

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی پیشرفته (جلد اول)

تألیف

علی اصغر سصیری

علی صادقیه



۱۳۹۵

«الف»

سرشناسه	: عنصری، علی اصغر، ۱۳۴۲ -
عنوان و نام پدیدآور	: ریاضی مهندسی پیشرفته/ تالیف علی اصغر عنصری، علی صادقیه.
مشخصات نشر	: یزد: دانشگاه آزاد اسلامی، واحد یزد، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	: ۲ جلد: مصور.
شابک	: ۳۳۰۰۰۰ ریال: دوره: ۳-۴۱۱۵-۱۰-۹۶۴-۹۷۸-۶-۳۹۴۲-۱۰-۹۴۶-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
یادداشت	: کتابنامه.
موضوع	: ریاضیات مهندسی -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: Engineering mathematics -- Study and teaching (Higher)
موضوع	: ریاضیات مهندسی -- آزمون ها و تمرین ها (عالی)
موضوع	: Engineering mathematics -- Examinations, questions, etc. (Higher)
شناسه افزوده	: علی صادقیه، علی، ۱۳۴۳ -
شناسه افزوده	: دانشگاه آزاد اسلامی واحد یزد.
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۵ ۹/ع/۳۳۲/TA۵
رده بندی دیویی	: ۰۰۱۵۱/۶۲۰
شماره کتابشناسی ملی	: ۱۵۵۶۲



ریاضی مهندسی پیشرفته (جلد اول)

نویسندگان	: علی اصغر عنصری، علی صادقی
ناشر	: انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی
ناظر چاپ	: حمید صادقی، اسماعیل ثقفی
ویراستار ادبی	: محمدجعفر گلوردی
نوبت چاپ	: اول ۱۳۹۵
شمارگان	: ۲۰۰۰ نسخه

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: سازمان چاپ و انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی

طرح جلد	: محسن اقبالی
صفحه آرایی	: محمدمهدی صادقی نژاد
قیمت	: ۳۳۰۰۰۰ ریال
شابک	: ۹۷۸-۹۴۶-۱۰-۳۹۴۲-۶
	ISBN: 978-964-10-3942-6

انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد یزد

E-mail: entesharat_elmi@iauyazd.ac.ir

یزد- صفاییه- دانشگاه آزاد اسلامی- انتشارات ۰۳۵-۳۸۲۱۴۸۱۳-۳۱۸۷۲۲۸۰

حق چاپ برای دانشگاه آزاد اسلامی واحد یزد محفوظ است.

تلفن مرکز بخش: ۰۳۵-۳۸۲۱۴۸۱۳-۳۱۸۷۲۲۸۰

بسمه تعالی

هدف از درس ریاضیات مهندسی عرضه روش‌های نیرومند ریاضی و محاسباتی با روایی مشخص برای حل مسائل با پیچیدگی زیاد در مطالعات سیستمی یا فرایندهای پیچیده در شرایط فیزیکی مختلف و حتی غیرعادی و در مواردی با ویژگی‌های نامتعارف است. همواره روند کلی مشخص وجود دارد ولی پیش‌بینی جزئیات دشوار است لذا دانشجویان در همه مراحل حل مسائل نیاز است اطلاعات اساسی از اصول بنیادی و نتایج ریاضی و نیز درک روشنی از اینکه ریاضیات مهندسی چیست داشته باشند تا در روند مطالعه و طراحی مهندسی به کارگیری روش‌های فوق عملی گردد. به‌طور کلی هدف از درس ریاضی مهندسی، آشنایی ذهن مهندسان با روش‌های تفکر ریاضی با دیدگاه مهندسی است تا بدین وسیله باز به استفاده از روش‌های ریاضی در راستای حل مسائل مهندسی تشخیص داده شود. رکن مطالب درس ریاضی مهندسی به گونه‌ای است که یک نظام‌مندی در علم ریاضی به پایه تبادلاً نسبتاً کمی از مفهومات بنیادی بنا داده می‌شود و با ارائه اصول وحدت‌بخش توانمند، یک شناخت روشن از ارتباط متقابل بین نظریه‌ها، محاسبات و آزمایشات به دست می‌آید. مجموعه‌ای که به پیشگاه علاقه‌مندان تقدیم می‌شود حاصل تلاش خستگی‌ناپذیر اساتید بزرگوار، آقایان علی‌اصغر عنصری و علی صادقیه است که با محوریت این موضوع تهیه و تدوین شده است.

در پایان بر خود فرض می‌دانم که از اعضای فرهیخته شرکات انتشارات و نیز داوران و ویراستاران علمی و ادبی و همه عزیزانی که در راه انتشار این مجموعه تلاش کرده‌اند به‌ویژه از سرکار خانم دکتر معصومه طباطبائی رئیس محترم دانشکده، جناب آقای دکتر نوید نصیری‌زاده معاون محترم پژوهش و فناوری که همواره عنایت و پیرمندی به مجموعه انتشارات علمی دانشگاه دارند صمیمانه قدردانی و سپاسگزاری گردد.

به امید توفیق الهی

حمید صادقی

مدیر مسئول انتشارات علمی دانشگاه

افزایش روزافزون دانشجویان کارشناسی ارشد و کمبود کتاب مناسب در زمینه‌ی ریاضی مهندسی پیشرفته مطابق سرفصل مصوب شورای انقلاب فرهنگی، هدف اصلی نگارش این کتاب بوده است. با توجه به این که «ریاضیات مهندسی» معمولاً در سال دوم تحصیلی توسط دانشجویان کارشناسی اخذ می‌شود و فاصله‌ی زمانی که تا شروع دوره‌ی کارشناسی ارشد وجود دارد مطالب فراگرفته شده به فراموشی سپرده می‌شود. بنابراین کتاب با نگارش ساده مفاهیم اساسی و اجتناب از بیان مطالب غیرضروری سعی بر آن بوده که مطالب بیشتر به کمک مثال‌های متنوع بیان شود.

این کتاب شامل دو جلد است که در جلد اول در مورد معادلات دیفرانسیل معمولی بحث شده و همچنین در دو فصل آخر جلد اول به سری و انتگرال فوریه و معادلات با مشتقات جزئی پرداخته شده است.

در این جا لازم می‌دانیم از معاونت محترم پژوهشی آقای دکتر نوید نصیری‌زاده و مسئول محترم انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی جناب آقای حمید صادقی به دلیل همکاری و مساعدت لازم جهت چاپ و انتشار کتاب تشکر نمایم. همچنین از آقای محمدمهدی صادقی‌نژاد به خاطر تأیید و صفحه‌آرایی کتاب قدردانی کنیم. از اساتید بزرگوار و خوانندگان گرامی تقاضا داریم که با انتقادات و پیشنهادات خود در جهت اصلاح و بهبود کیفیت مطالب ارائه شده ما را یاری نمایند.

علی‌اکبر عنبر، - علی صادقیه

فصل اول: معادلات مرتبه‌ی اول.....	۵
۱-۱. معادلات جدایی‌پذیر.....	۵
۲-۱. تعویض متغیر.....	۹
۳-۱. مثال‌های کاربردی از معادلات جدایی‌پذیر.....	۱۶
۴-۱. معادلات همگن.....	۲۰
۵-۱. معادلات قابل تبدیل به معادلات همگن.....	۲۵
۶-۱. معادلات کامل.....	۲۹
۷-۱. عامل انتگرال‌ساز.....	۳۶
۸-۱. معادلات دینامیکی خطی مرتبه اول.....	۴۷
۹-۱. معادله‌ی دیفرانسیل برنولی.....	۵۶
۱۰-۱. معادله‌ی دیفرانسیل، یکنواخت.....	۵۸
۱۱-۱. معادلاتی که نسبت به مشتق قابل حل نیستند.....	۶۳
۱۲-۱. مسیرهای متعامد.....	۸۰
فصل دوم: معادلات مرتبه‌ی دوم و مراتب بالاتر.....	۸۵
۱-۲. معادلات مرتبه‌ی دوم غیرخطی.....	۸۵
۲-۲. معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم خطی.....	۹۳
۳-۲. معادلات خطی همگن.....	۹۵
۴-۲. معادلات کامل.....	۹۹
۵-۲. استقلال خطی.....	۱۰۳
۶-۲. معادلات همگن با ضرایب ثابت.....	۱۱۱
۷-۲. معادلات خطی همگن مرتبه‌ی دوم قابل تبدیل به معادله با ضرایب ثابت.....	۱۱۷
۸-۲. مسائل با شرایط کرانه‌ای و مقدار ویژه.....	۱۲۵
۹-۲. مسائل مقدار ویژه.....	۱۲۷
۱۰-۲. روش ضرایب نامعین.....	۱۳۰
۱۱-۲. روش تغییر پارامترها.....	۱۳۸

۱۴۷.....	۱۲-۲. عملگرهای دیفرانسیل.....
۱۵۲.....	۱۳-۲. حل معادلات به روش عملگرهای معکوس.....
۱۵۷.....	۱۴-۲. نظریه‌ی اساسی معادلات دیفرانسیل خطی.....
۱۶۰.....	۱۵-۲. کاهش مرتبه.....
۱۶۴.....	۱۶-۲. معادلات خطی مرتبه‌ی n با ضرایب ثابت.....
۱۷۰.....	۱۷-۲. معادلات خطی غیرهمگن.....
۱۷۵.....	فصل سوم: حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی.....
۱۷۵.....	۱-۳. سری‌های توانی.....
۱۸۰.....	۲-۳. مجموعه‌ی اندیس‌گذار.....
۱۸۵.....	۳-۳. حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌های توانی.....
۱۹۴.....	۴-۳. حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌های توانی در مجاورت یک نقطه‌ی عادی.....
۲۱۰.....	۵-۳. حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌های توسعه‌یافته در مجاورت یک نقطه‌ی غیرعادی منظم.....
۲۳۵.....	فصل چهارم: دستگاه معادلات دیفرانسیل.....
۲۳۵.....	۱-۴. مقدمه.....
۲۴۰.....	۲-۴. دستگاه خطی.....
۲۴۳.....	۳-۴. حل دستگاه خطی با روش حذفی.....
۲۵۱.....	۴-۴. حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش فوریه.....
۲۵۹.....	۵-۴. بررسی برخی از دستگاه‌های غیرخطی.....
۲۶۴.....	۶-۴. صفحه‌ی فاز.....
۲۶۹.....	فصل پنجم: سری و انتگرال فوریه.....
۲۶۹.....	۱-۵. توابع متعامد.....
۲۷۱.....	۲-۵. مسائل با شرایط کرانه‌ای و مقدار ویژه.....
۲۷۳.....	۳-۵. مسائل مقدار ویژه.....
۲۷۶.....	۴-۵. معادله‌ی اشتروم لیوویل.....

۲۷۸.....	۵-۵. مولد سری فوریه.....
۲۸۵.....	۶-۵. سری فوریه ی سینوسی و کسینوسی.....
۲۸۹.....	۷-۵. اعمال روی سری های فوریه.....
۲۹۲.....	۸-۵. صورت مختلط سری فوریه.....
۲۹۷.....	۹-۵. تبدیل فوریه گسسته.....
۳۰۳.....	۱۰-۵. بسط نیم دامنه.....
۳۰۸.....	۱۱-۵. ناویه ی فاز.....
۳۱۱.....	۱۲-۵. استفاده از سری فوریه برای حل معادلات دیفرانسیل.....
۳۱۶.....	۱۳-۵. انگرال فوریه.....
۳۲۵.....	۱۴-۵. تبدیل فوریه.....
۳۵۹.....	۱۵-۵. سری فوریه ی دایره.....
۳۶۷.....	فصل ششم: معادلات با مشتقات جزئی.....
۳۶۷.....	۱-۶. مقدمه.....
۳۷۰.....	۲-۶. معادلات مرتبه ی دوم خطی با ضرایب متغیر مستقل.....
۳۷۱.....	۳-۶. تشکیل معادله با مشتقات جزئی.....
۳۷۳.....	۴-۶. جواب معادله با مشتقات جزئی.....
۳۷۳.....	۵-۶. حل معادله با مشتقات جزئی.....
۳۸۱.....	۶-۶. حالت های خاص معادلات مرتبه دوم.....
۳۸۸.....	۷-۶. معادلات خطی مرتبه دوم.....
۳۹۱.....	۸-۶. معادلات خطی با ضرایب ثابت.....
۳۹۴.....	۹-۶. روش تفکیک متغیرها (ضربی).....
۳۹۸.....	۱۰-۶. معادله موج.....
۴۰۳.....	۱۱-۶. تعیین ضرایب جواب عمومی.....
۴۰۹.....	۱۲-۶. جواب دالامبر برای معادله ی موج.....
۴۱۱.....	۱۳-۶. معادلات ناهمگن.....
۴۱۷.....	۱۴-۶. معادلات ناهمگن وابسته به زمان.....

- ۴۲۶..... ۱۵-۶. معادله‌ی موج دوبعدی.....
- ۴۲۹..... ۱۶-۶. معادله‌ی موج دوبعدی در یک فضای دایره‌ای (ارتعاشات در یک غشای مستدیر وابسته به θ).....
- ۴۳۳..... ۱۷-۶. معادله‌ی موج دوبعدی در فضای مستطیلی.....
- ۴۳۷..... ۱۸-۶. معادله‌ی گرما.....
- ۴۴۰..... ۱۹-۶. حل معادله‌ی گرما با استفاده از روش ضربی و استفاده از سری فوریه.....
- ۴۴۵..... ۲۰-۶. حل معادله‌ی گرما در میله متناهی با تشعشع گرما در انتها.....
- ۴۴۸..... ۲۱-۶. معادله‌ی گرما در میله متناهی با دمای غیرصفر در ابتدا و انتهای میله.....
- ۴۵۰..... ۲۲-۶. معادله‌ی گرما غیرهمگن.....
- ۴۵۵..... ۲۳-۶. معادله‌ی گرما در میله نامتناهی.....
- ۴۵۸..... ۲۴-۶. معادله‌ی گرما در میله نیمه نامتناهی.....
- ۴۶۰..... ۲۵-۶. استفاده از تبدیل فوریه برای حل معادله‌ی گرما در میله نامتناهی.....
- ۴۶۵..... ۲۶-۶. معادله‌ی گرما در یک صفحه‌ی مستطیل شکل.....
- ۴۶۷..... ۲۷-۶. معادله‌ی پتانسیل لاپلاس.....
- ۴۷۱..... منابع.....

اسحق نیوتن



من نمی‌دانم به چه صورتی ممکن است در نظر جهانیان جلوه‌گر شوم اما به نظر خودم چنین می‌آید که همچون کودک خردسالی هستم که در ساحل دریا به بازی مشغولم و گاه و بی‌گاه سنگ‌ریزه‌ای صاف‌تر از سنگ‌های دیگر یا صدفی زیباتر از صدف‌های دیگر به دست می‌آورم. حال که اقیانوس عظیم حقیقت در مقابل من گسترده است و برابر آن آگاهی نیست.

این قضاوتی است به اسحق نیوتن در پایان زندگی خود درباره‌ی اکتشافات خود می‌نماید. مردی که بر فضا و بی‌نهایت از مقام انسانی تجاوز کرد.

اسحق نیوتن در ۲۵ دسامبر ۱۶۴۲ (سال درگذشت گالیله) متولد شد. او کودکی زودرس و بسیار ضعیف بود که امید چنان‌که به زنده ماندنش نبود. پدرش کشاورزی مرفه بود که در مجاورت دریا در روستا، ولستورن (Woolsthorpe) می‌زیست. این روستا در ده کیلومتری جنوب گرانتهم در انگلستان واقع است. نیوتن کودکی نبود که بدنی مقاوم و مستحکم داشته باشد، بنابراین مجبور بود از بازی‌های پرهیاهو و پربرخورد همسالان خود کناره بگیرد و به جای آن برای خردش تفریحاتی اختراع کند که نبوغ وی در ضمن آن خودنمایی می‌کرد.

نیوتن در دوازده سالگی وارد دبیرستان گرانتهم شد، او با عمویش در پندرز سالگی می‌کرد و به گروه (سابسایزرها) پیوست، گروهی که به جای شهریه، اتاق‌ها را اجاره می‌کردند و یا در سالن غذاخوری به عنوان پیشخدمت کار می‌کردند.

نیوتن مطالعه بسیار می‌کرد و در کتابچه یادداشت خود انواع و اقسام نتایج کارآموزی‌های مختلف را یادداشت می‌نمود و ملاحظات خارق‌العاده‌ای به آن‌ها می‌افزود، غالباً گفته‌ی زیر را به نیوتن نسبت می‌دهند: «اگر من می‌توانستم اندکی دورتر را تماشا کنم تا دیگران، به آن علت بوده است که من از دوش غولان بالا رفته بودم» که از جمله این غولان باید به دکارت، کلپر، گالیله اشاره نمود.

نیوتن در سال ۱۶۶۱ میلادی به کالج ترینیتی دانشگاه کمبریج وارد شد، در آن دوران

دروس دانشکده عموماً بر پایه‌ی آموزه‌های ارسطو تنظیم می‌شد ولی نیوتن ترجیح می‌داد که با اندیشه‌های مرفقی‌تر فیلسوفان نوگرایی چون دکارت، گالیله، کپرنیک و کلپر آشنا شود در سال ۱۶۶۵ موفق به کشف قضیه دو جمله‌ای در جبر شد یافته‌ای که بعدها به ابداع حساب دیفرانسیل انجامید.

در اینجا ما سه قانون کپلر را بیان می‌کنیم زیرا این سه قانون در ایجاد قوانین جاذبه عمومی نیوتن نقش قاطع بر عهده داشته‌اند.

قانون اول: مدار سیارات به دور خورشید بیضی شکل است که خورشید در یکی از دو کانون آن قرار دارد.

قانون دوم: خطوطی که کانون‌های این بیضی را به سیاره وصل می‌کند در زمان‌های مساوی مسطوح مساوی را طی می‌کند.

قانون سوم: معذور زمانی که برای یک دور کامل حرکت انتقال هر سیاره لازم است متناسب با مکعب فاصلاتی است که توسط آن سیاره از خورشید است.

نیوتن چگونگی حرکت اجسام را در قالب سه قانون توصیف کرد. این قوانین آن قدر واضح است که امروزه کسی نمی‌تواند بر سر برد نیازی به کشف شدن داشته باشد، با این حال نیوتن نخستین کسی بود که به نبوء خود به وجود آن‌ها پی برد.

قانون اول (قانون لختی): هر جسم که در حال سکون یا حرکت یکنواخت در راستای خط مستقیم باشد به همان حال باقی می‌ماند مگر این که نیرویی بر آن وارد شود و آن را

قانون دوم (قانون نمو نسبی): کل نیروی وارد بر یک جسم برابر است با حاصل ضرب جرم آن جسم در شتاب آن

قانون سوم (قانون کنش و واکنش): هرگاه جسمی به جسم دیگری نیرو وارد کند جسم دوم نیز نیرویی به همان اندازه ولی در خلاف جهت بر جسم اول وارد می‌کند. آن چه که از لحاظ ریاضی بیش از همه اهمیت دارد، قانون دوم حرکت یعنی «نمو نسبی» است.

مقصود از نمو نسبی چیست و چگونه باید آن را اندازه گرفت؟

حل این مسئله که روش ریاضی عملی برای مطالعه‌ی سرعت اجسامی که دارای حرکت انتقالی هستند به دست می‌دهد و حتی در موردی که این حرکت با بی‌نظمی انجام

گیرد، یکباره تمام اسرار نمو‌های نسبی را بر او روشن ساخت. این روش عملی همان حساب دیفرانسیل است. مسئله‌ی مشابهی که در آن از تغییرات نسبی گفتگو می‌شود، باعث شد که وی بتواند حساب دیفرانسیل را اختراع نماید، هرگاه ذره‌ای چنان حرکت کند که سرعت آن از لحظه‌ای به لحظه‌ی دیگر با اتصال تغییر نماید چگونه می‌توان تمام مسافتی را که این ذره در مدت زمان معینی پیموده است به دست آورد نیوتن این مسئله و مسائل مشابه به آن را به طریق هندسی بیان شده بود پیش خود مطرح کرد و برای این که بتواند به آنها پاسخ دهد حساب دیفرانسیل را ابداع نمود.

چنین به نظر می‌رسد که کلمه تابع در سال ۱۶۹۴ به وسیله‌ی لایب نیتز وارد ریاضیات شده است. اگر که به وسیله‌ی این کلمه بیان می‌شود یکی از افکار حاکم بر تمام ریاضیات معاصر حاضر است و در تمام رشته‌های دیگر علوم نیز مورد احتیاج است. علامت $\frac{dy}{dx}$ را لایب نیتز معمولاً برد و امروزه بیش از هر علامت دیگری متداول است.

با توجه به قانون دوم نیرون، لایب نیتز می‌شود که نیرو متناسب با شتابی است که در اثر آنها به وجود آمده است.

فرض کنیم ذره‌ای به وسیله‌ی نقطه‌ای که مرکز ثقل است جذب شود و امتداد نیروی وارد بر ذره همواره از نقطه‌ی ثابت مزبور، می‌گذرد که این نیرو به نحوی بستگی با فاصله‌ی ذره از نقطه‌ی ثابت مزبور دارد اگر در لحظه‌ی مفروض t فاصله‌ی ذره از مرکز جاذبه را با علامت s نمایش دهیم و $F(s)$ تابعی باشد که نحوی بستگی مابین فاصله و نیروی جاذبه را نشان می‌دهد. حال چگونه می‌توانیم از این معلومات حرکت ذره‌ی مزبور را مورد مطالعه قرار دهیم. مابین این معلومات رابطه‌ی $\frac{ds^2}{dt^2} = -F(s)$ وجود دارد. معادله‌ای که به این طریق حاصل شده است را معادله‌ی دیفرانسیل حرکت می‌گوییم.

در واقع مشکل کار از اینجا شروع می‌شود، زیرا همواره ممکن است با سهولت مسئله‌ی فیزیکی معینی را به صورت معادلات دیفرانسیل بیان کرد ولی هیچ ریاضی‌دانی قادر نبود این معادله‌ی دیفرانسیل را حل کند.

اکنون به جای این معادله معادله‌ی ساده $\frac{dy}{dx} = f(x)$ را در نظر می‌گیریم، یعنی می‌خواهیم معین کنیم که کدام تابع y از متغیر x می‌تواند بر حسب x دارای مشتقی

مساوی تابع $f(x)$ باشد. اگر چنین تابعی وجود داشته باشد و ما بتوانیم آن را به دست آوریم نام آن را تابع اولیه‌ی $f(x)$ یا ضدمشتق $f(x)$ می‌نامیم و آن را با علامت $\int f(x) dx$ نمایش می‌دهیم.

قضیه‌ی اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال به صورتی که اولین بار به نظر نیوتن رسید و لایب نیتز نیز مستقل از او کشف کرد،

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

سر ایزاک نیوتن گام بلندتری برداشت و قانون گرانش عمودی را کشف کرد که به موجب آن هر جسمی در عالم به هر جسم دیگری نیروی کششی وارد می‌کند و مقدار این نیرو با رابطه‌ی نامبرده محاسبه‌پذیر است. نیوتن آن چه را که ممکن بود نصیب یک انسان سود را به دست آورد. به طوری کلی می‌توان گفت که نیوتن آن قدر که ممکن است مرد بزرگی در زندگی سعادت‌مند باشد را بهره‌مند گردید وی در نیمه‌ی شب بیستم مارس ۱۷۲۷ زنده‌ای را بدرید گفت. لو در این هنگام هشتاد و پنج سال داشت. وی را در صومعه‌ی وست‌مینستر به خاک سپردند.