

منوری، رامین، ۱۳۴۶ -

پرسش‌های چهارگزینه‌ای دیفرانسیل و انتگرال (۱) مؤلفان رامین منوری، رضا نونهال آذر. - تهران: مبتکران، ۱۳۸۴، ۵۳۲ ص.: مصور، جدول، نمودار.

ISBN : 964 - 395 - 447 - 1

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

عنوان روی جلد مبتکران: پرسش‌های چهارگزینه‌ای دیفرانسیل و انتگرال (۱)

«چاپ قبلی این کتاب توسط انتشارات اندیشه‌سازان بوده است»

۱. حساب دیفرانسیل - کتاب‌های درسی - راهنمای آموزشی (متوسطه).

۲. حساب دیفرانسیل - آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه).

۳. حساب انتگرال - کتاب‌های درسی - راهنمای آموزشی (متوسطه).

۴. حساب انتگرال - آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه). الف. نونهال، رضا، ۱۳۴۶ - ب. عنوان

۵۱۵/۰۷ QA۳۰۳/۳/م۸پ۴

کتابخانه ملی ایران

م۸۴-۱۸۰۳۱

شابک: ۱-۴۴۷-۳۹۵-۹۶۴



ناشر: انتشارات مبتکران (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲)

تهران، میدان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان نظری، پلاک ۱۱۹، کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱

E-Mail: post@mobtakeran.org

تلفن ۹۱ - ۶۶۹۵۴۳۹۰ دورنگار ۶۶۹۵۴۳۹۲

نام کتاب : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

مؤلفان : دکتر رضا نونهال آذر - مهندس رامین منوری

نوبت چاپ : پنجم ۱۳۸۴ - (چاپ اول انتشارات مبتکران)

شمارگان : ۳۰۰۰ نسخه

حروف‌نگاری : مؤسسه‌ی فرهنگی - انتشاراتی اندیشه‌سازان

لیتوگرافی : موعود

چاپ : کبریا

قیمت ۴۱۰۰ تومان

حقوق چاپ و نشر، محفوظ و مخصوص ناشر است و هرگونه کپی برداری

یا نقل مطالب بدون اجازه ناشر پیگرد قانونی دارد

به نام خدا

مقدمه‌ی مؤلفان:

واقعاً نوشتن مقدمه برای کتاب‌های اندیشه‌سازان از نوشتن خود کتاب خیلی سخت‌تر است. مخصوصاً برای کسانی که مدت‌های مدیدی است با ارقام و اعداد سر و کار دارند.

این موضوع، یعنی نوشتن مقدمه، چند روزی است که فکر ما را مشغول کرده است؛ در این مورد هم خیلی با هم صحبت کردیم و در آخر به این نتیجه رسیدیم که بیشتر راجع به خود کتاب و نحوه‌ی استفاده از آن صحبت کنیم.

کتاب حاضر بر اساس مطالب کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) در چهار فصل تألیف شده است، در ضمن فصل‌هایی از کتاب حسابان نیز پوشش داده شده است. در فصل اول تابع قدر مطلق و جزء صحیح از فصل تابع و در فصل سوم تمام مطالب مربوط به حد و پیوستگی و مجانب و در فصل چهارم مطالب مربوط به مشتق و بعضی از کاربردهای آن، که در کتاب حسابان بیان شده، آورده شده است.

هر فصل کتاب شامل سه بخش است:

(۱) بخش آموزش: در این بخش مطالب درسی و نکات آموزشی و نکات مورد نیاز برای حل تست‌ها در کادرهای آموزشی آورده شده است و در مواردی مثال‌هایی نیز به این کادرها افزوده شده است و به دنبال هر کادر آموزشی، یک یا چند تست در مورد مطالب آن ذکر شده است.

پس از خواندن کامل و با دقت مطالب آموزشی، تست‌های بعد از آن را حل کنید و پاسخ تشریحی آن‌ها را حتماً بخوانید. کادرهای آموزشی طوری تنظیم شده‌اند که روال آموزش را دنبال می‌کنند بنابراین برای فهم بهتر لازم است این کادرها به ترتیب مطالعه شوند. بعضی نکات که فقط برای حل معدودی از تست‌ها به درد می‌خورند و یاد گرفتن آن‌ها اهمیت کم‌تری دارد در پاسخ تشریحی بعضی از تست‌ها آورده شده‌اند. جواب دادن به تمام تست‌های این بخش به نظر ما ضروری است.

(۲) بخش تمرین: در این قسمت تست‌های مختلف برای تکرار و تمرین مطالب آموخته شده‌ی قبلی و به منظور تسلط بیشتر بر مطالب آورده شده است. در انتهای این بخش تعدادی تست دشوار برای دانش‌آموزانی که می‌خواهند بیشتر یاد بگیرند (یا بیشتر از مغزشان کار بکشند) گنجانده شده است. تست‌های دشوار به ندرت در کنکورهای سراسری و آزاد می‌آیند بنابراین فقط در صورتی که وقت کافی و تسلط کامل به مطالب فضل دارید به سراغ این تست‌ها بروید.

(۳) آزمون: در انتهای هر فصل یک یا دو آزمون ارائه شده است که تعداد تست‌های آن‌ها بستگی به حجم فصل و مباحث آن دارد. سعی شده است که این تست‌ها تقریباً استاندارد و از نظر کیفیت و درجه‌ی آسانی و سختی مشابه آزمون سراسری باشند. تست‌های آزمون را در زمانی مانند زمان کنکور حل کنید (برای هر

تست به طور متوسط ۱ دقیقه و ۳۲ ثانیه). اگر نمره‌ی خوبی از آزمون نگرفتید توصیه می‌کنیم یک بار دیگر مطالب بخش‌های آموزش و تمرین را مطالعه کنید.^۱

تست‌هایی که مجموعاً در این سه بخش آمده است تلفیقی از تست‌های کنکور سراسری (ریاضی و تجربی) و دانشگاه آزاد (ریاضی و تجربی) و تست‌های طرحی مؤلفان و تست‌هایی دیگر از قبیل آزمون‌های اندیشه‌سازان و ... است.

لطفاً نظرات، پیشنهادها و ایرادات احتمالی را به آدرس تهران، صندوق پستی ۱۵۵۹ - ۱۳۱۴۵ برای ما بفرستید تا ممنون شما بشویم. (اگر روی پاکت بنویسید «مربوط به دپارتمان ریاضی» که دیگر دو برابر ممنونتان می‌شویم. ضمناً در سال‌های گذشته، روال بر این بوده که نام خوانندگانی که برای اولین بار^۲ اشکالاتی را به درستی متذکر می‌شده‌اند، در مقدمه‌ی چاپ‌های بعدی کتاب آورده می‌شده است).

در پایان جا دارد که از تمام پرسنل و واحدهای مؤسسه‌ی اندیشه‌سازان که در تهیه‌ی این کتاب هم‌کاری کرده‌اند تشکر کنیم. و هم‌چنین از زحمات گران‌قدر ویراستاران محترم کتاب، خانم‌ها سپیده ابوالقاسم، مریم کریمی، بهار داوودی، صدیقه محمودی، ریحانه حسینی، شبنم کاظم‌لو، طیبه نظری، اندیشه داوری، فریما فروغی، و آقایان مهدی حبیب‌زاده، حمیدرضا مفیدی، امیر اسدی، رضا صدوقیان‌زاده، حجت سردار، سیدحسن محبوبی نیز به خاطر دقت و توجه ارزشمندشان به مطالب و ارائه‌ی نظرات اصلاحی برای ارتقاء کیفیت کتاب سپاس‌گزاریم.

با آرزوی توفیق روزافزون برای شما

رضا نونهال آذر - رامین منوری

۱- اگر باز هم درست نشد، بروید کتاب یک مؤسسه‌ی دیگر را بخرید!

۲- تأکید کردیم برای اولین بار، چون بعضی وقت‌ها درباره‌ی یک اشکال احتمالی، ۵۰ نفر نامه می‌نوشته‌اند، یکی الان می‌نوشته، یکی ۱۰ ماه بعد! همه هم انتظار داشتند اسمشان را بزنیم. ما هم تصمیم گرفتیم یک قاعده‌ای بگذاریم مثل بازی قایم موشک [همان قایم باشک] و بگیریم هر کس زودتر گفت شک شک!

دیدم زیر لب می‌دارد با خود می‌گوید: «سری هارمونیک ... سری هارمونیک ...» و بعد می‌رود توی فکر! پرسیدم: «چیه؟ راجع به چی داری فکر می‌کنی؟»

گفت: «دنبال ایده می‌گردم برای طرح جلد. یک سری خاصی داریم توی کتاب بچه‌ها به اسم سری هارمونیک ($1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$)، رفتم دنبال این که چرا به این می‌گویند سری هارمونیک. دیدم منشأ این نام‌گذاری، موسیقایی است! مثلاً وقتی یک تک‌نت ویژه را روی گیتار می‌زنی، علاوه بر آن نت اصلی (که بستر اصلی آن چه را شنیده‌ای تشکیل می‌دهد)، یک سری اصوات دیگر با فرکانس‌های ۲ برابر، ۳ برابر، ۴ برابر و ... برابر نت اصلی (و طبعاً طول موج‌های $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ و ... نت اصلی) هم تولید می‌شود که همراه با آن نت اصلی منتشر می‌شوند. نام این سری را در ریاضیات برای همین گذاشته‌اند سری هارمونیک. دارم فکر می‌کنم بینم از تلفیق این ایده با سایر عناصر بصری گرافیک، می‌شود یک طرح جلد خوب، معنادار و هدفمند درآورد یا نه. ولی هر چه به مغزم فشار می‌آورم، یک طرح ناب که یک دلنگی توی ذهنم ایجاد کند تشکیل نمی‌شود. فکر کنم آخرش مجبور بشویم همان ایده‌ی طرح جلد چاپ‌های قبلی را اجرای جدید کنیم!»

یک نگاهی به این سری ویژه انداختم، خارج از بحث ایده برای طرح جلد و این حرف‌ها. بعد پرسیدم: «هر چه که جلوتر می‌رود، کوچک‌تر می‌شود! لابد آخرین اعضای این سری دیگر خیلی نزدیک به صفر هستند، نه؟ با این حساب، جمع همه‌ی اعضای این سری باید یک «حدّ مجموع» داشته باشد؛ درست است؟»

یک نگاه شیطنت‌آمیز به من انداخت و پاسخ داد:

«نه! اتفاقاً جمع تمام اعضای این سری، بی‌نهایت می‌شود!»

افکر کنم رویش نشد که به من حتی توی عالم دوستی و به شوخی بگوید: «تو معلّم زیست‌شناسی نیستی مگه؟ تو رو چه به این حرف‌ها، برو همون زیست‌شناسیتو درس بده!»

گفتم: «آخه من یادمه اون موقع‌ها که درس می‌خوندیم، توی مبحث تصاعدها مثلاً یک تصاعده داشتیم با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ ، که اگر جمله‌ی اول آن را ۱ فرض می‌کردیم، سری حاصل از مجموع جملاتش می‌شد $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ که از جهاتی قابل مقایسه با این سری شما می‌شود. این را می‌گفتم مجموع جملاتش از یک حدّی بالاتر نمی‌رود و «حدّ مجموع» دارد. مگر جملات این سری، زیرمجموعه‌ای از جملات همان سری هارمونیک نیست؟»

۱ - کوروش اسلامی را می‌گویم؛ که در عین عهده‌دار بودن معاونت آموزشی مؤسسه، مسئول دپارتمان ریاضی نیز هست.

۲ - تقریباً حول و حوش زمان مظفرالدین شاه قاجار را می‌گویم!

گفت: «چرا؟ اتفاقاً می‌شود از مجموعه‌ی جملات همان سری هارمونیک، زیرمجموعه‌هایی هم انتخاب کرد و با آن‌ها یک سری جدید تشکیل داد. مثلاً این طوری $\dots + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$ که اعضای کسری همان سری هارمونیک را یک در میان انتخاب کرده (اعداد زوج منخرج را انتخاب کرده). مجموع این‌ها باز همان بی‌نهایت می‌شود!»

گفتم: «جل‌المخلوق! مگر هر چه جلوتر می‌رویم، اعداد این زنجیر به سوی بی‌نهایت کوچک شدن نمی‌روند؟ چه‌طور جمع آن‌ها بی‌نهایت می‌شود؟ من وقتی این را با سری $\dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$ مقایسه می‌کنم و می‌گویم جمع جمله‌های آن قبلی بی‌نهایت می‌شود، ولی جمع جمله‌های این یکی نه (حتی به بیشتر از ۲ هم نمی‌رسد)، یک چیزی توی مغزم گریباز می‌کند!»

یک نگاه شیطنت‌آمیز دیگر به من انداخت و گفت: «نازه، من خیلی زیرمجموعه‌های دیگر از همان جمله‌های سری هارمونیک می‌توانم انتخاب کنم که باز هم جمع آن‌ها بی‌نهایت بشود. مثلاً حتی اگر تقریباً کسرهای را هزار تا در میان هم انتخاب کنیم، یعنی این طوری $\dots + \frac{1}{3000} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{1000} + 1$ باز هم جمعشان بی‌نهایت می‌شود. دوست داشتی می‌توانی یک میلیون تا در میان هم انتخاب کنی، باز هم جمعشان بی‌نهایت می‌شود!» بعد اثبات ریاضی موضوع را برابرم نوشت. بد جوری رفته بودم توی فکر.

پرسید: «به چی داری فکر می‌کنی؟» کمی مکث کرد و ادامه داد: «قطره‌قطره جمع گردد، وانگهی دریا شود!» گفتم: «من موقعی از یک مطلب ریاضی خیلی حظ ذهنی می‌برم که ارتباط بین آن با بخش‌های منطقی و عینی ذهنم به خوبی برقرار شود. به نظر من، آن تصاعد با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ که سری حاصل از مجموع جملات آن می‌شود $\dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$ هم به نوعی از همین سری هارمونیک انتخاب شده. یعنی ما بعد از $\frac{1}{4}$ در آن سری هارمونیک، یک عضو را حذف کرده‌ایم ($\frac{1}{4}$ را حذف کرده‌ایم) و همین‌طور بعد از $\frac{1}{8}$ ، سه عضو را حذف کرده‌ایم ($\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{4}$ را حذف کرده‌ایم) و همین‌طور الخ (یعنی الی آخر). شما در اولین مثالی که زدید، اعضاء کسری سری هارمونیک را یکی در میان حذف کردید. چرا وقتی این طوری حذف می‌کنیم:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{8192} + \frac{1}{16384} + \frac{1}{32768} + \frac{1}{65536} + \frac{1}{131072} + \frac{1}{262144} + \frac{1}{524288} + \frac{1}{1048576} + \frac{1}{2097152} + \frac{1}{4194304} + \frac{1}{8388608} + \frac{1}{16777216} + \frac{1}{33554432} + \frac{1}{67108864} + \frac{1}{134217728} + \frac{1}{268435456} + \frac{1}{536870912} + \frac{1}{1073741824} + \frac{1}{2147483648} + \frac{1}{4294967296} + \frac{1}{8589934592} + \frac{1}{17179869184} + \frac{1}{34359738368} + \frac{1}{68719476736} + \frac{1}{137438953472} + \frac{1}{274877906944} + \frac{1}{549755813888} + \frac{1}{1099511627776} + \frac{1}{2199023255552} + \frac{1}{4398046511104} + \frac{1}{8796093022208} + \frac{1}{17592186044416} + \frac{1}{35184372088832} + \frac{1}{70368744177664} + \frac{1}{140737488355328} + \frac{1}{281474976710656} + \frac{1}{562949953421312} + \frac{1}{1125899906842624} + \frac{1}{2251799813685248} + \frac{1}{4503599627370496} + \frac{1}{9007199254740992} + \frac{1}{18014398509481984} + \frac{1}{36028797018963968} + \frac{1}{72057594037927936} + \frac{1}{144115188075855872} + \frac{1}{288230376151711744} + \frac{1}{576460752303423488} + \frac{1}{1152921504606846976} + \frac{1}{2305843009213693952} + \frac{1}{4611686018427387904} + \frac{1}{9223372036854775808} + \frac{1}{18446744073709551616} + \frac{1}{36893488147419103232} + \frac{1}{73786976294838206464} + \frac{1}{147573952589676412928} + \frac{1}{295147905179352825856} + \frac{1}{590295810358705651712} + \frac{1}{1180591620717411303424} + \frac{1}{2361183241434822606848} + \frac{1}{4722366482869645213696} + \frac{1}{9444732965739290427392} + \frac{1}{18889465931478580854784} + \frac{1}{37778931862957161709568} + \frac{1}{75557863725914323419136} + \frac{1}{151115727451828646838272} + \frac{1}{302231454903657293676544} + \frac{1}{604462909807314587353088} + \frac{1}{1208925819614629174706176} + \frac{1}{2417851639229258349412352} + \frac{1}{4835703278458516698824704} + \frac{1}{9671406556917033397649408} + \frac{1}{19342813113834066795298816} + \frac{1}{38685626227668133590597632} + \frac{1}{77371252455336267181195264} + \frac{1}{154742504910672534362390528} + \frac{1}{309485009821345068724781056} + \frac{1}{618970019642690137449562112} + \frac{1}{1237940039285380274899124224} + \frac{1}{2475880078570760549798248448} + \frac{1}{4951760157141521099596496896} + \frac{1}{9903520314283042199192993792} + \frac{1}{19807040628566084398385987584} + \frac{1}{39614081257132168796771975168} + \frac{1}{79228162514264337593543950336} + \frac{1}{158456325028528675187087900672} + \frac{1}{316912650057057350374175801344} + \frac{1}{633825300114114700748351602688} + \frac{1}{1267650600228229401496703205376} + \frac{1}{2535301200456458802993406410752} + \frac{1}{5070602400912917605986812821504} + \frac{1}{10141204801825835211973625643008} + \frac{1}{20282409603651670423947251286016} + \frac{1}{40564819207303340847894502572032} + \frac{1}{81129638414606681695789005144064} + \frac{1}{162259276829213363391578010288128} + \frac{1}{324518553658426726783156020576256} + \frac{1}{649037107316853453566312041152512} + \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} + \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} + \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} + \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} + \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} + \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} + \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} + \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} + \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} + \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} + \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} + \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} + \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} + \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} + \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} + \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} + \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} + \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} + \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} + \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} + \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} + \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} + \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} + \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} + \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} + \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} + \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} + \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} + \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} + \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} + \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} + \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} + \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} + \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} + \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} + \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} + \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} + \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} + \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} + \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} + \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} + \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} + \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} + \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} + \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} + \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} + \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} + \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} + \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} + \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} + \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} + \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} + \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} + \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} + \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} + \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} + \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} + \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} + \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} + \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} + \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} + \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} + \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} + \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} + \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} + \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} + \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136} + \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272} + \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544} + \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088} + \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176} + \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352} + \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} + \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408} + \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816} + \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632} + \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264} + \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528} + \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056} + \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112} + \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224} + \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448} + \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896} + \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792} + \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584} + \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168} + \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336} + \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} + \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344} + \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688} + \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376} + \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752} + \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504} + \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008} + \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016} + \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032} + \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064} + \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128} + \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256} + \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512} + \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024} + \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048} + \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096} + \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192} + \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384} + \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768} + \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536} + \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072} + \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144} + \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288} + \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576} + \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152} + \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304} + \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608} + \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216} + \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432} + \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864} + \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728} + \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456} + \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912} + \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824} + \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648} + \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296} + \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592} + \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184} + \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368} + \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736} + \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472} + \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944} + \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888} + \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776} + \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552} + \frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104} + \frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208} + \frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416} + \frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832} + \frac{1}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664} + \frac{1}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328} + \frac{1}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656} + \frac{1}{904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312} + \frac{1}{1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624} + \frac{1}{3618502788666131106986593$$

مجموع این سری هم باز بی‌نهایت می‌شود (یک میلیون در میان یا یک میلیارد در میان یا ... هم انتخاب کنید، باز جمعشان بی‌نهایت می‌شود!).

ولی وقتی این‌طوری حذف کنیم: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$

جمع اعداد باقی‌مانده بی‌نهایت که هیچ، حتی بیشتر از ۲ هم نمی‌شود! من دارم فکر می‌کنم که چه تفاوتی بین این دو نوع حذف کردن وجود دارد. چه قاعده‌ی جدیدی در این مورد آخر وارد بازی می‌شوند؟ تر خودت تفاوت بین این دو حالت را فهمیده‌ای؟

گفت: «آره»

گفتم: «می‌توانی آن را به زبان ساده (منطقی) و نه در قالب فرمول‌های قلمبه سلمبه‌ی ریاضی بیان کنی تا من بهتر بفهمم؟»

کمی فکر کرد و گفت: «الان نه؛ این‌طوری که تو می‌خواهی الان نمی‌توانم. بگذار بیشتر فکر کنم.»
خودم هم شروع کردم به فکر کردن. گفتم: «بین، در هر دو مورد، اعداد انتهایی زنجیره به سمت بی‌نهایت کوچک شدن می‌روند. ولی تفاوت این دو حالت در قانون حرکت یا قاعده‌ی حرکت برای انتخاب اعداد است. اگر هنگام حذف اعداد از سری هارمونیک و انتخاب یک سری اعداد برای تشکیل سری جدید، قدم‌هایت یکنواخت باشد، انگار مشکلی پیش نمی‌آید و جمع اعداد باقی‌مانده باز هم بی‌نهایت می‌شود (حتی اگر قدم‌هایت را برای انتخاب اعداد سری جدید خیلی گنده‌گنده مثلاً هزارتا هزارتا، یک میلیون تا یک میلیون تا یا ... برداری!) اما در آن مثال دیگر، قدم‌های ما نیز در انتخاب اعداد سری جدید به صورت تصاعدی گنده‌تر می‌شود. از $\frac{1}{4}$ به $\frac{1}{3}$ فقط یک پرش کوچک کرده‌ایم (و $\frac{1}{3}$ را جا انداخته‌ایم)، بعد یک قدم گنده‌تر باید برداریم (یعنی برای حرکت از $\frac{1}{4}$ به $\frac{1}{8}$ ، از روی $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{7}$ پریده‌ایم) و همین‌طور در هر بار، قدم ما به صورت تصاعدی گنده‌تر می‌شود (ضمن این که امیدوارم تا آخر مسیر، برای هیچ بخشی از شلووارمان اتساق خاصی نیفتد!)، و این برای من جالب است. انگار اصلاً مهم نیست که اعدادی که انتخاب می‌کنی خودشان چه قدر کوچک باشند! این مهم است که قاعده‌ی انتخاب آن‌ها چگونه باشد، به عبارت دیگر، مهم این است که قاعده‌ی حاکم بر نوع کوچک شدن آن‌ها چگونه باشد. کوچک شدن اعداد با سرعت یکنواخت مشکلی ایجاد نمی‌کند، ولی کوچک شدن شتابدار (تصاعدی)، ما را از بازی بی‌نهایت به‌در می‌آورد. فکر می‌کنم باید فرمان را روی این قسمت قضیه متمرکز کنیم.» کمی مکث کردم و ادامه دادم: «انگار قطره‌قطره که جمع گردد وانگهی گاهی هم دریا نمی‌شود! مثل این که بستگی به روش انتخاب اندازه‌ی قطره‌ها هم دارد.»

بعد نگاهی به او انداختم و با مختصری عصبانیت (از نوع دوستانه) گفتم:

«بینم، تو بیکار بودی؟! حالا من امشب تا صبح چه جوری بخوابم؟»

من فکر می‌کنم ریاضیات، همان منطق است که برای تسهیل بیان، در قالب فرمول‌هایی درآمده. ابزار بیان در علم منطق، «جمله» است و به هر زبانی که صحبت کنید، فارسی باشد، انگلیسی، عربی، فرانسه یا ... جملات ظرفیت‌های بسیار محدودی در انتقال مفاهیم ذهنی دارند. اوایلش کار زیاد پیچیده نیست. به سادگی می‌توان گفت: «اجتماع نقیضین محال است.» یا «دو مقدار مساوی با یک مقدار خاص، با یکدیگر مساویند.» ولی از یک حدی که کار پیچیده‌تر شود، برای گفتن یک مفهوم پیچیده‌تر شاید لازم باشد چند صفحه جمله ردیف کنیم و البته تازه معلوم نیست به دلیل ویژگی‌های خاص زبان (مثلاً تعبیر چندگانه از برخی کلمات، یا حتی از نوع جمله‌بندی، یا حتی بر اثر نوع خواندن یا تأکید فشار کلام بر بخشی از جمله که می‌تواند معنا را عوض کند)، در انتها همه‌ی افراد معنای مشترکی را از آن برداشت کنند یا نه. این جاست که زبان ریاضی پدید می‌آید، زبانی که با به کارگیری علائمی یکسان در سطحی جهانی، خود را از قید محدودیت‌های جغرافیایی، فرهنگی و ... می‌رهاند و در عین حال، توانایی انتقال مفاهیمی پیچیده را به کوتاه‌ترین صورت و بدون امکان تفسیرهای متفاوت پدید می‌آورد.

البته قبول دارم که این زبان جدید نسبت به آن زبان معمولی که قبلاً فکرهایمان را از طریق آن با هم تبادل می‌کردیم، خشک‌تر به نظر می‌رسد و قابلیت انعطاف کم‌تری دارد. ولی چه می‌شود کرد؟ خودمان تعمداً آن را این‌طوری کرده‌ایم که بخشی از اشکالات قبلی‌اش را از دست بدهد، و قابلیت‌های جدیدی پیدا کند، تا محمل مناسبی باشد که انتقال مفاهیم پیچیده‌تر را امکان‌پذیر سازد.

اما به نظر می‌آید در سیستم آموزشی ما، به مرور یادمان رفته که این ریاضیات، آینه‌ی تمام‌نمای همان «منطق» است و می‌توان آن را از این منظر نگریست. این فرمول‌های عجیب و غریب و پیچ در پیچ، در بستری شکل می‌گیرند که می‌تواند بستری عینی باشد، و به نظر من تمام هنر یک معلم یا نویسنده‌ی ریاضی در همین نهفته است که بتواند ریاضیات را به گونه‌ای ارائه دهد که مثل بسیاری از علوم دیگر، پدیده‌ای ملموس و برخوردار از تصور عینی و شهودی گردد. تمام سعی شخصی من در مختصر یادگیری شخصی ریاضیات هم که داشته‌ام از این منظر بوده است.

برای آموزش ریاضیات با استفاده از روش «عینی‌سازی» مثالی می‌زنم. سالیانی چند در مراکز استعدادهای درخشان تهران تدریس می‌کردم [اگرچه ماده‌ی درسی‌ام زیست‌شناسی بود، ولی شاید مقداری بیش از نصف وقت کلاس به زیست‌شناسی می‌گذشت، و خیلی وقت‌ها با بچه‌ها سرک می‌کشیدیم به خیلی از شاخه‌های دیگر، حتی شاخه‌های غیر درسی و من به خصوص احساس می‌کردم که وقتی در کلاس سر این موضوع بحث می‌کنیم که «آیا به گدا پول می‌دهید؟ اگر بله چرا و اگر نه چرا؟» بحث بچه‌ها خیلی بیشتر داغ می‌شود تا وقتی مستقیماً راجع به مطالب عبوس کتاب درسی بحث می‌کنیم. حتی خیلی وقت‌ها زنگ تفریح می‌خورد و آن‌ها دوست نداشتند بحث‌شان را نیمه‌کاره رها کنند!] و در کنار ده‌ها مسئله و معما و ... که در طی سال همیشه مطرح می‌شد، این مسئله را هم هر سال برای بچه‌ها طرح می‌کردم:

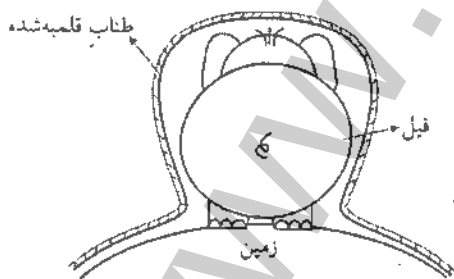
- بچه‌ها. برای حل این مسئله‌ای که مطرح می‌کنم از قلم و کاغذ استفاده نکنید! حتی در ذهنتان از فرمول‌های ریاضی و محاسبه استفاده نکنید، چون حل این مسئله به معلومات دوره‌ی ابتدایی نیاز دارد. نمی‌خواهم پاسخ این مسئله را از راه فرمول نوشتن بدهید. می‌خواهم دید و تصور شهودی‌تان را آزمایش کنم. پس محاسبه ممنوع؛ فقط تصور شهودی!

کره‌ی زمین را به صورت یک کره‌ی کامل هندسی تصور کنید (بدون در نظر گرفتن پستی و بلندی‌ها و ...). من دور خط استوا یک طنابی می‌بندم که طول آن دقیقاً به اندازه‌ی خط استوا باشد. طناب دور کره‌ی زمین قرار می‌گیرد و دو سر طناب، سر به سر به هم می‌رسند. حالا این طناب را باز می‌کنم، می‌روم یک طناب دیگری می‌آورم که ۱۰ متر از طناب قبلی بلندتر باشد. آن را مجدداً دور زمین مثل کمر بند روی خط استوا می‌بندم، ولی این ۱۰ متر اضافی را به صورت کاملاً یکنواخت در تمام محیط استوا، دور کل کره‌ی زمین پخش می‌کنم، به نحوی که دو سر طناب مجدداً سر به سر به یکدیگر برسند و کمر بند جدید باز هم شکل دایره‌ی کامل داشته باشد. طبعاً این کمر بند در تمام نقاط کره‌ی زمین، مقداری شل‌تر از کمر بند قبلی خواهد بود یا به عبارت دیگر، در تمام نقاط زمین مقداری از سطح زمین فاصله خواهد گرفت.

حالا تصور شهودی‌تان را به من بگویید. فکر می‌کنید بزرگ‌ترین جاننداری که بتواند در تمام نقاط زمین از فاصله‌ی بین این طناب و زمین عبور کند، چیست؟ [نخواستم ریاضی‌وار بیرسم که فاصله (ارتفاع) طناب از سطح زمین در تمام محیط استوا چه قدر خواهد شد، پرسیدم بزرگ‌ترین موجود زنده‌ای که می‌تواند از زیر طناب رد شود چیست تا فضای شهودی‌تری ایجاد شود].

یکی از بچه‌های شیطان کلاس از آن آخر کلاس فوری دستش را بلند کرد و گفت:

- «آقا اجازه؛ فیل!»



همه زدند زیر خنده. من هم فوری عکس

مقابل را برایش پای تخته کشیدم و گفتم:

«آخه بابا جون! آگه همه‌ی ۱۰ متر اضافی طنابو

یه جا قلمبه کنی هم، فکر نمی‌کنم برای عبور

یه فیل کافی بشه، چه طوری وقتی همه‌ی

طنابو به صورت یکنواخت در کل محیط کره‌ی

زمین در استوا پخش کنی، انتظار داری یه فیل بتونه در همه‌ی نقاط از زیرش رد شه! [طناب رو حق نداری

بکشی و یه جا قلمبه کنی که!] [ضمناً ببخشید این فیلی که کشیدم پشتش به شماست!]

بعدش بچه‌ها جدی‌تر رفتند توی فکر. پیش‌نهادهای مختلفی از نقاط مختلف کلاس مطرح می‌شد:

- «آقا، باکتری!»

- «مورچه»

- «آقا ویروس هم نمی‌تونه رد شه.»

- «فکر کنم مار بتونه رد شه.»

...

بعدش از بچه‌ها خواستم ابتدا به محاسبه‌ی ساده‌ای که برای به دست آوردن جواب نهایی می‌کنم دقت کنند و بعد بحث را ادامه دهیم:

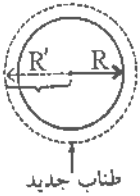
«اگر شعاع زمین را R فرض کنیم، طول طناب اول مان (معادل محیط زمین در ناحیه‌ی استوا) می‌شود:

$$P = 2\pi R \text{ (محیط)}$$

طناب دوم که دایره می‌شود، محیطش 10 متر بیشتر است. یعنی:

$$P' - P = 10 \Rightarrow 2\pi R' - 2\pi R = 10 \Rightarrow 2\pi(R' - R) = 10$$

$$\Rightarrow R' - R = \frac{10}{2\pi} = 1/6$$



$R' - R$ چیست؟ همان مقداری است که طناب در تمام نقاط زمین بالا آمده. ملاحظه می‌کنید که طناب در تمام نقاط زمین حدود یک متر و شصت سانتی‌متر بالا می‌آید. یعنی اغلب شما هم حتی می‌توانید بدون آن که سرتان را چندان خم کنید از زیر آن رد شوید!»
داد و فریاد بچه‌ها رفت به هوا:

- آقا، دارین کلک می‌زنین!

- ممکن نیست همچین اتفاقی بیفته ...

- آقا ما رو گذاشتین سَرِ کار؟

.....

و وسط اون شلوغی، اون وروجکی که اولش گفته بود فیل، دست به سینه در حالی که یک قیافه‌ی حق به جانبی هم گرفته بود می‌گفت:

- من که گفتم فیل! فکر کنم نزدیک‌ترین حدس همون حدس من بود، فقط یه کمی زیاد گفتم!

بچه‌ها رو دعوت به سکوت کردم تا براشون توضیح بدم:

- ببینید، می‌دونید چرا تصور عینی یا شهودی ما این قدر با واقعیت فاصله داره! ریشه‌ش توی آموزش ریاضیه. وقتی توی دبستان می‌خواستن محیط دایره رو به ما آموزش بدن، به هممون گفتن:

محیط دایره = قطر ضرب در عدد پی (یا به عبارت دیگه: $P = 2\pi R$) و وقتی هم پرسیدیم که π چیه؟ گفتند ۳

عدد صحیح و ۱۴ صدم! و ما هم این طوری یاد گرفتیم که شعاع رو ۲ برابر می‌کنیم و ضرب در یک عدد π (۳/۱۴) می‌کنیم [که این عدد π احتمالاً از مریخ آمده!] و محیط دایره به دست می‌آید. داشتیم با خودم فکر می‌کردم که اگه می‌شد محیط دایره رو این طوری به بچه‌های دبستان آموزش می‌دادیم چه اتفاقی می‌افتاد:

- «خوب، بچه‌ها، یاد تونه جلسه‌ی قبل راجع به دایره صحبت کردیم! امروز می‌خوایم یه بازی‌ای کنیم

با این دایره‌هه.»

[معلم شروع می‌کند به باز کردن بند کفشش و آن را در می‌آورد. بچه‌ها هم متعجب دارند نگاه می‌کنند که مبحث دایره و درس ریاضی و این‌ها چه ربطی به بند کفش آقا معلم دارد؟! معلم بند کفشش را که درآورد، یک سر آن را دور یک گچ گره می‌زند، سر دیگر بند کفش را روی تخته می‌گذارد و با انگشت سبابه‌اش آن را در حکم مرکز دایره نگه می‌دارد. حالا بند کفش نقش شعاع یک دایره را ایفا می‌کند. معلم در حالی که گچ متصل به بند کفش را طوری می‌کشد که کشیدگی بند کفش ثابت بماند، یک دایره می‌زند روی تخته!]

- «خوب، حالا به دایره داریم که شعاعش تقریباً اندازه‌ی بند کفش منه، نه؟ من حالا می‌خوام به چیزی رو امتحان کنم. می‌خوام ببینم چند دفعه می‌تونم این بند کفشمو دور این دایره (رو محیط این دایره) بخوابونم!»

[معلم شروع می‌کند. انگار می‌خواهد دور دایره را با بند کفشش متر کند. با هر بار خواباندن بند کفش روی محیط دایره، عددش را هم بلند می‌گوید:]

- یک دو سه

[بچه‌ها با او هم‌آوا می‌شوند و بقیه‌اش را با او می‌شمارند...]

- (دسته جمعی) چهار پنج شش

[او معلم این‌جا اشاره به نقطه‌ای می‌کند که هنگام آغاز شمارش، از آن‌جا راه افتاده بوده‌اند و آن را با گچ علامت گذاشته بود و می‌گوید:]

- آخ! شش بار و به خورده! بند کفشم رو ۶ بار توستم دور دایره بخوابونم، ولی آخرش به نقطه‌ی اول نرسید، به خورده کم آوردم. فکر کنم این دایره‌ش به خورده بزرگ بود، شایدم بند کفشم به خورده کوتاه بود! حالا شماها بباین پای تخته ببینم اگه شما همین کار رو بکنین چندبار می‌تونین بند کفشتونو دور دایره‌تون بخوابونین. مال هر کی بیشتر بشه برنده‌س!

[بچه‌ها دستاشونو بالا می‌برن که داوطلب بشن. معلم چهار-پنج نفر رو هم‌زمان میاره پای تخته. اونا هم همه شروع می‌کنن بند کفشاشونو باز کردن و گچ بستن و دایره‌های بعضی‌شون کوچیک می‌شه، بعضی‌شون بزرگ‌تر و هم‌زمان معلم به بقیه‌ی بچه‌ها هم اشاره می‌کنه که توی دفتراشون با پرگار هر جور دایره‌ای که می‌خوان بکشن تا اونا هم اون‌جا امتحان کنن.]

- ا... آقا، مال ما هم ۶ تا شد، به خورده هم کم اومد باز، یعنی شد ۶ تا و به خورده.

- آقا فکر کنیم مال ما دایره بیشتر می‌شه، آخه دایره‌مون بزرگ‌تره چهار پنج شش و ای بابا، چرا این جوری می‌شه؟ ما هم شش تا و به خورده شدیم.

[یکی از بچه‌ها به گوشه در حالی که سعی می‌کنه کسی متوجه کارش نشه، دایره یواشکی دو تا بند کفشاشو سر هم می‌کنه و گره می‌زنه که درازتر بشه، بعد به دایره‌ی خیلی بزرگ می‌کشه، می‌خوابونه، می‌شمیره، ولی معلم در حالی که وانمود می‌کنه اونو تازه الان دیده ازش می‌پرسه:]

- خوب، مال تو چه طوری شد باباجون؟

[در حالی که لب و لوجه‌ش آویزونه جواب می‌ده]

- همون شیش تا و خورده‌ای شد آقا!

- آفرین بچه‌های گلم، پس همه‌تون برنده شدین! حالا لطفاً برین بشینین. خوب بچه‌ها، من این که هر دایره‌ای بکشین، شعا‌ش رو ۶ دفعه و یه خورده می‌تونین دورش بخوابونین. حالا می‌خواد دایره‌ش بزرگ باشه یا کوچیک، انگار فرقی نمی‌کنه، چون وقتی دایره‌ای بزرگ‌تره، شعا‌ش هم به همون نسبت بزرگ‌تره. حالا یه سؤالی دارم. به نظرتون اگه بعد از این‌که با یه بند کفش دایره‌مون رو کشیدیم، دو تا بند کفشمونو به هم ببندیم، چند بار می‌تونیم این بند دوبله رو دور دایره بخوابونیمش؟

یکی از بچه‌ها تیز دستش رو بلند کرد، منتظر اجازه هم نمودن اصلاً:

- آقا، ۳ دفعه و یه خورده‌ای! چون بند کفشمون ۲ برابر شده.

- بچه‌ها، پس می‌خوام این طوری بنویسم:

قطر $\times 3 =$ خورده‌ای = محیط دایره

حالا دانشمندها چون عادت دارن حرف‌های ساده رو به صورت قلمبه سلمبه بزنن، برای این 3 و خورده‌ای به اسم گذاشتن؛ عدد پی! و این طوری هم نشونش می‌دن: π ، خورده‌ش رو هم حساب کردن، شده 14 صدم. پس:

قطر $\times \pi =$ محیط دایره یا این‌که: (شعاع $\times 2$) $\times \pi =$ محیط دایره

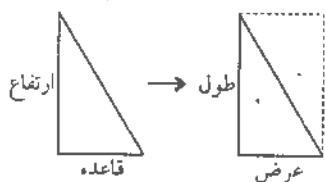
فکر می‌کنین بچه‌هایی که از دوره‌ی دبستان، از همون موقع که ذهنیت‌های ابتدایی‌شون راجع به پدیده‌های اطرافشون داره شکل می‌گیره، این‌طوری با محیط دایره آشنا بشن، همین‌قدر اشتباه می‌کنن که ما کردیم؟ اگه ذهن از همون ابتدا با آموزش عینی آشنا بشه و سال‌های بعدی رو با اون نوع نگاه پایه‌ای رشد کنه، پدیده‌ها خیلی براش ملموس‌تر می‌شن. بچه‌ای که این‌طوری محیط دایره رو یاد گرفته، با شنیدن مسئله‌ی کمره‌ی زمین ما به سادگی با خودش فکر می‌کنه که شعاع جدید، بایستی اون‌قدری اضافه شده باشه که بتونه سوی حدود ۶ بار خوابونده شدن روی محیط جدید، ۱۰ متر اضافه شده به محیط دایره رو جبران کنه. این نوع نگاه خیلی بیش‌تر از جنس حقیقته. با یک نگاه خشک ریاضی، برای این مسئله می‌شه گفت که اگر مقدار اضافه شده به طول طناب را با R نشون بدیم، افزایش ارتفاع طناب از سطح زمین $(R' - R)$ همواره این‌گونه خواهد بود:

$$R' - R = \frac{L}{\sqrt{\pi}}$$

معلم ریاضی‌ها می‌گویند، این مقدار افزایش ارتفاع $(\frac{L}{\pi})$ ، مستقل از شعاع است. یعنی مهم نیست شعاع کره‌ای که باهاش این بازی رو در می‌آریم چقدر باشه. اگه بایک تیلوی کوچیک هم همین کار را می‌کردیم (یعنی نخ‌

دور استواش می‌پیچیدیم و بعد ۱۰ متر به آن اضافه می‌کردیم و ...، نخ جدید باز هم همان حدود ۱/۶۰ متر از سطح تپله فاصله می‌گرفت. این «مستقل از شعاع» بودن برای بچه‌ای که اون تمرین‌ها رو با بند کفشش پای تخته کرده باشه، یه عبارت قلمبه سلبمه نیست، اما برای ما هست! برای اون بچه، عدد π از مریخ نیومده، برای ما اومده. یادم هست، وقتی توی دبستان می‌خواستن مساحت مثلث رو به ما یاد بدن بهمون گفتن:

مساحت مثلث = قاعده $\times$ نصف ارتفاع!



ما هم همگی حفظ کردیم، کلی هم مسئله باهاش حل کردیم. ولی شاید اگر اون موقع معلم ما خیلی ساده، شکل رویرو رو برامون می‌کشید و با یه توضیح ساده، خطوط نقطه‌چین مقابل رو بهش اضافه می‌کرد، می‌نوشت بگه:

- بچه‌ها ببینین، ارتفاع و قاعده‌ی این مثلث شما، در واقع طول و عرض یه مستطیلی هستن که خودشو از چشم شما قایم کرده بوده! اگه اونو رو توی هم ضرب کنین، چی به دست می‌آد؟
بچه‌ها هم دسته جمعی می‌گفتن:

- مساحت مستطیل

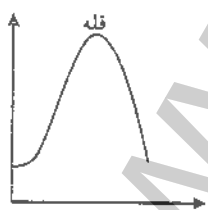
- خوب، به نظر شما اون مثلثه چه قده از مستطیله؟

- نصفه‌شه.

- خوب، حالا اگه بخواین مساحت مثلث رو حساب کنین چه کار می‌کنین؟

یکی از بچه‌ها زودی جواب می‌ده!

- «قاعده رو ضرب در ارتفاع می‌کنیم، می‌شه مساحت اون مستطیله، اون وقت نصفش می‌کنیم، می‌شه اون مثلثه!»^۲



برخلاف تصور برخی از اهل فن ریاضی، من معتقدم حتی بسیاری از مطالب به ظاهر پیچیده‌تر ریاضی، قابلیت ساده‌سازی و آموزش به همین روش را دارند. من وقتی می‌خواندم که برای به دست آوردن نقطه‌ی max یا نقطه‌ی min در منحنی یک تابع، از آن مشتق می‌گیرند و آن را برابر صفر قرار می‌دهند، با خودم این‌طور فکر می‌کردم:

- ۱ - البته برای تسهیل آموزش و عینی‌سازی، تمعداً مثلث قائم‌الزاویه انتخاب شده. اگر مثلث از نوع دیگری باشد، عین همین استدلال را می‌شود با یک متوازی‌الاضلاع کرد، ولی دیگر برای بچه‌ی دبستان سنگین می‌شود! از نظر من، استفاده از یک حالت خاص برای شهودی کردن و راحت‌تر کردن درک مخاطب اشکالی ندارد که هیچ، خیلی هم خوب است!
- ۲ - دکتر اسلامی چند لحظه قبل از فرستادن این کتاب به چاپخانه به من گوشزد کرد که الان تو کتابای درسی دارند مساحت مثلث رو همین‌جوری یاد بچه‌ها می‌دهند! خوب، ما هم خوشحال شدیم!

وقتی داری از یک کوه بالا می‌روی، به ازای هر متر جابه‌جایی افقی‌ات، ارتفاعت هم زیادتر می‌شود. جاهایی که شیب کوه زیاد باشد، با هر متر جابه‌جایی افقی، ارتفاعت زیادتر (با شدت بیشتری) زیادتر می‌شود و باید بیشتر زور بزنی برای بالا رفتن، هم مشتت زیادی دارد، هم مشتق زیادی دارد! (مگر مفهوم مشتق (یعنی میزان تغییر ارتفاع به ازای یک واحد جابه‌جایی افقی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (تغییر ارتفاع) (جابه‌جایی افقی)) غیر از این است؟^۱ یعنی مثلاً به ازای یک متر جابه‌جایی افقی، اگر ۲ متر ارتفاعت زیاد شد، مشتقت ۲ است، اگر ۳ متر ارتفاعت زیاد شد، مشتقت ۳ است، اگر اصلاً ارتفاعت زیاد نشد، مشتقت صفر است، اگر ارتفاعت ۲ متر کم شد، مشتقت ۲- است. این حرف‌ها سخت است؟! باور کنید، من فکر می‌کنم مفاهیم بنیادین مشتق را حتی می‌توان به سادگی به بچه‌های دوره‌ی راهنمایی هم آموزش داد؛ بستگی دارد چه جوری بهشان بگویی!، اما در اوایل حرکت از پای همان کوه، در دامنه‌ی کوه که شیب زیاد نیست، با هر متر جلو رفتن در راستای افق، ارتفاعت خیلی زیاد نمی‌شود. این جا مشتق کم است.

حالا، اگر چشمان من را ببندند و بگویند از کوه صفحه‌ی قبل برو بالا، از کجا می‌توانم بفهمم که به قله رسیده‌ام؟ قله آن‌جایی خواهد بود که وقتی به آن رسیدم، اگر یک فسیلون^۲ به جلو یا عقب قدم بردارم، احساس تغییر ارتفاع نمی‌کنم اصلاً [شماها می‌گویید $(dy) \Delta y$ در این جا صفر است، پس مشتق صفر است.]. البته اگر قدم را بزرگ‌تر بردارم ممکن است از آن طرف کله ملق [همان کله معلق!] شوم و زخم و ذیلی (همان زخم و ذلیل!) برسم پایین.

حتی درباره‌ی نقطه‌ی عطف یک تابع، که برای به دست آوردن آن، مشتق دوم تابع را برابر با صفر قرار می‌دادیم، با خودم فکر می‌کردم که مثلاً در شکل مقابل، هنگام طی مسیر از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B، وقتی دارم از نقطه‌ی A



به سوی نقطه‌ی عطف حرکت می‌کنم، اول‌ها شیب کم است، مثلاً با هر واحد

قدم افقی، اولش ۱ متر می‌آیم بالا، بعد شیب تندتر می‌شود، با هر قدم افقی ۲

متر می‌آیم بالا، بعد ۳ متر، بعد ۴ متر، اما نوری این شکل، این‌طوری نیست که تا

قیامت، هی شیب زیاد شود. از یک جایی دوباره باید شیب شروع کند به کم

شدن، مثلاً تغییر ارتفاع به ازای هر واحد قدم افقی دوباره بشود ۳ متر، بعد ۲

متر، بعد ۱ متر و آهان، رسیدیم به یه جایی که می‌شه استراحت کرد (نقطه‌ی B) در طی این مسیر، نکته خود تغییرات ارتفاع نیست (چون به هر حال ارتفاع از A تا B دائم داشته زیاد می‌شده)، بلکه تغییرات تغییرات ارتفاع است! یعنی این‌جا، افزایش ارتفاع که مثلاً اوایل بود ۱، بعد بود ۲، بعد بود ۳، بعد ۴، یک جایی باید متوقف

۱ - البته اولش که می‌خواهیم مفهوم را جا بیندازیم، بحث $\Delta x \rightarrow 0$ را مطرح نمی‌کنیم. اول می‌گذاریم مطلب به کم نوی ذهن شنونده خیس بخورد! بعد که یک تصور اولیه پیدا کرد، می‌رویم سراغ بحث Δx و فرق آن با dx و این حرف‌ها.

۲ - جایگزین فارسی برای اپسیلون: یعنی خیلی کم!

دستگاه اعداد

فصل اول

آموزش	۲
پاسخ‌های تست‌های آموزش	۲۳
تمرین	۳۹
پاسخ‌های تست‌های تمرین	۵۱
آزمون	۸۰
پاسخ‌های تست‌های آزمون	۸۳

دنباله و سری

فصل دوم

آموزش	۸۹
پاسخ‌های تست‌های آموزش	۱۲۱
تمرین	۱۴۹
پاسخ‌های تست‌های تمرین	۱۶۲
آزمون	۱۸۹
پاسخ‌های تست‌های آزمون	۱۹۳

حد و پیوستگی و مجانب

فصل سوم

آموزش	۲۰۰
پاسخ‌های تست‌های آموزش	۲۳۷
تمرین	۲۸۲
پاسخ‌های تست‌های تمرین	۳۱۲
آزمون ۱	۳۷۱
پاسخ‌های تست‌های آزمون ۱	۳۷۴
آزمون ۲	۳۸۰
پاسخ‌های تست‌های آزمون ۲	۳۸۴

مشتق

فصل چهارم

آموزش	۳۹۱
پاسخ‌های تست‌های آموزش	۴۳۱
تمرین	۴۶۶
پاسخ‌های تست‌های تمرین	۴۸۵
آزمون	۵۲۴
پاسخ‌های تست‌های آزمون	۵۲۸