

# طراحی و ساخت دست‌سازه‌های جبری

(ویژه دبیران ریاضی دبیرستان و پیش‌دانشگاهی)

قاسم تیموری

پاییز ۱۳۸۸

سرشناسه: تیموری، قاسم، ۱۳۴۵ - عنوان و نام پدیدآور: طراحی و ساخت دست‌سازه‌های جبری (ویژه دبیران ریاضی و پیش‌دانشگاهی) / قاسم تیموری- مشخصات نشر: تهران: وزارت آموزش و پرورش، معاونت پرورشی و تربیت‌بدنی، مؤسسه فرهنگی منادی تربیت، ۱۳۸۸. مشخصات ظاهری: ۲۸۰ص: مصور، جدول، نمودار (بخشی رنگی). شابک: ۴-۷۵۸-۳۴۸-۹۶۴-۹۷۸ وضعیت فهرستنویسی: فیبا یادداشت: کتاب‌نامه: ص ۲۵۰. موضوع: جبر - راهنمای آموزشی (متوسطه) موضوع: جبر - مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه) موضوع: تدریس - ابزار و وسایل شناسه افزوده: ایران. وزارت آموزش و پرورش. مؤسسه فرهنگی منادی تربیت رده‌بندی کنگره: ۱۳۸۸ QA1۵۷/ت۹۵۵۶۴ رده‌بندی دیویی: ۵۱۲/۹۰۰۷۶ شماره کتابشناسی ملی: ۱۸۶۰۴۱۴



## طراحی و ساخت دست‌سازه‌های جبری «ویژه دبیران ریاضی دبیرستان و پیش‌دانشگاهی»

مؤلف: قاسم تیموری

طراح جلد: احمد قائمی مهدوی

حروفچینی و صفحه‌آرایی: مؤسسه بهار

لینوگرافی، چاپ و صحافی: کانون چاپ

چاپ اول: ۱۳۸۸

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

قیمت: ۲۵۰۰۰ ریال

ISBN 978-964-348-758-4

شابک: ۴-۷۵۸-۳۴۸-۹۶۴-۹۷۸

Email: info@monadi.org

WWW.monadi.org

تهران، خیابان استاد نجات‌اللهی، بین چهارراه سمیه و طالقانی، کوچه بیمه، پلاک ۲۶

تلفن فروشگاه: ۸۸۹۳۱۸۵۲

تلفن پخش: ۸۸۸۹۴۲۹۲

نماینر: ۸۸۸۹۴۲۹۰

## فهرست

|    |                                                          |
|----|----------------------------------------------------------|
| ۱۱ | مقدمه                                                    |
| ۱۳ | فصل ۱ - طراحی دست سازه ها و به کارگیری آنها در تدریس     |
| ۱۵ | انواع استدلال های ریاضی                                  |
| ۲۵ | منطق حاکم بر ساخت دست سازه ها و به کارگیری آنها در تدریس |
| ۲۷ | مراحل اصلی حل مسأله                                      |
| ۳۴ | نقش آشنایی با اشتباهات رایج در ساخت دست سازه             |
| ۳۹ | نقش تعابیر هندسی در ساخت دست سازه ها                     |
| ۴۳ | مراحل ساخت دست سازه ها                                   |
| ۴۹ | چگونه از دست سازه ها هنگام تدریس استفاده کنیم؟           |

|    |                                                       |
|----|-------------------------------------------------------|
| ۵۶ | علت انتخاب طلق و مقوا برای ساخت دست‌سازه.....         |
| ۵۷ | روش‌های استفاده از طلق و مقوا برای ساخت دست‌سازه..... |
| ۶۳ | قراردادها و توصیه‌ها.....                             |

## فصل ۲- روش ساخت دست‌سازه‌های جبری..... ۶۹

### دست‌سازه‌های مربوط به سال اول دبیرستان..... ۷۱

#### ۱- تعبیر هندسی اتحادها..... ۷۱

#### ۲- قاعده حذف در ضرب اعداد..... ۷۷

#### ۳- مقایسه میانگین حسابی و هندسی..... ۷۸

#### ۴- مختصات وسط پاره خط..... ۸۰

#### ۵- شیب خط..... ۸۱

#### ۶- کسرهای مساوی..... ۸۵

#### ۷- شیب دو خط موازی..... ۸۶

#### ۸- شیب خط عمود بر یک خط..... ۸۷

#### ۹- اندازه زاویه بر حسب رادیان..... ۹۰

#### ۱۰- سینوس و کسینوس زوایای مختلف در دایره مثلثاتی..... ۹۲

#### ۱۱- تانژانت و کتانژانت زوایای مختلف در دایره مثلثاتی..... ۹۴

#### ۱۲- نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه..... ۹۵

#### ۱۳- نسبت‌های مثلثاتی در صفحه..... ۹۶

#### ۱۴- اتحاد $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$ ..... ۹۸

#### ۱۵- نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه، متمم و مکمل..... ۹۹

#### ۱۶- یافتن ریشه‌های معادله درجه دوم از طریق رسم..... ۱۰۱

#### ۱۷- یافتن ریشه‌های معادله درجه دوم از طریق مربع کامل کردن..... ۱۰۵

دست‌سازه‌های مربوط به سال دوم دبیرستان ..... ۱۰۷

۱۸ - تعیین علامت عبارت از درجه اول ..... ۱۰۷

۱۹ - تعیین علامت عبارت از درجه دوم ..... ۱۰۹

۲۰ - تعیین علامت عبارت  $x^2 \pm a^2$  ..... ۱۱۱

۲۱ - انتقال محورها و قرینه‌یابی ..... ۱۱۲

۲۲ - تساوی دو بردار ..... ۱۱۴

۲۳ - ضرب عدد در بردار ..... ۱۱۵

۲۴ - خاصیت شرکت‌پذیری جمع بردارها ..... ۱۱۶

۲۵ - تجزیه یک بردار به دو بردار ..... ۱۱۷

۲۶ - اتحاد  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  ..... ۱۱۸

دست‌سازه‌های مربوط به حسابان ..... ۱۲۰

۲۷ - رسم نمودار انواع توابع ..... ۱۲۰

۲۸ - نمودار معکوس یک تابع ..... ۱۲۵

۲۹ - خواص تابع  $y = [x]$  ..... ۱۲۹

۳۰ - خواص تابع  $y = |x|$  ..... ۱۳۱

۳۱ - رسم نمودار توابع  $f(x \pm a)$  و  $f(ax)$  و  $af(x)$  بر حسب نمودار

تابع  $f(x)$  ..... ۱۳۲

۳۲ - دامنه و برد ترکیب دو تابع  $I$  و  $f$  ..... ۱۳۴

۳۳ - دامنه و برد ترکیب دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  ..... ۱۳۶

۳۴ - دامنه و برد ترکیب دو تابع  $f$  و  $g$  ..... ۱۳۹

۳۵ - نمودار تابع فرد و زوج ..... ۱۴۱

۳۶ - نمودار تابع متناوب ..... ۱۴۳

- ۳۷- معکوس یک عدد ..... ۱۴۵
- ۳۸- هم‌ارزی‌های حدی ..... ۱۴۶
- ۳۹- قضیه فشار (ساندویچی) ..... ۱۴۸
- ۴۰- تعبیر هندسی مشتق تابع ..... ۱۴۹
- ۴۱- تابع صعودی و نزولی ..... ۱۵۶
- ۴۲- بیشترین مقدار حاصل ضرب دو متغیر با مجموع ثابت ..... ۱۵۹
- ۴۳- کمترین مقدار مجموع دو متغیر با حاصل ضرب ثابت ..... ۱۶۱
- ۴۴- ماکزیمم مساحت متوازی‌الاضلاع‌ها با محیط ثابت ..... ۱۶۲
- ۴۵- ماکزیمم مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه با وتر ثابت ..... ۱۶۳
- ۴۶- مرکز تقارن تابع درجه سوم ..... ۱۶۵
- ۴۷- مستطیل حاصل از نقاط اکسترمم تابع  $y = x^3 - 3x^2$  ..... ۱۶۶
- ۴۸- مرکز تقارن تابع هموگرافیک ..... ۱۶۷
- دست‌سازه‌های مربوط به حساب انتگرال و دیفرانسیل ..... ۱۷۰
- ۴۹- کران‌های بالا و پایین یک مجموعه ..... ۱۷۰
- ۵۰- تعریف ریاضی حد ..... ۱۷۱
- ۵۱- قضایای مقدار میانگین، مقدار میانی و رول ..... ۱۷۳
- ۵۲- مشتق معکوس یک تابع ..... ۱۷۶
- ۵۳- ماکزیمم مجموع دو متغیر با مجموع مربعات ثابت ..... ۱۷۸
- ۵۴- کمترین فاصله مبدأ از یک خط ..... ۱۷۹
- ۵۵- انواع مجانب‌ها ..... ۱۸۱
- ۵۶- مجانب‌های توابع  $y = \frac{1}{x}$  و  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$  ..... ۱۸۲
- ۵۷- قاطع رسم شده بر مجانب‌ها و منحنی  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'}$  ..... ۱۸۴

- ۵۸- مجموع بالایی و پایینی برای محاسبه سطح زیر منحنی ..... ۱۸۵
- ۵۹- انتگرال تابع زوج و فرد ..... ۱۸۷
- ۶۰- قرینه سطح زیر منحنی نسبت به محور  $y$ ها و انتقال آن در امتداد محور  $x$ ها ..... ۱۸۹
- ۶۱- سطح محصور بین دو منحنی ..... ۱۹۰
- دست سازه‌های مربوط به جبر و احتمال ..... ۱۹۲
- ۶۲- اصل لانه کبوتری ..... ۱۹۲
- ۶۳- ترکیب مجموعه‌ها ..... ۱۹۳
- ۶۴- قوانین جذب در مجموعه‌ها ..... ۱۹۸
- ۶۵- حاصل ضرب دکارتی  $A \times A$  ..... ۱۹۹
- ۶۶- تعداد اعضای  $A^2 \cap B^2$  ..... ۲۰۰
- ۶۷- متمم حاصل ضرب دکارتی ..... ۲۰۱
- ۶۸- رابطه هم‌ارزی روی مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$  ..... ۲۰۲
- ۶۹- رابطه پاد متقارن ..... ۲۰۴
- ۷۰- کلاس هم‌ارزی  $[(a, b)]$  ..... ۲۰۵
- ۷۱- تعداد صفرهای جلوی عدد  $256!$  ..... ۲۰۷
- ۷۲- تعبیر هندسی  $\binom{n}{r}$  و  $p(n, r)$  ..... ۲۰۸
- ۷۳- تعبیر هندسی  $\binom{n}{r}$  و  $p(n, r)$  ..... ۲۰۱۱
- ۷۴- احتمال ..... ۲۱۱

دست سازه‌های مربوط به ریاضیات گسسته ..... ۲۱۴

۷۵- نامعادله  $\delta \leq \frac{29}{p} \leq \Delta$  در گرافها ..... ۲۱۴

۷۶- بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ..... ۲۱۶

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| ۷۷ - مبناهای مختلف                                   | ۲۱۸ |
| ۷۸ - شمارش تعداد رابطه‌های منعکس، متقارن و پادمتقارن | ۲۲۰ |
| ۷۹ - افراز مجموعه اعداد صحیح به ۳ مجموعه             | ۲۲۳ |
| ۸۰ - افراز مجموعه $Z \times Z$ به ۳ مجموعه           | ۲۲۶ |
|                                                      |     |
| دست‌سازه‌های مربوط به هندسه تحلیلی                   | ۲۲۹ |
| ۸۱ - خط و صفحه در فضای $R^3$                         | ۲۲۹ |
| ۸۲ - نمایش مقاطع مخروطی با اشعه لیزر                 | ۲۳۲ |
| ۸۳ - تعریف بیضی                                      | ۲۳۴ |
| ۸۴ - تعریف هذلولی                                    | ۲۳۹ |
| ۸۵ - مرکز تقارن تابع هموگرافیک $y = \frac{1}{x}$     | ۲۳۸ |
| ۸۶ - تعریف سهمی                                      | ۲۴۰ |
| ۸۷ - خاصیت خط هادی سهمی                              | ۲۴۱ |
| ۸۸ - تعبیر هندسی دترمینان ماتریس از مرتبه ۲          | ۲۴۲ |
| ۸۹ - دستگاه دو معادله دومجهولی                       | ۲۴۵ |
| ۹۰ - دستگاه سه معادله سه مجهولی                      | ۲۴۸ |
|                                                      |     |
| منابع                                                | ۲۵۰ |
| پیوست                                                | ۲۵۱ |
| عکس رنگی دست‌سازه‌ها                                 | ۲۶۹ |

## مقدمه

بعد از تألیف کتاب «طراحی و ساخت دست‌سازه‌های هندسی با پلک و مقوا» برای درس هندسه ۱ و ۲ دبیرستان و استقبال بسیاری از دبیران، جای خالی کتابی در مورد نحوه ساخت دست‌سازه‌های جبری دوره دبیرستان (به صورت طبقه‌بندی شده) به خوبی احساس می‌شد. ساخت دست‌سازه‌های جبری به چند دلیل مشکل‌تر از ساخت دست‌سازه‌های هندسی است. زیرا، اغلب مطالب هندسی دارای تعبیر هندسی واقعی (با نمایش منحصر به فرد) هستند و خطوط به کار رفته در آنها از نوع خط راست یا منحنی‌های ساده می‌باشند. به همین دلیل رسم دقیق نمودار آنها (مانند مثلث، مربع، متوازی‌الاضلاع و دایره و مستطیل) با ابزارهای معمولی رسم قابل انجام است. در حالی که تعبیر هندسی بسیاری از مطالب جبری از نوع ساختگی با نمایش‌های متفاوت می‌باشند. رسم دقیق منحنی‌های آنها با ابزارهای معمولی به سادگی قابل رسم نیستند.

مطالب این کتاب حاصل تحقیقات، تجربیات و کار گروهی نویسنده (مدرس ریاضی) و دانشجو معلمان رشته ریاضی است که در کارگاه ساخت دست‌سازه‌های

ریاضی واقع در مرکز تربیت معلم شهید باهنر تهران جمع‌آوری شده است. این کتاب فاقد منبع خاصی می‌باشد و چون در این زمینه کمتر کتاب مورد قبول همگان وجود دارد، لذا بعضی از نمادها و نام‌گذاری ذکر شده در آن جنبه قراردادهای شخصی دارند.

برای سهولت ساخت مجدد هر دست‌سازه، علاوه بر مواد لازم و شرح مراحل ساخت و نقشه‌های تکمیلی، عکس رنگی هر دست‌سازه نیز در آخر کتاب آورده شده است. اعداد درج شده در زیر هر عکس با شماره دست‌سازه‌هایی که در متن کتاب ذکر شده یکسان می‌باشد.

از آنجایی که رسم دقیق نمودار بعضی از مطالب جبری با ابزارهای معمولی رسم مشکل می‌باشد، لذا در قسمت ضمیمه نمودار بعضی از آنها آورده شده است.

در ساخت دست‌سازه‌های ریاضی افرادی موفق‌تر هستند که هم با رسم دقیق نمودارها به کمک ابزارهای رسم و خواص ریاضی آنها آشنا باشند و هم با مفاهیم و قوانین ریاضی و نمودار مربوط به آنها (در صورت وجود)، روش حل مسأله و انواع استدلال‌های ریاضی آشنا باشند. به همین دلیل، فصل اول این کتاب بیشتر به آشنایی اجمالی خواننده با مطالب بالا، اختصاص داده شده. امید است دبیران توانمند ریاضی با واگذاری ساخت دست‌سازه‌های این کتاب به دانش‌آموزان و به کارگیری آنها در تدریس بتوانند هم سطح یادگیری دانش‌آموزان را حداقل از سطح دانش به درک و فهم ارتقاء دهند و هم یادگیری در دانش‌آموزان را سریع‌تر و عمیق‌تر نمایند.