنگار: ۵۱۳۱۳۵۴۹

تلفن: ۵۱۲۱۴۱۲۲

پیشگفتار

مقدمه

فصل اول: درباره ریاضیات

- ۱- ماییت ریاضیات ۱
- ۲- روش علمی ۱۵
- ۳- استدلال ریاضی ۱۹
- ۴- استقراء و قیاس ۲۲
- یادداشت‌ها ۳۰

فصل دوم: ریاضیات چیست؟

- ریاضیات چیست؟ ۳۱
- ۱- فیثاغورثیان ۳۲
- ۲- افلاطون ۳۲
- ۳- ارسطو ۳۴
- ۴- فلاسفه مسلمان ۳۵
- ۵- دکارت ۴۱
- ۶- لایب نیتس ۴۳
- ۷- هیوم ۴۴
- ۸- کانت ۴۶

- ۵۱..... ۹- استوارت میل
- ۵۲..... ۱۰- پثانو
- ۵۴..... ۱۱- پوانکاره
- ۵۷..... ۱۲- هیلبرت
- ۶۰..... ۱۳- براو و مکتب شهودگرایی
- ۶۳..... ۱۴- کمدل و انلاطون گرایی
- ۶۵..... ۱۵- منطق گراس
- ۶۷..... ۱۶- راسل
- ۷۰..... ۱۷- ویتگشتاین
- ۸۵..... ۱۸- کواین
- ۹۰..... ۱۹- پوپر
- ۹۸..... یادداشت‌ها

فصل سوم: معرفت فیزیکی

- ۱۰۷..... ۱- استقراء
- ۱۱۹..... ۲- معرفت مطابق با واقع
- ۱۲۸..... ۳- معرفت عینی
- ۱۳۷..... ۴- حدود معرفت علمی
- ۱۴۱..... ۵- روش اصل موضوعی در ریاضیات و فیزیک
- ۱۵۴..... یادداشت‌ها

فصل چهارم: هندسه

- ۱- هندسه محض و هندسه فیزیکی ۱۵۷
- ۲- تاریخ هندسه ۱۶۸
- ۳- هندسه اقلیدسی ۱۷۳
- ۴- اصل موضوع خطوط موازی ۱۷۶
- ۵- هندسه نااقلیدسی ۱۸۴
- یادداشت‌ها ۲۰۳

فصل پنجم: هندسه فضای فیزیکی و ریاضیات

- ۱- قراردادگرایی ۲۰۵
- ۲- ساختار فضای فیزیکی ۲۱۴
- ۳- هندسه حقیقی ۲۲۲
- ۴- هندسه فضای مادی ۲۲۶
- ۵- معیار هندسه فیزیکی نااقلیدسی ۲۳۳
- ۶- ریاضیات و واقعیت از نظر ایشتمین ۲۴۱
- یادداشت‌ها ۲۶۲
- فهرست الفبایی منابع ۲۶۵

کتاب حاضر برای دانشجویان فیزیک، ریاضی و علاقه‌مندان به فلسفه علم نگاشته شده و در آن، رابطه میان واقعیت فیزیکی و ریاضیات بررسی شده است؛ منظور از واقعیت فیزیکی، وجود عینی، خارجی و مادی اشیائی است که مورد مطالعه علم فیزیک قرار می‌گیرند و منظور از ریاضیات، علمی است که بدون هیچ ارجاعی به خارج یا نتایج تجربی، به دست می‌آید؛ به بیان دیگر، «واقعیت فیزیکی» دربارهٔ مصداق اشیاء یا عین و «ریاضیات» دربارهٔ «شیاء» یا ذهن صحبت می‌کند. لفظ اشیاء مادی به منظور محدود کردن وجود عینی به کار رفته است و در فلسفه، اشیاء مادی و غیرمادی را شامل می‌شود که هر دو علاوه بر وجود، عینیت نیز دارند؛ بخشی از این وجود، مورد مطالعه علم فیزیک قرار ندارد چراکه قابل مشاهده و آزمایش به معنای فیزیکی نیست؛ بنابراین، قسمی از این وجود که با لفظ وجود عینی و خارجی مادی اشیاء نامبرده شده است، مورد مطالعه علم فیزیک و منظور ما در این کتاب است. مصادیق علم فیزیک، واقعیت‌های خارجی اشیاء مادی هستند در حالی که مصادیق علم ریاضی، به ضرورت، اشیاء مادی خارجی نیستند؛ از منظری دیگر، همهٔ علوم تجربی، استقرایی یعنی غیریقینی و همهٔ علوم غیرتجربی از جمله ریاضیات و منطق، قیاسی یعنی یقینی هستند.

مطالبی که در این کتاب به آنها پرداخته شده است بدین شرح اند: ۱- چه تعاملی میان ریاضیات و فیزیک در حوزه علم فیزیک وجود دارد؟ بدین معنی که فیزیک‌دانان چه استفاده‌هایی از علم ریاضی در فیزیک می‌برند و چگونه قوانین طبیعت مادی را در قالب‌های غالب ریاضی بیان می‌کنند؟ و ۲- آیا هر قانون یا قضیه‌ای در ریاضیات، مصداق عینی و خارجی دارد؟ بدین معنی که آیا برای هر قضیه اثبات‌شده ریاضی یا به نحوه کلی‌تر آیا برای هر مدل ریاضی می‌توان مصداق عینی و خارجی در هرگز نت؟ به بیان دیگر، آیا ریاضیات که به‌طور صرف، علمی ذهنی و منطقی است، می‌تواند رابطه‌ای میان ذهن و عین برقرار کند؟

منطق و ریاضات محض، به‌خودی‌خود هیچ‌گونه حکمی دربارهٔ امور تجربی واقع‌صادرنمی‌کنند، اما ابزاری به‌طور کامل نیروی و مؤثر برای استنتاج نتایج از فرضیه‌های نظری هستند؛ برای نمونه، هندسه اقلیدسی محض نشان می‌دهد که می‌توان از اصول آن، قضیهٔ مجموع زوایای مثلث را به‌طور یقینی استنتاج کرد درحالی‌که اگر فرض کنیم یک نظریه هندسی به تعبیر فیزیکی‌اش را با یقین ریاضی معتبر ساخت و همانند هر نظریه علمی تجربی، تنها می‌تواند به درجه‌ای از تأیید نایل آید. یقین ریاضی در امور تجربی، انتظاری خطا و نامعقول است زیرا یقینی بودن معرفت ریاضی، تنها به واسطه تهی‌بودن از محتوای تجربی، قابل حصول است. بنابراین، تئورین ریاضی تاآنجا که به واقعیت اشاره دارند، یقینی نیستند و تا جایی یقینی‌اند که به واقعیت اشاره دارند.

مهم‌ترین تعامل میان فیزیک و ریاضی، استفاده هندسه نااقلیدسی در نظریه نسبیت عام بوده است. پس از تثبیت نظریه نسبیت عام در فیزیک، این فکر به اذهان دانشمندان خطا برد که همانند هندسه نااقلیدسی (که در حوزه ریاضیات محض به‌وجودآمده بود و در حوزه فیزیک به‌کارگرفته شد)، آیا هر قضیه‌ای در حوزه ریاضیات محض می‌تواند مصداق عینی و خارجی داشته باشد؟ به عبارت دیگر آیا برای علم ریاضی محض که ذهنی منطقی است، می‌توان عینیتی در طبیعت مادی جستجو کرد؟

در این کتاب سعی شده است در حد بضاعت، از وجوه مختلف به این پرسش‌ها پاسخ داده شود؛ در فصل ۱، معرفت بشری را به دو دسته تجربی و غیرتجربی تقسیم‌بندی کرده، ریاضیات و منطق را در حوزه علوم غیرتجربی آورده، شباهت‌ها و تفاوت‌های ریاضیات محض با علوم تجربی را بیان

کرده‌ایم. معرفت ریاضی را مورد بررسی قرار داده، درباره ماهیت ریاضیات، روش علمی، استدلال ریاضی، استقراء و قیاس سخن‌رانده‌ایم. در فصل ۲، آراء متفکرانی را که درباره چیستی ریاضیات نظری داشته‌اند (از متقدمانی مانند فیثاغورث، افلاطون، ارسطو و فلاسفه مسلمان و از متأخرانی نظیر دکارت، لایب‌نیتس، هیوم، کانت، استوارت میل، پائو، پوانکاره، هیلبرت، براور، گودل، راسل، ویتگنشتاین، کواپن و بویپر) به‌اختصار آورده‌ایم و مکاتیبی گوناگون را که در این خصوص به وجود آمده‌اند مانند صورت‌گرایی، شهودگرایی و منطق‌گرایی بررسی کرده‌ایم. در فصل ۳ به شناخت جهان خارج یا معرفت فیزیکی که اساس علوم تجربی را تشکیل می‌دهد، پرداخته‌ایم؛ در این فصل درباره معرفت سابق با واقع، معرفت عینی، حدود معرفت علمی، واقعیت فیزیکی و مدل‌های ریاضی و روش صلی منوعی در ریاضیات و فیزیک سخن‌گفته‌ایم.

اکنون که با معرفت ریاضی و معرفت فیزیکی، آشنا شده‌ایم، بجاست که درباره هندسه محض و هندسه فیزیکی، تاریخ هندسه، هندسه اقلیدسی و هندسه نااقلیدسی صحبت کنیم تا آماده شویم دریابیم چگونه در نظریه نسبیت عام پیشرفت کرده‌ایم. هندسه محض نااقلیدسی درباره جهان فیزیکی به کارگرفته‌شد و چگونه یک نظریه ریاضی محض را از آن جهان عینی فیزیکی را توصیف کند؛ این کار را در فصل ۴ انجام داده‌ایم. در فصل ۵، تعادل میان هندسه فضای فیزیکی و ریاضیات را با توجه به نظریه نسبیت عام و استفاده از هندسه نااقلیدسی در این نظریه بررسی کرده‌ایم و قراردادگرایی پوانکاره درباره ساختار هندسی جهان فیزیکی هندسه فضای مادی و معیار هندسه نااقلیدسی در این فصل، مطرح شده‌اند؛ در انتهای فصل که انتهای کتاب نیز به‌شمار می‌آید بر خود لازم دیدیم، نظر اینشتین درخصوص ریاضیات و واقعیت فیزیکی را بیان کنیم. نوشته حاضر، جزو معدود نوشته‌های فارسی است و بنابراین خالی از نقص نیست اما جرئتی لازم بود تا بدین کار پرداخته‌شود. بسیار خوشحال خواهیم‌شد که خوانندگان از سر عیب‌جویی و خیرخواهی در آن بنگرند و عیب‌های آن را گوشزد کنند تا در چاپ‌های بعدی اصلاح شوند.

دکتر محمدرضا سعیدی

دکتر حسین مهربان

مقدمه

برجسته‌ترین مشخصه‌ای که ریاضیات را از شاخه‌های مختلف علم تجربی متمایز می‌سازد، یقین و ضرورت منحصر به فرد نتایج آن است؛ حتی در پیشرفته‌ترین بخش‌های علوم تجربی، هیچ‌یک از گزاره‌ها هرگز نمی‌توانند از چنین مقامی بهره‌مند شوند؛ هر فرضیه‌ای در خصوص امور تجربی واقع، تنها می‌تواند از احتمال زیاد یا درجه‌ای بالا از تأیید بر مبنای شواهد تجربی بهره‌مند شود. قوانین تجربی هر اندازه هم که با آزمون‌های دقیق تأیید شده باشند ممکن است در صورت بروز شواهد جدید و ابطال‌کننده، کنار گذاشته شوند؛ در نتیجه، تمامی نظریه‌ها و فرضیه‌های علوم تجربی، خصیصه موقتی دارند، یعنی آنکه تنها تا اطلاع ثانوی مورد قبول هستند، در حالی که یک قضیه ریاضی در صورت اثبات، برای همیشه پذیرفتنی است و از چنان یقین خاصی بهره‌مند است که هیچ کشف تجربی، هر اندازه هم که غیرمنتظره و فوق‌العاده باشد، هرگز نمی‌تواند کمترین اثری بر آن داشته باشد. می‌خواهیم مفهوم یقین ریاضی را به‌ویژه درباره هندسه بررسی کنیم تا از این طریق، مسئله اعتبار نظریه‌های هندسه و اهمیت آنها در خصوص ساختار فیزیکی فضا تا اندازه‌ای روشن شود.

ریاضی‌دانان در قرون متمادی به اشیاء مورد بحث خود (مانند عدد، نقطه و ...) به‌عنوان اشیاء واقعی که عینیت دارند، می‌نگریسته‌اند ولی چون تلاش برای توصیف عینی این موجودات به شکست انجامید، آنها کم‌کم به تفکراتی رسیدند که مسئله عینیت این مفاهیم در ریاضیات مطرح نیست.

احکام و مفاهیم قابل طرح در ریاضیات به واقعیت عینی ربطی ندارند و فقط بیانگر روابط میان مفاهیم تعریف نشده هستند. اینکه نقطه، خط و عدد به واقع چه هستند، نه می تواند و نه لازم است در علم ریاضی مورد بحث قرارگیرد؛ آنچه در ریاضیات اهمیت دارد، ساختار آن است؛ اینکه دو نقطه خطی را معین می کنند، عددها طبق قاعده هایی معین ترکیب می شوند و عددهایی دیگر پدیدمی آورند و مانند اینها. عینیت زدایی از مفاهیم ریاضی، یکی از مهم ترین نتایج پیشرفت روش اصل موضوعی در ریاضیات است.

این ادعا که ریاضیات چیزی نیست مگر دستگاهی از نتایج حاصل از تعریف ها و اصول موضوعی که فقط باید بازگار باشند و به میل و اراده ریاضی دان خلق می شوند؛ چندان صحیح نیست. اگر این توصیف درست بود، ریاضیات چیزی نبود جز بازی با تعریف ها، قاعده ها و قیاس ها، بدون هیچ انگیزه فلسفی. این تصور که ذهن می تواند دستگاه های اصل موضوعی معنادار را آزادانه خلق کند، فقط نیمی از حقیقت را دربردارد. تنها با در نظر گرفتن کل ساختار ریاضیات و ضروریات درونی آن است که ذهن آدمی می تواند نتایجی به دست آورد که ارزش علمی داشته باشند. ریاضیات به همان اندازه که هنری خلاق است به همان اندازه هم، علمی منطقی است. اگر بخواهید پاسخ پرسشی را بدانید، نخست باید پرسش را مطرح کنید و هنر ریاضیات، هنر پرسیدن پرسش های درست است؛ از هر مجموعه ای از اصول یا خدمات یا فرضیات، می توان بی نهایت لم، قضیه و نتیجه استنتاج کرد که از نظر قیاس منطقی، هر یک به اندازه دیگر قابل اثبات باشد؛ برخی از این قضایا برای ریاضی دانان اهمیت دارند و برخی از آنها بی اهمیت اند که قضاوت در این خصوص، از حدود صلاحیت منطق تجاوز می کند. ریاضیات، منطق نیست چرا که منطق، ناقد است نه خالق. فردی که فقط به منطق مجهز است، به طور مسلم، هرگز کار ریاضی بدی انجام نخواهد داد ولی به یقین، هرگز کار ریاضی خوبی هم ارائه نخواهد داد. قوه تخیل، اساس کار ریاضیات است و منطق، خدمت گزار آن است. آنچه در تخیل ریاضی اهمیت دارد، محتوای تخیلی ذهن انسان است که مجموعه عادات فکری او را تشکیل می دهد. از آنجاکه قوه تخیل ریاضی باید دیر یا زود در معرض نقد منطق قرارگیرد، ضروری است که این عادات با منطق تطابق داشته باشند و ریاضی دانان باید افکار خود را به طور دائم در معرض قضاوت منطق قرار دهند.

شاخه‌های گوناگون تحقیق‌های علمی را می‌توان به دو گروه مهم تقسیم کرد: علوم تجربی و علوم غیرتجربی؛ گروه اول به بررسی، توصیف، توضیح و پیش‌بینی رویدادهای جهانی می‌پردازد که در آن زندگی می‌کنیم؛ احکام این علوم با واقعیت‌های تجربی مقایسه می‌شوند و تنها در صورتی قابل قبول هستند که بر شواهد تجربی، استوار باشند. آنچه علوم تجربی را از علوم غیرتجربی، یعنی منطق و ریاضی محض، متمایز می‌سازد، وابستگی به شواهد تجربی است، زیرا گزاره‌های منطق و قضایای ریاضی بدون هیچ‌گونه ارجاع به یافته‌های تجربی اثبات می‌شوند؛ این تمایز را به صورتی دیگر هم می‌توان بیان کرد، بدین شکل که روش همه علوم تجربی، استقرایی است، درحالی‌که روش علوم غیرتجربی، یعنی منطق، ریاضیات، قیاسی است. اکنون این پرسش پیش می‌آید که «چرا باید برای یقین قیاسی، یعنی یقین که درباره گزاره‌های اثبات‌شده ریاضی به دست می‌آید، ارجحی بیشتر قائل باشیم تا برای عدم یقین، برای علوم تجربی؟» منظور از عدم یقین این است که یک فرضیه تجربی هر اندازه هم که مورد آزمون قرار گرفته باشد و هر اندازه هم که با یافته‌های تجربی تأیید شده باشد، باز ممکن است در موارد بررسی نشده درست نباشد. شواهد تجربی هیچ‌گاه به تنهایی برای تصدیق یک فرضیه کفایت نمی‌کنند؛ به عبارت دیگر، «رگز نمی‌توانند صدق فرضیه را با یقین قیاسی تعیین کنند، بلکه تنها می‌توانند پشتیبان استقرایی کم‌ریش قوه برای فرضیه به شمار آیند.

با توجه به مقامی که برای یقین قیاسی قائل هستند، ریاضی دانان همیشه تلاش می‌کنند تا حدس‌ها و نظریه‌پردازی‌های صرف خود را به قضایای اثبات‌شده ریاضی تبدیل کنند ولی شاید احترام فوق‌العاده به یقین قیاسی تا اندازه‌ای بیش از حد باشد. زیرا هنوز پا بر خاسته‌ای برای این پرسش وجود ندارد که «چرا ریاضی‌دانان باید احکام خود را حتی در مواردی هم که این احکام بدون هرگونه اثباتی، بدیهی به‌شمار می‌آیند، ثابت‌کنند؟» با اندکی اغراق می‌توان گفت که بشریت، اندیشه اثبات ریاضی را تنها از یک شخص و از یک کتاب آموخت: از شخص اقلیدس و از کتاب اصول او.

پرسشی دیگر نیز مطرح است: ریاضیات چگونه توانست به علم قیاسی و منظم تبدیل شود؟ زیرا در ابتدا، یعنی در تمدن‌های باستانی و ماقبل یونانی مصر و بابل، ریاضیات، تنها معرفت تجربی

کاربرد و بسیار پیشرفته‌ای به‌شمار می‌آمد. بابلی‌ها حدود هزار سال پیش از آغاز ریاضیات یونان، قادر بودند پاسخ مسائل ریاضی به‌نسبت پیچیده‌ای را با تقریب بسیار خوب بیابند؛ درحالی‌که هیچ مدرکی وجود ندارد که بابلی‌ها، چه رسد به مصریان تلاش کرده‌باشند، قضایای ریاضی را به سبکی دقیق از اصول اولیه معینی استخراج کنند. هنوز پاسخی برای این پرسش یافت نشده که «آیا ریاضی‌دانان مصر و بابل، مفاهیمی مانند قضیه، اثبات، استخراج، تعریف، اصل متعارفی، اصل موضوع و ... را می‌شناختند یا خیر؟» ریاضیات تا پیش از تمدن یونان باستان، چیزی جز دستورالعمل‌هایی مفید درخصوص نحوه انجام کارهای ریاضی مشخص نبوده‌است. تحول اساسی در تاریخ ریاضیات، یعنی سرگونا معرفت تجربی به معرفت ذهنی، طی تکامل تمدن یونان باستان به‌وقوع پیوست؛ بنابراین می‌توان پرسید که «چرا یونانیان به معرفت تجربی قناعت نکردند؟ چرا آنان مجموعه‌ای دستورالعمل‌تجربی را جانشین یک علم قیاسی دارای ساختمانی منظم ساختند؟» ریاضی‌دانان یونان تحت تأثیر فلسفه ای‌ایی علم خود را به یک نظام قیاسی تبدیل کردند و برای آنکه این نظام را صورتی سازگار بخشید، یعنی سوسی بدون تناقض، اصولی معین را آغاز می‌کردند و بدون هیچ برهانی آنها را می‌پذیرفتند.

گفتیم که شاخه‌های مختلف تحقیق‌های علمی، در سه رده علوم تجربی و علوم غیرتجربی تقسیم می‌شوند. بی‌تردید، منشأ همه علوم تجربی در نهایت تجربه حسی است لیکن، حواس ما قابل اعتماد نیستند؛ به‌علاوه، روش علوم تجربی به‌وسیله استدلال است که این خود، مستلزم عدم قطعیتی قابل توجه است؛ بنابراین، علوم تجربی، به قول برخی از متفکران، چیزی نیستند جز برنامه‌هایی تحقیقاتی، حدس‌هایی جسورانه و تلاش‌هایی صادقانه، برای تصدیق و ابطال آنها؛ ازسوی دیگر، یقین معرفت ریاضیات قیاسی از چه تشکیل شده‌است؟ بی‌تردید، قضایای ریاضی از راه برهان اثبات می‌شوند و این نشان می‌دهد که قضایای مورد نظر به‌طور منطقی از اصول نتیجه‌گیری می‌شوند، به‌طوری‌که اگر اصول صادق باشند، قضایا هم به یقین، صادق خواهند بود؛ پس این قضایا نسبت به اصول تعیین می‌شوند لیکن، موارد زیادی وجود دارند که در آنها تصمیم درباره صدق برخی اصول ریاضی، امری کم‌وبیش دلخواهی بوده‌است.

کانت به‌دنبال نوعی معرفت ضروری و درعین حال واقعی و عینی است؛ یعنی شناختی مربوط به عالم خارج و اشیاء؛ ولی قضایایی که معرفت ما را تشکیل می‌دهند یا تحلیلی یا ترکیبی پیشین یا

ترکیبی پسین هستند. قضایای تحلیلی ضروری‌اند ولی به شناسایی عالم خارج ربطی ندارند و قضایای ترکیبی پسین درعین حال که به شناسایی ما از عالم خارج مربوط‌اند تجربی بوده و ضرورت صدق ندارند؛ تنها قضایایی که این دو ویژگی را با هم دارند، قضایای ترکیبی پیشین هستند که قضایای ریاضی از این نوع‌اند.

مفاهیم ریاضی از قبیل عدد، مجموعه و ... اموری عدمی نیستند؛ همچنین ذهنی محض نیز به‌شمار نمی‌آید؛ یعنی چنان نیستند که به خارج از ذهن راه‌نیابند و در آن به‌کار نروند. ریاضیات، امری خیال نیست بلکه به معنای عام کلمه، دانشی عینی است اما عینی و واقعی بودن آن به این معنا نیست که اشیائی متعین در عالم خارج درازای مفاهیم ریاضی، خواه طبیعی یا ماورای طبیعی وجود داشته باشند؛ به عبارت دیگر، مفاهیم ریاضی، عینیت فیزیکی و متافیزیکی ندارند یعنی وجودی مستقل و خارج از ذهن ندارند. اما می‌توان یافت. مفاهیم ریاضی از جمله مفاهیم ثانی فلسفی هستند که درازای آنها هیچ تصور حسی و تجربی وجود ندارد. ما اعداد را به طریق حسی درک نمی‌کنیم، بلکه آنها را از طریق متعلقات مادی درک می‌کنیم. در ذات مفاهیم ریاضی از معدودات و متعلقات متعین آنها از قبیل قلم، درخت، سنگ و سایر امور طبیعی یا ماورای طبیعی خبری نیست بلکه در ذات عدد ۲ ما تنها دوگانگی را می‌یابیم نه آنکه دو تا وجود طبیعی مانند دو درخت، دو سنگ و ... یا دو امر ماورای طبیعی را درک کنیم؛ بنابراین مفاهیم ریاضی، دارای وجود متعین طبیعی یا ماورای طبیعی نیستند؛ اما می‌توان گفت که مفاهیم ریاضی، منشأ انتزاع و زمینه عینی و واقعی برای تحقق در ذهن دارند. واقعیت خارجی چنان است که برای تشکیل مفاهیم و تصورات ریاضی بستر سازی می‌کند و زمینه انتزاع چنین اموری را فراهم می‌آورد؛ به عبارت دیگر، تنوع ریاضیات، معقولات و مفاهیم ثانی ریاضی است و از آنجاکه این مفاهیم اموری عقلانی و تجربی هستند، پس راه و روش تأمل و پژوهش در آنها عقلی محض است و یکی از روش‌های عقلی محض، قیاس است.

ما در فرایند درک مقولات ریاضی، امور و رویدادهای تجربی را نمی‌آموزیم تا آنگاه پس از استقراء امور تجربی به تعمیم یافته‌های تجربی بپردازیم؛ به بیان دیگر، مقولات ریاضی دارای منشأ انتزاع هستند و ذهن براساس آنها به درک آن مقولات، واصل می‌شود ولی این مقولات، نکته‌ای در باب ماهیت منشأ انتزاع خود آشکار نمی‌سازند تا قابل تعمیم به افرادی دیگر از همان ماهیت باشد،

مانند آنچه که در استقراء تجربی رخ می‌دهد. چراکه مفاهیم ریاضی، جزو مفاهیم فلسفی (مفاهیم ثانی فلسفی) هستند نه ماهوی. فرض کنید قضیه $2+2=4$ از راه تجربه به‌دست آمده و با مشاهده سیب و درخت و ... حاصل شده باشد. آیا ما در قضیه $2+2=4$ چیزی دربارهٔ خانه و سیب می‌آموزیم؟ پاسخ منفی است. ما فقط می‌آموزیم که جمع ۲ و ۲ برابر با ۴ می‌شود؛ ذهن در این مقام از روش استقرایی استفاده نمی‌کند بلکه پس از درک منشأ انتزاع اعداد، به انتزاع مفاهیم ریاضی پرداخته، آن را بر قالب دو جزء یک قضیه می‌نگرد و آنگاه پس از نسبت‌سنجی این دو جزء، به صدق کلی آنها حکم می‌کند و آن را تعمیم ریاضی می‌دهد، بدون آنکه تعمیم تجربی در میان باشد؛ برای مثال، ذهن، بلت را درک و انتزاع می‌کند و آنگاه احکام آن را به‌دست می‌آورد و احکام این مثلث ذهنی و نه مثلث‌های تجربی را تعمیم می‌دهد؛ درواقع، ذهن براساس مفاهیم شکل‌گرفته در خود، میان این مفاهیم و مقادیر ریاضی ثابت را برقرار می‌کند و آن را تعمیم می‌دهد.

بنابراین اختلاف میان روش علم ریاضی با روش علوم طبیعی، این است که در ریاضیات از استقراء تجربی استفاده نمی‌شود ولی در تکوین نظایه‌های علمی از استقراء سودمی‌برند؛ به‌علاوه، پیشینی‌بودن صدق و کذب گزاره‌های ریاضی، منفک‌بودن تعیین صحت و خطای این نوع قضایا از تجربه، مانع از کاربرد استقراء تجربی در ریاضیات است. چراکه حکم و قضیه‌ای کلی که براساس استقراء تجربی شکل‌گرفته است در مقام داوری نیز به‌سوم استقراء تجربی خواهدبود ولی درخصوص قضایای ریاضی چنین نیست و داوری این نوع قضایا به‌طور کامل از موارد و مصادیق تجربی جداست.

تفاوت مهم‌تر روش علوم ریاضی با روش علوم طبیعی این است که در ریاضیات هر دو از قیاس سودمی‌برند، هر قیاسی از دو جنبهٔ صورت و ماده تشکیل می‌شود. صورت قیاس به شکل صغری و کبری و مادهٔ قیاس به محتوای صغری و کبری در استدلال، مربوط است. صورت قیاس در هر دو علم، مشترک و مادهٔ قیاس در این دو علم، متفاوت است. مادهٔ قیاس ریاضی از مقدمات عقلی محض است، خواه قضایای ترکیبی پیشینی یا تحلیلی باشند، ولی مادهٔ قیاس تجربی از تجربیات است.

ماهیت صدق گزاره‌های ریاضی از طریق تحلیل روشی به‌دست می‌آید که توسط آن اثبات می‌شوند؛ این روش عبارت است از روش اثبات ریاضی که از استنتاج منطقی گزاره‌ای

تشکیل شده است که باید اثبات شود از گزاره‌هایی که قبلاً تصدیق شده‌اند. بدیهی است که این روش به تسلسلی بی‌نهایت منجر می‌شود مگر آنکه برخی از گزاره‌ها، بدون اثبات پذیرفته شده باشند؛ چنین گزاره‌هایی را در ریاضیات، اصول موضوع می‌نامند. از آنجاکه تمامی اثبات‌های ریاضی مبتنی بر استنتاجات منطقی از اصولی معین هستند، نتیجه می‌گیریم که قضیه‌ای ریاضی، مانند قضیه فیثاغورث در هندسه، چیزی بیان نمی‌کند که در مقایسه با اصولی که از آنها استنتاج شده است از لحاظ عینی یا از لحاظ نظری جدید باشد، اگرچه محتوی آن ممکن است از لحاظ روان‌شناسی به این معنی باشد که ما پیش از آن وجود ضمنی آنها در اصول آگاه نبودیم. اکنون ماهیت صدق (یقین) قضایای ریاضی روشن است: قضایای ریاضی نسبت به مجموعه اصولی که از آن استنتاج شده‌اند یقینی هستند؛ یعنی آنکه به سرور صادق‌اند به شرطی که آن اصول، صادق باشند و این امر ناشی از این است که قضیه، اگر به دقت اثبات شده باشد، تنها بخشی از آنچه در اصول آمده است را از نوعی دیگر بیان می‌کند. واضح است که این نوع صدق بر حکمی درباره امور واقع و تجربی دلالت نمی‌کند و بنابراین هرگز نمی‌تواند با هیچ یافته تجربی در تعارض قرار گیرد؛ در نتیجه، چنین صدقی برخلاف فرضیه‌ها و نظریه‌های علوم تجربی هرگز نمی‌تواند توسط شواهد جدید تجربی باطل شود. صدق ریاضی به‌طوری تکذیب‌ناپذیر، یقینی است، درست به این دلیل که از محتوی واقعی یا تجربی تهی است؛ بنابراین، هر قضیه ریاضی وقتی در قالبی شرطی، از شرطی، تحلیلی است و در نتیجه، مقدم بر تجربه است؛ یعنی اینکه صدق آن توسط ابزار به‌طور صرف تجربی مطلق و بدون هیچ‌گونه اشاره‌ای به داده‌های تجربی تعیین می‌شود.

با این تصور از هندسه، هندسه میثقی صوری قلمداد می‌شود؛ ما از چنین دسته‌ای با عنوان هندسه محض یاد خواهیم کرد؛ بنابراین، هر هندسه محض، چه اقلیدسی و چه نواقلیدسی، به موضوعی خاص نمی‌پردازد؛ به‌خصوص اینکه هیچ حکمی درخصوص فضای فیزیکی صادر نمی‌کند. همه قضایای آن تحلیلی هستند و در نتیجه با یقین کامل، صادق‌اند، درست به همین دلیل که از هرگونه محتوای تجربی خالی‌اند؛ بنابراین، برای مشخص کردن محتوای هندسه محض می‌توانیم از همان جمله‌بندی‌های معمولی استفاده کنیم. منشأ هندسه اقلیدسی، از نظر تاریخی، در تعمیم و نظم‌بخشیدن به کشفیاتی تجربی درخصوص اندازه‌گیری مساحت، حجم و تحول نجوم نهفته است؛ اگر هندسه را به این معنا تعبیر کنیم محتوای تجربی دارد؛ طبق چنین تعبیری، هندسه،

علمی تجربی است که می‌توان آن را نظریه ساختار فیزیکی یا هندسه فیزیکی خواند؛ در نتیجه، تعبیر فیزیکی از نظریه هندسی محض، چه اقلیدسی و چه ناقلیدسی، آن را به دستگاهی از فرضیه‌های فیزیکی تبدیل می‌کند که اگر صادق باشند، نظریه، ساختار فیزیکی دارد؛ اما مسئله صدق تعبیر فیزیکی یک نظریه هندسی معین، مسئله ریاضی محض نیست بلکه مسئله‌ای تجربی است؛ پاسخ به آن مستلزم آزمایش‌های مناسب یا مشاهدات منظم است. تنها حکمی که ریاضی‌دانان می‌توانند در این زمینه صادر کنند این است که اگر همه اصول یک هندسه معین، پس از تعبیر فیزیکی، صادق باشند، آنگاه تعبیر فیزیکی همه قضایای آن هندسه هم به‌ضرورت صادق‌اند، چون به‌طور منطقی از اصول نتیجه‌شده‌است؛ بنابراین به‌نظر می‌آید که برای تعیین ساختار فضای اقلیدسی یا ناقلیدسی جهان، کافی است که اصول هر یک را از نظر فیزیکی آزمایش کنیم، ولی این امر به‌طور مستقیم عملی نیست؛ زیرا مانند نظریه‌های فیزیکی، فرضیه‌های اساسی قابل آزمون تجربی مستقیم نیستند؛ بنابراین، آزمون تجربی هندسه فیزیکی، مانند آزمون هر نظریه علمی دیگر باید به‌طور غیرمستقیم انجام‌پذیرد؛ یعنی به این صورت که باید از فرضیه‌های اساسی، نتایج یا پیش‌بینی‌هایی معین استنتاج کرد که آزمون تجربی آنها امکان‌پذیر باشند. اگر آزمون، پیش‌بینی را تأیید کند؛ شاید تأییدکننده نظریه، ولی نه اثبات قطعی آن باشد؛ در غیر این صورت، نظریه را ابطال می‌کند. اگر شواهد تعیین‌کننده نظریه به تعداد کافی یافت‌شده باشند، هر هیچ‌گونه شواهد ابطال‌کننده‌ای به‌دست نیامده باشند، آنگاه دانشمندان می‌توانند نظریه را تا اطلاع ثانوی بپذیرند.

حال، این پرسش مطرح می‌شود که رابطه میان هندسه محض و هندسه فیزیکی چیست؟ در همین روش غیرمستقیم است که ریاضیات محض و منطق، نقش حیاتی در علوم تجربی ایفا می‌کنند. اگرچه منطق صوری و ریاضیات محض به‌خودی‌خود هیچ‌گونه حکمی درخصوص امور تجربی واقع صادر نمی‌کنند، ابزاری به‌طور کامل، ضروری و مؤثر برای استنتاج نتایج از فرضیه‌های نظری به‌شمار می‌آیند؛ برای نمونه از قوانین مکانیک نیوتنی یا اصول هندسه اقلیدسی به تعبیر فیزیکی، نتایجی قابل استنتاج‌اند که به اندازه‌ای مشخص و معین هستند که بتوانند در معرض آزمون تجربی مستقیم قرار گیرند؛ به این ترتیب، برای مثال، هندسه اقلیدسی محض نشان می‌دهد که می‌توان از اصول آن، قضیه مجموع زوایای مثلث را استنتاج کرد و اینکه امکان این استنتاج به‌هیچ‌وجه، به تعبیر مفاهیم هندسه بستگی ندارد. هرگز نمی‌توان یک نظریه هندسی به تعبیر فیزیکی‌اش را با یقین

ریاضی معتبر ساخت؛ هر اندازه هم که تعداد آزمون‌های تجربی آن متعدد باشد، باز مانند هر نظریه علوم تجربی، تنها می‌تواند به درجه کم یا زیاد از تأیید نایل آید؛ درحقیقت، مطلوبیت یقین ریاضی در امور تجربی، انتظاری خطا و نامعقول است؛ زیرا یقینی‌بودن معرفت ریاضی، تنها به قیمت تحلیلی‌بودن و در نتیجه تهی‌بودن از محتوای تجربی، قابل حصول است؛ بنابراین قوانین ریاضی تا آنجاکه به واقعیت اشاره دارند، یقینی نیستند و تا جایی یقینی هستند که به واقعیت اشاره ندارند.

مسئله مهم دیگر اینکه «اگر ریاضیات، تنها محصول تخیلات دلخواه ریاضی‌دانان باشد، چطور برخی از آنها بارها، های فیزیکی پیدامی‌کنند؟»، همانند کاربردهایی مانند محاسبه مدارهای دقیق حرکت سیارات و ستاره‌ها با قوانین حاکم بر کیهان‌شناسی نوین. هنگامی که یونانی‌ها به بسط نظریه بیضی‌ها می‌پرداختند، مرکز خورشیدی کردند که این نظریه، روزی در سفرهای فضایی مورد استفاده قرار گیرد. به نظر بعضی از متفکران، اختراعات ریاضی، وجودی مستقل از ذهن شخصی دارند که به آنها می‌اندیشد؛ صورت این وجود بی‌زید، با صورت وجود ملموس و مادی جهان خارجی تفاوت دارد، ولی با این همه، به نحوی دقیق و عمیق با وجود عینی، مرتبط است. «اگر ریاضیات یک بازی بی‌ثمر و فقط محصول فعالیت‌های معزی باشد، پس چگونه در توصیف جهان فیزیکی این قدر موفق بوده‌است؟ چرا باید به شهود ریاضی، کمتر از ادراک حسی عقیده داشته باشیم؟ آن شهودی که ما را وادار می‌کند تا نظریه‌های فیزیکی را بنا کنیم و آنرا با ادراکات حسی با آنها سازگاری نشان دهند؟». به طور مسلم، ریاضیات با مفاهیم مجرمانه که محتوای اندیشه‌های تجربی ما را تشکیل می‌دهند، ارتباطی نزدیک دارد؛ اما به هیچ وجه نتیجه‌گیر نمی‌شود که داده‌های ریاضی به سبب آنکه نمی‌توانند بر حواس ما اثر بگذارند، چیزهای ذهنی محض باشند بلکه ممکن است آنها نماینده جنبه‌ای از واقعیت عینی باشند، واقعیتهایی که از طریق حواس قابل حصول نیست و حضورشان در وجود ما می‌تواند به دلیل نوعی دیگر از تعامل میان ما و واقعیت باشد.