

شماره ۱۴۳۸۲۲۷

۹۵, ۹, ۱۷



# برنامه ریزی خطی پیشرفته

(روش های نقاط درونی)

تألیف:

دکتر عباس سیفی

استاد دانشکده مهندسی صنایع و مدیریت سیستم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

پاییز ۱۳۹۵

|                     |                                                                |
|---------------------|----------------------------------------------------------------|
| سرشناسه             | سیفی، عباس، ۱۳۴۴ -                                             |
| عنوان و نام پدیدآور | برنامه‌ریزی خطی پیشرفته (روش‌های نقاط درونی) / تألیف عباس سیفی |
| مشخصات نشر          | تهران: دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)، ۱۳۹۵.         |
| مشخصات ظاهری        | ه، ۲۱۴ ص: نمودار.                                              |
| شابک                | 978-964-463-644-8                                              |
| وضعیت فهرست‌نویسی   | قیبا                                                           |
| موضوع               | برنامه‌نویسی خطی -- راهنمای آموزشی (عالی)                      |
| موضوع               | Linear programming -- Study and teaching (Higher)              |
| موضوع               | برنامه‌نویسی (ریاضیات) - راهنمای آموزشی (عالی)                 |
| موضوع               | Programming (Mathematics) -- Study and teaching (Higher)       |
| موضوع               | بهینه‌سازی ریاضی                                               |
| موضوع               | Mathematical optimization                                      |
| شماره افزوده        | دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)                       |
| رده‌بندی کنگ        | ۱۳۹۵ س۹۶۴/۷۴/۷۵۷ T                                             |
| رده‌بندی دیوید      | ۵۱۹/۷۲                                                         |
| شماره کتابشناسی     | ۴۳۴۱۸                                                          |

این کتاب در جلسه مورخ ۱۳۹۴/۱۲/۹ شورای چاپ و نشر دانشگاه صنعتی امیرکبیر به تصویب رسیده است.



انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

|                        |                                                   |
|------------------------|---------------------------------------------------|
| عنوان کتاب             | برنامه‌ریزی خطی پیشرفته (روش‌های نقاط درونی)      |
| تألیف                  | دکتر عباس سیفی                                    |
| ناشر                   | انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) |
| لیتوگرافی، چاپ و صحافی | انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) |
| چاپ اول                | پاییز ۱۳۹۵                                        |
| تیراژ                  | ۳۰۰ نسخه                                          |
| قیمت                   | ۱۱۰۰۰ تومان                                       |
| شابک                   | ISBN : 978-964-463-644-8                          |

آدرس مرکز پخش: خیابان ولیعصر، روبروی خیابان بزرگمهر، فروشگاه کتاب مرکز نشر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) - تلفن: ۶۶۴۹۸۸۶۸

حق چاپ برای ناشر محفوظ است.

این کتاب برای جلوگیری از انتشار غیرمجاز رمزگذاری شده است.

## فهرست مطالب

| صفحه | عنوان                                                       |
|------|-------------------------------------------------------------|
| ۱    | ۱ آشنایی با روش‌های نقاط درونی                              |
| ۱-۱  | ۱-۱ مقدمه و تاریخچه                                         |
| ۴    | ۲-۱ معیارهای ارزیابی عملکرد الگوریتم‌ها                     |
| ۶    | ۳-۱ پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌ها در بدترین حالت             |
| ۷    | ۱-۲-۱ الگوریتم‌هایی با پیچیدگی محاسباتی چندجمله‌ای یا نمایی |
| ۹    | ۲ مذهب نظری برنامه‌ریزی خطی                                 |
| ۹    | ۱-۲ مفرضات و نمادهای                                        |
| ۱۱   | ۲-۲ فضایای هم‌نای (دوگان) در برنامه‌ریزی خطی                |
| ۱۹   | ۳ عناصر اصلی تشبیل هند روش‌های نقاط درونی                   |
| ۱۹   | ۱-۳ قضایا و تعاریف                                          |
| ۲۰   | ۱-۱-۳ تبدیل مقیاس آفین                                      |
| ۲۳   | ۲-۳ ماتریس تصویر کننده                                      |
| ۲۵   | ۱-۲-۳ تصویر یک بردار روی فضای پوچ یک ماتریس                 |
| ۲۵   | ۲-۲-۳ ویژگی‌های ماتریس تصویر کننده                          |
| ۲۹   | ۳-۳ تعاریف مسیر مرکزی                                       |
| ۳۵   | ۴-۳ همسایگی‌های مسیر مرکزی                                  |
| ۳۷   | ۵-۳ مثال‌هایی برای مسیر مرکزی                               |
| ۴۳   | ۴ روش‌های نقاط درونی با تبدیل مقیاس آفین                    |
| ۴۳   | ۱-۴ مقدمه                                                   |
| ۴۳   | ۲-۴ الگوریتم تبدیل مقیاس آفین در فضای اولیه (PAFS)          |
| ۴۴   | ۱-۲-۴ بیانیه الگوریتم PAFS                                  |
| ۴۸   | ۳-۴ الگوریتم تبدیل مقیاس آفین در فضای هم‌زاد (دوگان) (DAFS) |
| ۴۹   | ۱-۳-۴ بیانیه الگوریتم DAFS                                  |
| ۵۵   | ۵ روش‌های تعقیب مسیر مرکزی                                  |
| ۵۵   | ۱-۵ مقدمه                                                   |
| ۵۷   | ۲-۵ جهت جستجوی نیوتنی                                       |

- ۵-۲-۱ حل دستگاه معادلات جهت جستجوی نیوتنی..... ۵۹
- ۵-۲-۲ انتخاب طول گام..... ۶۱
- ۵-۳ الگوریتم تخمین زنده - اصلاح کننده (PCPF)..... ۶۳
- ۵-۴ الگوریتم‌های تعقیب مسیر مرکزی..... ۶۳
- ۵-۴-۱ الگوریتم کوتاه گام (SSPF)..... ۶۵
- ۵-۴-۲ الگوریتم بلند-گام (LSPF)..... ۶۷
- ۵-۴-۳ الگوریتم تعقیب مسیر مرکزی با نقطه شروع نشدنی (INFPP)..... ۶۹
- ۵-۵ پیاده‌سازی الگوریتم‌های تعقیب مسیر مرکزی..... ۷۱
- ۵-۵-۱ الگوریتم تخمین زنده-اصلاح کننده مهرتوا (MPC)..... ۷۱

## ۶ روش کارمارکار..... ۷۷

- ۶-۱ مقدمه و ایده‌های اصلی روش..... ۷۷
- ۶-۲ انتخاب جهت جستجو با بیشترین شیب کاهش..... ۷۹
- ۶-۳ انتخاب طول گام..... ۸۰
- ۶-۴ بیانیه الگوریتم کارمارکار..... ۸۴
- ۶-۵ پیچیدگی محاسباتی الگوریتم کارمارکار..... ۸۶
- ۶-۶ الگوریتم تاد و بارل..... ۸۷
- ۶-۶-۱ بیانیه الگوریتم تاد و بارل..... ۸۸

## ۷ روش‌های نقاط درونی مبتنی بر تابع پتانسیل..... ۹۱

- ۷-۱ مقدمه..... ۹۱
- ۷-۱-۱ تابع پتانسیل TTY..... ۹۲
- ۷-۲ الگوریتم‌های مبتنی بر کاهش تابع پتانسیل (TR)..... ۹۳
- ۷-۲-۱ بیانیه الگوریتم PR..... ۹۴
- ۷-۲-۲ یک تخمین درجه دوم از تابع پتانسیل در امتداد یک خط شیبی..... ۹۶
- ۷-۳ الگوریتم‌های مبتنی بر پتانسیل ثابت..... ۹۸
- ۷-۳-۱ بحثی در مورد مرکزیت..... ۹۸
- ۷-۳-۲ انتخاب پارامترهای تابع پتانسیل..... ۹۹
- ۷-۳-۳ سازگاری همسایگی و تابع پتانسیل..... ۱۰۰
- ۷-۴ تعمیم روش‌های مبتنی بر پتانسیل ثابت به نقاط نشدنی..... ۱۰۳
- ۷-۴-۱ مقدمات الگوریتم INFPP..... ۱۰۴
- ۷-۴-۲ الگوریتم پتانسیل ثابت با نقاط نشدنی (INFPP)..... ۱۰۵

- ۸ روش‌های حل دستگاه معادلات خطی تنک برای محاسبه جهت جستجو..... ۱۰۹
- ۱-۸ استخراج معادلات نرمال و دستگاه الحاقی..... ۱۱۰
- ۲-۸ روش مستقیم برای حل دستگاه معادلات خطی تنک..... ۱۱۱
- ۱-۲-۸ مراحل روش تجزیه مستقیم (تجزیه کامل ماتریس  $M$ )..... ۱۱۲
- ۲-۲-۸ روش تجزیه ناقص..... ۱۱۳
- ۳-۸ روش حل تکرارپذیر مبتنی بر روش PCG..... ۱۱۳
- ۱-۳-۸ الگوریتم PCG..... ۱۱۴
- ۴-۸ حل دستگاه معادلات با ستون‌های چگال..... ۱۱۵
- ۹ تعمیم روش‌های نقاط درونی به برنامه‌ریزی محدب..... ۱۱۹
- ۱-۹ برنامه‌ریزی محدب..... ۱۱۹
- ۲-۹ برنامه‌ریزی محدب (QP)..... ۱۲۴
- ۳-۹ مسئله مدل خطی (Monotone) LCP..... ۱۲۷
- ۱-۳-۹ الگوریتم FDL..... ۱۲۸
- ۱۰ برنامه‌ریزی ماتریسی..... ۱۳۱
- ۱-۱۰ مقدمه..... ۱۳۱
- ۲-۱۰ مخروط ماتریس‌های نیمه معین..... ۱۳۳
- ۳-۱۰ مدل برنامه‌ریزی ماتریسی..... ۱۳۵
- ۴-۱۰ قضایای همزادی (دوگان) در برنامه‌ریزی ماتریسی..... ۱۳۷
- ۱-۴-۱۰ شرایط لازم و کافی بهینگی..... ۱۴۳
- ۵-۱۰ روش نقاط درونی برای حل برنامه‌ریزی ماتریسی..... ۱۴۵
- ۶-۱۰ کاربردهای کلاسیک برنامه‌ریزی ماتریسی..... ۱۵۲
- ۱-۶-۱۰ کمینه‌سازی بزرگ‌ترین مقدار ویژه یک ماتریس..... ۱۵۳
- ۲-۶-۱۰ کمینه‌سازی نرم یک ماتریس..... ۱۵۳
- ۳-۶-۱۰ تقریب لگاریتمی چبیشف..... ۱۵۴
- ۴-۶-۱۰ کاربرد در مسائل هندسی با توابع درجه دوم..... ۱۵۵
- ۵-۶-۱۰ مسئله Max Cut..... ۱۵۶
- ضمیمه الف\_ مباحثی از جبر خطی..... ۱۶۱
- الف-۱ ترکیب خطی، آفین، محدب..... ۱۶۱
- الف-۲ استقلال خطی و مفهوم پایه و بعد فضای برداری..... ۱۶۲
- الف-۳ رتبه سطری (ستونی) ماتریس..... ۱۶۲

|               |                                                      |     |
|---------------|------------------------------------------------------|-----|
| الف-۴         | مقادیر ویژه و بردارهای ویژه                          | ۱۶۳ |
| الف-۵         | ماتریس‌های معین مثبت                                 | ۱۶۵ |
| الف-۵-۱       | ترتیب جزئی                                           | ۱۶۶ |
| الف-۶         | فضای پوچ و فضای برد یک ماتریس                        | ۱۶۷ |
| الف-۷         | تجزیه ماتریس‌ها                                      | ۱۶۸ |
| الف-۷-۱       | تجزیه به مقادیر ویژه                                 | ۱۶۸ |
| الف-۷-۲       | تجزیه چولسکی                                         | ۱۶۸ |
| الف-۷-۳       | تجزیه LU                                             | ۱۶۹ |
| الف-۸         | فضای متریک، نرم‌دار، ضرب داخلی                       | ۱۶۹ |
| الف-۸-۱       | فضای متریک                                           | ۱۶۹ |
| الف-۸-۲       | فضای نرم‌دار                                         | ۱۶۹ |
| الف-۸-۳       | ضرب داخلی                                            | ۱۷۰ |
| الف-۹         | نرم‌های بدیاری                                       | ۱۷۱ |
| الف-۹-۱       | نرم $L_1$                                            | ۱۷۱ |
| الف-۹-۲       | نرم بیضی                                             | ۱۷۲ |
| الف-۱۰        | نرم‌های ماتریسی                                      | ۱۷۲ |
| الف-۱۰-۱      | نرم فروبنیوس                                         | ۱۷۲ |
| الف-۱۰-۲      | نرم القایی نظیر $L_1$ نرم                            | ۱۷۲ |
| الف-۱۰-۳      | نرم القایی نظیر $L_\infty$ نرم                       | ۱۷۲ |
| الف-۱۰-۴      | نرم القایی نظیر $L_2$ نرم                            | ۱۷۲ |
| الف-۱۱        | سوپر‌نرم و اینفیموم                                  | ۱۷۳ |
| ضمیمه ب       |                                                      | ۱۷۵ |
| ب-۱           | روش شناسایی پایه بهینه (BIP)                         | ۱۷۵ |
| ب-۱-۱         | مراحل روش شناسایی پایه (BIP)                         | ۱۷۷ |
| ب-۲           | دستگاه معادلات جهت جستجو برای متغیرهای کران‌دار      | ۱۸۱ |
| ضمیمه ج       | راهنمای استفاده از نرم‌افزار Linprog در محیط Matlab® | ۱۸۳ |
| ج-۱           | نحوه عملکرد Linprog                                  | ۱۸۳ |
| ج-۲           | کار با Linprog در محیط Matlab®                       | ۱۸۴ |
| منابع و مراجع |                                                      | ۱۸۷ |
| نمایه         |                                                      | ۱۹۱ |

۱۹۳ ..... واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۱۹۷ ..... واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

www.ketab.ir

## پیش‌گفتار

این کتاب حاصل کارآموزشی و تحقیقاتی مؤلف در دوره دکترا، پسادکتر و بیش از ۱۵ سال تدریس روش‌های نقاط درونی در قالب درس برنامه‌ریزی خطی پیشرفته در دوره‌های کارشناسی ارشد و دکترای مهندسی صنایع و سیستم‌هاست. انتخاب نام برنامه‌ریزی خطی پیشرفته برای این کتاب، از دو منظر مدل‌سازی و روش حل قابل توجیه است. با توجه به پیشرفت‌های ۳۰ سال گذشته در حوزه بهینه‌سازی محدب و برنامه‌ریزی ریاضی، امروزه روش‌های نقاط درونی رقبای اصلی روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی هستند. عملکرد این روش‌ها به‌خصوص در مسائل بهینه‌سازی خطی با ابعاد بزرگ، بسیار خوب بوده است. بنابراین، روش‌های نقاط درونی را به‌درستی می‌توان روش‌های پیشرفته حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دانست. به همین دلیل چهار فصل از این کتاب به تشریح چهار خانواده اصلی از روش‌های نقاط درونی می‌پردازد.

از منظر مدل‌سازی، برنامه‌ریزی ماتریسی را می‌توان مدل تعمیم‌یافته برنامه‌ریزی خطی دانست که در آن یک مدل به‌صورت  $z = c^T x$ ،  $Ax = b$ ،  $x \geq 0$  (خطی روی فضای ماتریس‌های نیمه معین مثبت (بجای فضای بردارهای غیر منفی در برنامه‌ریزی خطی) ساخته می‌شود. توسعه برنامه‌ریزی ماتریسی و کاربردهای آن در دهه ۱۹۹۰ میلادی به‌دلیل موفقیت‌های روش‌های نقاط درونی در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی به وجود آمد. پس از آن اثبات شد که یک مدل برنامه‌ریزی ماتریسی را می‌توان توسط الگوریتم‌های نقاط درونی با همان درجه پیچیدگی محاسباتی برنامه‌ریزی خطی، حل کرد. با توجه به قابلیت بالای برنامه‌ریزی ماتریسی در مدل‌سازی طیف وسیعی از مسائل بهینه‌سازی کلاسیک و کاربردهای آن در حوزه‌های مختلف علوم و مهندسی از یک سو و کارایی الگوریتم‌های نقاط درونی در حل دقیق این نوع مسائل از سوی دیگر، این موضوع در سال‌های اخیر اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده است. در فصل ۱۰ این کتاب به تشریح مبانی برنامه‌ریزی ماتریسی و کاربردهای آن پرداخته شده است.

در این کتاب سعی داریم مفاهیم پایه‌ای روش‌های نقاط درونی را ارائه دهیم. همچنین مهم‌ترین الگوریتم‌هایی که در این زمینه توسعه یافتند را با مثال‌های عددی تشریح کرده و نقاط ضعف و قوت هر کدام را بیان می‌کنیم.

رویکرد این کتاب ارائه ایده‌های اصلی روش‌ها و بیان الگوریتم‌هاست. از آنجایی که این کتاب برای دانشجویان دکترا و کارشناسی ارشد رشته مهندسی صنایع، ریاضی کاربردی یا گرایش تحقیق در عملیات و علوم اقتصادی نوشته شده است، در ارائه الگوریتم‌ها در فصول مختلف کتاب، از اثبات همگرایی نهایی، محاسبه سرعت همگرایی و پیچیدگی محاسباتی آن‌ها، اجتناب شده است. همچنین به‌جز در موارد خاص، اثبات قضایای مورد استفاده در فصول مختلف آورده

نشده و به مقالات مربوطه ارجاع داده شده است. در مقابل سعی شده که مفاهیم موردنیاز جهت پیاده‌سازی و به‌کارگیری این الگوریتم‌ها ارائه شود.

در فصل اول ضمن بیان مقدمه و انگیزه روش‌های نقاط درونی، تاریخچه توسعه این روش‌ها بیان شده و در ادامه تعاریفی راجع به پیچیدگی محاسباتی و معیارهای ارزیابی عملکرد الگوریتم‌ها ارائه شده است. فصل دوم به مرور قضایا و مفاهیم پایه‌ای برنامه‌ریزی خطی و نظریه همزادی (دوگانی) می‌پردازد. در فصل سوم عناصر اصلی تشکیل‌دهنده روش‌های نقاط درونی پایه‌گذاری می‌شود. خواندن این فصل برای آشنایی با مفاهیم پایه و نمادگذاری کتاب ضروری است.

روش‌های نقاط درونی را می‌توان در چهار خانواده طبقه‌بندی کرد که در فصل‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ تشریح شده است. روش‌های نقاط درونی با تبدیل مقیاس آفین در فصل چهارم مطرح شده است که قدیمی‌ترین و ساده‌ترین نوع این روش‌ها هستند. در فصل پنجم، روش‌های تعقیب مسیر مرکزی که از متن‌ترین و رایج‌ترین روش‌های نقاط درونی هم از منظر کاربردی و هم به لحاظ نظری هستند، ارائه شده است. از این‌رو فصل پنجم مهم‌ترین فصل کتاب است. روش کارمارکار و مشتقات آن در فصل هشتم آمده است. فصل هفتم به روش‌های نقاط درونی مبتنی بر تابع پتانسیل اختصاص داده شده است و ارتباط این روش‌ها با روش‌های تعقیب مسیر مرکزی بیان می‌شود.

ملاحظات پیاده‌سازی الگوریتم‌های نقاط درونی در فصل هشتم توضیح داده شده است. همچنین در فصل هشتم روش‌های حل دستگاه معادلات خطی تنک با ابعاد بسیار بزرگ نیز تشریح شده است. فصل نهم به تعمیم روش‌های نقاط درونی به برنامه‌ریزی محدب می‌پردازد. این فصل، روی مسائل برنامه‌ریزی مجذوری به لحاظ ابعاد کاربردی این نوع مسائل، تمرکز دارد. با توجه به گستردگی و تنوع مسائل برنامه‌ریزی محدب، تمام بخش کامل الگوریتم‌های نقاط درونی برای این خانواده از مسائل، خارج از ظرفیت این کتاب است. فصل دهم به تشریح مبانی برنامه‌ریزی ماتریسی و روش‌های حل نقاط درونی برای این خانواده از مسائل و کاربردهای متنوع آن می‌پردازد.

فصل‌های ۱ تا ۵ و ۸ و ۱۰ برای تدریس در یک نیمسال آموزشی مناسب است. در ضمیمه ۱ مباحثی از جبر خطی مطرح شده است که برای درک عمیق‌تری از مبانی نظری روش‌های نقاط درونی و به‌خصوص برنامه‌ریزی ماتریسی موردنیاز است. ضمیمه ۲ روش شناسایی پایه بهینه و نحوه کاربرد الگوریتم‌های نقاط درونی برای متغیرهای کران‌دار را بیان می‌کند. ضمیمه ۳ اطلاعاتی جهت پیاده‌سازی یک الگوریتم نقاط درونی را در قالب جعبه‌ابزار Linprog در محیط Matlab® در اختیار می‌گذارد.