

ترجمہ

التفہیم فی المنطق

صدر المتألفین شیرازی

« ملا صدرا »

مترجم

غلامرضا یاسی پور

صدرالدین شیرازی، محمد بن ابراهیم، ۹۷۹ - ۱۰۵۰ ق.
ترجمه التنقیح فی المنطق / تألیف صدرالمتهلین شیرازی (ملاصدرا)؛
ترجمه غلامرضا یاسی پور. - تهران حسینیه ارشاد، ۱۳۸۴.
۱۴۱ ص. مصور.

ISBN: 964 - 6280 - 11 - 0

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.
کتاب حاضر منسوب به «صدرالدین شیرازی» است.
۱. منطق الف. یاسی پور، غلامرضا، مترجم. ب. عنوان.
۹۰۴۱ ت ۳۶ ص / BC ۵۰
۱۳۸۳

۱۶۰
۳۲۸۹۱ - ۸۳ م

کتابخانه ملی ایران

ولتكن منكم امة يدعون الى الخير
«حسینیة ارشاد»

انتشارات حسینیه ارشاد

تهران، خیابان دکتر علی شریعتی، بالاتر از سه راه ضرابخانه، پلاک ۱۰۵۷

تلفن: ۲۸۴۳۹۹۹ - ۲۸۴۴۶۵۱



نام کتاب : ترجمه التنقیح فی المنطق

تألیف : صدرالمتهلین شیرازی (ملاصدرا)

ترجمه : غلامرضا یاسی پور

تایپ و نمونه خوانی : سهیلا امیرسیاف

طراح جلد : سوسن نصیری

ناشر : انتشارات حسینیه ارشاد

شمارگان : ۲۰۰۰ نسخه

سال چاپ نخست : ۱۳۸۴

چاپ : خواجه

شابک : ۹۶۴-۶۲۸۰-۱۱-۰

کلیه حقوق نشر برای ناشر محفوظ است

فهرست مندرجات

صفحه

عنوان

۱	مقدمه مترجم
۸۷	ترجمه کتاب التنقیح فی المنطق
۸۹	مقدمه کتاب التنقیح فی المنطق
۹۱	اشراق اول (در ایساغوجی)
۱۰۱	اشراق دوم (در اقوال شارحه)
۱۰۷	اشراق سوم (در باری ارمیناس)
۱۱۳	اشراق چهارم (در جهات قضایا و تصرفات در آنها)
۱۲۱	اشراق پنجم (در ترکیب ثانی)
۱۳۳	اشراق ششم (در قیاس خلف)
۱۳۷	اشراق هفتم (آنچه در اصناف، به آن احتیاج می شود)
۱۴۱	اشراق هشتم (در برهان)
۱۴۹	اشراق نهم (در سوفسطیقی یا مغالطه)
۱۵۵	فهرست مفاهیم و اصطلاحات:
۱۵۷	اصطلاحات فارسی به انگلیسی
۱۶۵	اصطلاحات انگلیسی به فارسی
۱۷۳	اصطلاحات
۱۹۱	نام ها
۱۹۵	کتاب ها
۱۹۷	مکان ها

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمه مترجم

در این مقدمه، ابتدا اشاراتی چند به متن مورد ترجمه می‌کنیم و سپس، به ذکر تاریخ مختصر منطق قدیم^۱ و منطق ریاضی و ارتباط این دو، می‌پردازیم و در آخر برای آشنایی علاقه‌مندان با منطق اخیر، مختصری از آن را در بحثی به نام اسقاط اضافه، بیان می‌کنیم، و خواننده علاقه‌مند به بحث منطق در دوره اسلامی را به مقدمه دکتر قراملکی در کتاب التنقیح فی المنطق صدر المتألهین شیرازی حواله می‌دهیم.

۱ - نثر متن اصلی با تمام اختصاری که دارد نمونه‌ای از نثرهای عالی است، و اگر به خاطر بیاوریم که در فرانسه، نثر پاسکال، ریاضیدان هم‌زمان ملاًصدرا، و در ایتالیا نثر گالیله، باز هم ریاضیدان و هم عصر ملاًصدرا، جزو بهترین نثرها به شمار می‌روند، به این مطلب توجه بیشتری خواهیم کرد.

۲ - تهذیب و تنقیح منطق در این متن، به یک معنی، آوردن سرفصل‌ها و سربخش‌ها^۲ برای سهولت تدریس معلّم، و به عبارت دیگر، فرموله کردن مطلب است، مثل فرمول‌های ریاضی، که در آنها یک کلمه کم یا زیاد موجود نیست، و بنابراین درک متن کتاب بی‌کمک معلّم برای متعلّم ممکن نیست، اما برای اینکه دانشجوی مستعد و کنجکاو نیز خود به تنهایی از کتاب بهره گیرد، بعضی از اصطلاحات را توضیح داده و مرجع بعضی از ضمیرها را در پاورقی آورده‌ایم.

۳ - در متن، در مبحث اجناس و انواع، چنین آمده که محصور به ناچار منتهای است. باید گفت که همواره چنین نیست. مثلاً، در حوزه اعداد حقیقی و، فی‌المثل، بین ۱ و ۲ و خود این دو، یعنی، اگر $1 \leq x \leq 2$ ، $x \in R$ ، بینهایت عدد موجود است.

۱ - در مقابل منطق ریاضی، وگرنه قول منطق قدیم خیلی هم به سامان نیست.

۲ - همان طور که در این کتاب به عمل آمده است.

۴ - همان طور که اشاره کردیم، تهذیب و تنقیح، آوردن فهرست مطالبی است، که برای تدریس معلّم لازم و کافی است، به این نکته این را نیز می‌افزاییم که از بر داشتن این فهرست برای استدلال‌کننده نیز لازم و کافی است، زیرا واقعیت این است که اگر کسی منطقی را، فی‌المثل چون فهرست مورد نظر، یعنی تنقیح حاضر، در ذهن نداشته باشد، دچار خطا می‌شود.

۵ - از این متن قبلاً ترجمه‌ای به قلم استاد دکتر عبدالمحسن مشکوة‌الدینی انجام گرفته است. اما معنی این خبر چنین نیست که دیگر به ترجمه، حتّی ترجمه‌های دیگر، نیاز نیست. ترجمه‌های متعدّد از یک متن، اولاً اهمیت آن را می‌رساند، ثانیاً، به غنای زبان کمک می‌کند. به خاطر بیاوریم که مثلاً از گیتا، تاکنون به زبان انگلیسی، بیش از صد ترجمه انجام گرفته است، و کتاب شازده کوچولو اثر آنتوان دو سنت اگزوپری نیز تاکنون شش ترجمه به این زبان یافته است، و از این مثال‌ها بسیار می‌توان آورد.

۶ - متن اصلی، گاهی آنقدر خلاصه تنظیم شده که به معما می‌ماند، اما این وضعیت، همان منظور مؤلف است که کتاب را بیشتر برای معلّم و مرور او نوشته است، گرچه، همان گونه که قبلاً هم اشاره رفت، هر کس که مایل به منطقی بودن است باید این معماها را به سادگی درک کند.

۷ - از آوردن معادل‌های فارسی لغات و اصطلاحات متن خودداری کرده‌ایم، چه این ادعا را داریم که تمام لغات و اصطلاحات متون منطقی قدیم مدّت‌هاست فارسی شده‌اند، یعنی، در ادبیات فارسی جا افتاده‌اند، و آوردن معادل فارسی آنها تنها به گمراهی و عدم درک صحیح منظور منطقی می‌انجامد. این اصطلاحات برای دانشجو و محقّق منطق و فلسفه، حتّی ادبیات، و به طور کلی هر طالب علم و معرفتی یا آشناست یا باید آشنا باشد.

۸ - با توجّه به مطالب پیشین، در این ترجمه دو هدف مدّ نظر بوده است، یکی، اینکه اصطلاحات را به فارسی تبدیل نکنیم و آنها را همان گونه که در متن آمده‌اند بیاوریم، و دیگر، اینکه ترجمه را به همان اختصار متن اصلی آماده کنیم.

۹ - در غیر اصطلاحات هم، کوشش بر این بوده که تا آنجا که ممکن است، از لغات به کار رفته در متن اصلی، که همان طور که گفتیم، آشناتر از کلمات فارسی معادل آنها هستند، استفاده شود.

۱۰ - ترجمه از متنی انجام گرفته که نام و نشان آن این است:

التَّنْقِیْحُ فِی الْمَنْطِقِ، تألیف صدرالدین محمد شیرازی (ملاصدرا)، تصحیح و تحقیق: غلامرضا یاسی پور، به اشراف استاد سید محمد خامنه‌ای، مقدمه: دکتر احد فرامرز قراملکی، چاپ اول، بهار ۱۳۷۸، از انتشارات: بنیاد حکمت اسلامی صدرا.

لازم است در مورد این متن از دانشمندان و آشنایانی که هر یک به نحوی در سازمان‌دهی آن سهمی داشته‌اند تشکر کنم. اظهار تشکری که در متن چاپ شده به علت بیماری این جانب و عدم دسترسی بنیاد به بنده، در هنگام چاپ، از قلم افتاده است. این دانشمندان عبارت‌اند از:

الف: آیه الله سید محمد خامنه‌ای که بر کتاب اشراف داشته‌اند.

ب: آقای دکتر احد فرامرز قراملکی که مقدمه مفصل کتاب را نوشته‌اند.

ج: ویراستاران محترم کتاب آقایان دکتر مقصود محمدی و دکتر سید حسین موسویان که نامشان از شناسنامه کتاب افتاده است.

د: حجت الاسلام و المسلمین آقای حسن واعظی و آقای سعید صالحی اقدام که در تصحیح اولیه کتاب سهم بوده‌اند.

همان طور که گفته آمد نبود این سپاس‌ها در چاپ اول متن اصلی به علت بیماری طولانی پدرت این بنده بود که مدت‌های مدید به درازا کشید، به طوری که خود بنده هم کتاب چاپ شده را چند سال بعد از انتشار آن ملاحظه کردم.

۱۱ - اکنون، به ذکر تاریخ مختصری از منطق و ریاضی و چگونگی ورود به منطق ریاضی و مختصری از این علم می‌پردازیم، و با تشکر از اولیای حسینیّه ارشاد که به نشر این کتاب همت

گماشتند، خواننده را به خدا می سپاریم.

۱۲ - منطق قدیم و ریاضیات^۱:

همچنان که موضوع جمال شناسی را «زیبایی» و
موضوع اخلاق را «خیر» معین می کند موضوع منطق را
«صدق» مشخص می نماید. «فرگه»

شیخ الرئیس ابوعلی سینا در کتاب اشارات و تنبیهات خود در فصل مربوط به قول شارح
و معرف در نهج اول در غرض از منطق چیزی شبیه به این مضمون می گوید:

آنچه از منطق اراده می شود این است که منطق آلت قانونی ای است که مراعات آن
آدمی را از گمراهی در فکر ممانعت می کند.^۲

و قطب الدین شیرازی در کتاب درة التاج چنین می گوید:

علم منطق شناختن معنی هایی است که از آن معانی رسیدن به انواع علوم مکتسب
ممکن باشد.

و در جای دیگر چنین:

اما علم منطق که حکیم ارسطاطالیس^۳ آن را مدون کرده است و از قوت به فدا
آورده، مقصور است بر دانستن کیفیت دانستن چیزها، و طریق اکتساب مجهولات.

۱ - مقاله منطق قدیم و ریاضیات، غلامرضا یاسی پور، مجله ریاضی برهان، شماره ۱، انتشارات مدرسه

۲ - المراد من المنطق ان یكون عند الانسان آلة قانونية تعصمه مراعاتها عن ان یضل فی فکره.

۳ - ارسطو "Aristotle"

شیخ اشراق در حکمة الاشراق خود در فایده منطق چنین مقرر می‌کند:

من خود به آنچه یافته‌ام باور دارم و از لحاظ خود نیازی به برهان و استدلال ندارم و اگر استدلال و برهانی اقامه کرده‌ام، در مقام تعلیم کرده‌ام.

در فرهنگ اخوان الصفا منطق با ریاضیات پیوسته است، چه همان گونه که ریاضیات آدمی را از محسوس به معقول رهنمون است، منطق نیز نقش واسطه را میان طبیعیات و مابعدالطبیعه ایفا می‌کند.

در تاریخ منطق بر آن‌اند که هندیان و یونانیان نخستین کسانی بوده‌اند که نظریه‌های منطقی را خلق کرده‌اند. ارسطو در اواخر اثری که امروزه ابطال‌های سوفسطائی^۱ نامیده می‌شود، ظاهراً ادعا می‌کند که موضوع منطق را او به وجود آورده است. اما به نظر نمی‌رسد که این مطلب یک باره درست باشد، چه فی‌المثل افلاطون در کتاب جمهور^۲ چنین می‌گوید:

یک چیز در یک زمان، نسبت به جزء خودش، و در رابطه با همان چیز، نمی‌تواند به دو طریق متقابل عمل کند یا بر آن عمل شود، یا دو چیز متقابل باشد.

ارسطو نیز ادعا می‌کند که محقق‌ترین تمام اصول عبارت از این است که:

یک صفت ثابت نمی‌تواند در یک زمان و از لحاظ یکسان به یک شیء هم متعلق باشد هم نباشد.

اصل اخیر، شکل ارسطویی قانون عدم تناقض^۳ است و آدمی را وسوسه می‌کند که بگوید ارسطو نه تنها این قانون بلکه بسیاری از نظریاتش در منطق را از پیشینیانش دریافت کرده است. با وجود این، باید در مقابل این وسوسه ایستادگی کرد زیرا افلاطون این نکته را به طور گذرا بیان کرده و مدرکی در دست نیست که او، یا شخص دیگری قبل از ارسطو، کوششی در تنظیم قواعد

استنتاج صحیح کرده باشد. بنابراین می‌توانیم ادعای ارسطو را بپذیریم و این سؤال را مطرح کنیم که چه چیزی او را به «خلق» منطق رهنمون شده است؟

ارسطو در جمله آغازگر و معروف کتاب مابعدالطبیعه^۱ ی خود چنین می‌گوید:

تمام انسان‌ها بالطبیعه مایل به دانستن‌اند.

و در رابطه با همین دانستن بود که دو فصل مهم ریاضیات و سفسطه در کتاب دانش بشری نوشته، و نیاز به تدوین منطق در رابطه با این دو فصل احساس شد.

یونانیان قدیم به هندسه اهمیت بسیار می‌دادند و مشهور است که بر سر در آکادمی افلاطون به زبان یونانی نوشته شده بود «هر کس هندسه نمی‌داند داخل نشود» نیز همو می‌گوید:

خداوند همواره به کار هندسه مشغول است.

اما ادعای ارسطو در مورد به وجود آورنده منطق، بر این مبنا قرار دارد که او اولین کسی بوده که قوانین موجود منطق را به طور دقیق تنظیم کرده است. در حقیقت ارسطو نظریه قیاس^۲ را، که امروزه می‌دانیم تنها قسمت کوچکی از منطق است، تنظیم کرده، گرچه بسیاری از فلاسفه شیفته آن، چنین پنداشته‌اند که این نظریه قسمت اعظم (یا حتی تمام) منطق است.

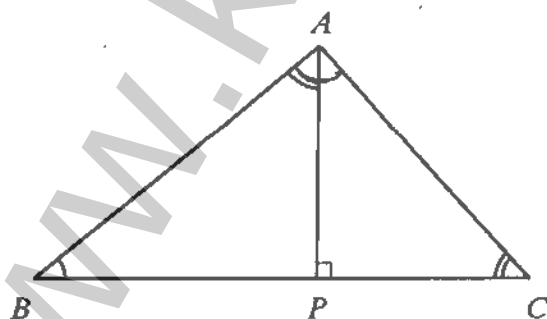
همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، یکی از انگیزه‌های مهم بررسی منطق احتمالاً از میل غلبه به پارادوکس^۳‌ها و نمودن فساد مغالطه یا سفسطه‌ها به وجود آمده است، چه در آن زمان‌ها تعداد زیادی پارادوکس و مغالطه کشف شده بود که بعضی از آنها مشکلاتی بودند که از استعمال (یا بد به کار بردن) زبان به وجود آمده بودند و بعضی از آنها با مشکلاتی بیشتر ریاضی سر و کار داشتند. ارسطو مانند افلاطون سفسطه را دانشی توصیف می‌کند که نه واقعی بلکه ظاهری است، و همچنان که طلا می‌تواند حقیقی یا تقلبی باشد، براهین نیز می‌توانند حقیقی یا کاذب باشند. ابوعلی در رساله منطق دانشنامه علایی خود در بخشی با عنوان «وصیت‌ها که از

مغالطات ایمنی دهند»، چنین می‌گوید:

وصیت می‌کنم به اصلی چند، تا از غلط اندر قیاس ایمنی افتد، و حاجت نیاید به
درازا کشیدن سخن، و یاد کردن همه اسباب مغالطه.

مقاله سوم کتاب حکمة الاشراق سهروردی نیز در باب مغالطات است.
اما پارادوکس، به یک معنی، راست کج‌نما و مدح شبیه به ذم یا نادرستی که هنوز
نادرستیش به درستی معلوم نشده، است. در توضیح این مطلب، دو مثال مشهور را ذکر می‌کنیم.

مثال ۱: هر دانش‌آموزی در ایام تحصیلش با قضیه‌ای که نام فیثاغورس دارد، یعنی این قضیه که
مجموع مربعات اضلاع کوچک‌تر هر مثلث قائم‌الزاویه برابر مربع وتر آن است، برخورد می‌کند.
گرچه ممکن است اولین کسی که این قضیه را بیان کرده فیثاغورس (۵۶۶ - ۴۹۷ ق. م.) نبوده
باشد. اما تصور می‌رود که او اولین کسی بوده که با استفاده از مثلث‌های متشابه آن را ثابت کرده
است.



در شکل فوق ABC مثلثی قائم‌الزاویه در A ، و AP عمودی از A بر BC است. از زوایای
مساوی نشان داده شده در شکل، نتیجه می‌شود که مثلث‌های ABC ، PBA و PAC متشابه‌اند.
در این صورت

$$\frac{AC}{CP} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CP$$

$$\frac{AB}{BP} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BP$$

اکنون با جمع این دو رابطه داریم

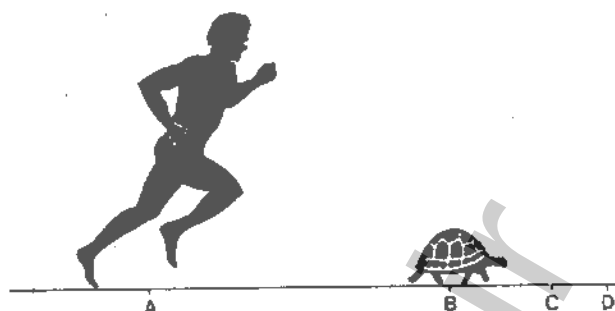
$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC (BP + CP) \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

در وهله اول، جمیع این اعمال بی عیب به نظر می‌رسند، اما اشکال از اینجا ناشی می‌شود. که قضایای مربوط به مثلث‌های متشابه به نوبه خود با تقسیم اضلاع به اجزاء، به طوری که m جزء از یک ضلع برابر n جزء از ضلع دیگر باشد، ثابت شده بودند، و در این مورد فرض مأخذ این است که هر طول بر حسب نسبت دو عدد صحیح قابل بیان است.

این کشف که قطر یک مربع واحد را نمی‌توان بدین سان بیان کرد پارادوکسی بود که مکتب فیثاغورسی را در هم ریخت، زیرا این پارادوکس نه تنها اثبات‌های قضایای هندسی پذیرفته شده‌شان را بی‌بنیان می‌کرد بلکه این عقیده‌شان به عدد، به عنوان اصل متحدکننده حساب و هندسه را نیز باطل می‌نمود. به همین مناسبت مبهوت و حیران از این پارادوکس و ترسان از اینکه مبادا برملا شود، سوگند خوردند که هرگز این راز را آشکار نکنند.

مثال ۲: پارادوکس دیگری که به وجود آمد در مورد آشیل^۱، دونده سریع، و لاک‌پشت بود. استدلال در این مورد چیزی شبیه زیر است:

اگر آشیل از نقطه A ، که به فاصله معینی در عقب لاک‌پشت، که در نقطه B قرار دارد، شروع به حرکت کند، و هر دو در یک مسیر و یک زمان و با ماکسیمم سرعت‌های مربوط به خودشان حرکت کنند، زمانی که آشیل به B می‌رسد لاک‌پشت به C رسیده است. سپس، زمانی که آشیل به C برسد، لاک‌پشت به D رسیده است. در هر حالت، فاصله لاک‌پشت از آشیل کمتر می‌شود، اما استدلال می‌تواند برای همیشه، روی فواصل کوچک‌تر و کوچک‌تر ادامه یابد. بنابراین آشیل هرگز به لاک‌پشت نمی‌رسد، که نتیجه‌ای واضحاً دروغ است.



نیز، پارادوکس‌های دیگری از مفهوم یونانی بینهایت به وجود آمد، و این مطلب واضح شد که مشکلات ناشی از چنین پارادوکس‌هایی نیاز به توضیح طبیعت استدلال و بررسی مجدد مفروضاتی را که استدلالات موجود بر پایه آنها بنا شده بودند، ایجاد می‌کند. نظریه قیاس ارسطویی مبنایی برای استدلال به دست می‌داد که به مدت بیست قرن تنها با تغییراتی نسبتاً جزئی^۱ باقی ماند، گرچه این نظریه از حل بسیاری از پارادوکس‌هایی که در آن زمان شناخته شده بودند ناتوان بود.

اساس این نظریه بر این فرض است که تمام استدلالات صحیح را می‌توان در گزاره‌هایی از یک صورت بخصر ص، که آن را قضیه موضوع - محمولی^۲ می‌نامیم، تحلیل کرد. مثال‌های این قضیه عبارت‌اند از:

تمام انسان‌ها میرا هستند.

هیچ ماهی‌ای پرنده نیست.

بعضی یونانی‌ها شریزند.

بعضی زن‌ها مادر نیستند.

در هر حالت، و در جمله مربوطه، موضوع^۳ی وجود دارد که برای تعیین اینکه تمام اعضای یک طبقه یا صرفاً بعضی از اعضای یک طبقه، توسط فعلی به محمول^۴ی مربوط شده‌اند، مسوّر شده است. اگر موضوع و محمول را، به ترتیب، با S و P نمایش دهیم، امکانات زیر را خواهیم

۱ - البته منهای کارهای منطق‌پژوهان مسلمان و ایرانی که تحقیقات مفصلی در این مورد کرده‌اند.

Subject - ۳

Subject-Predicate Proposition - ۲

Predicate - ۴

داشت:

- تمام S ها P اند.
- هیچ S ی P نیست.
- بعضی S ها P اند.
- بعضی S ها P نیستند.

این امکانات با چهار مثال قبل مان متناظرند، و، به ترتیب، موجبه کلیه^۱، سالبه کلیه^۲، موجبه جزئیه^۳، سالبه جزئیه^۴، و به طور کلی قضایای محصوره یا مسوره نامیده می شوند. ابوعلی در دانشنامه در مورد قضایای محصوره چنین می گوید:

یا پیدا کرده بود چندی حکم، و این را محصور خوانند، و لفظ پیداگر چندی را سور^۵ خوانند. و محصور چهار گونه است:

یکی آن است که حکم بر همه کرده بود به اثبات، چنان که گویی: هر چه مردم بود حیوان بود، یا گویی: هر مردمی حیوان است، و این را کلی موجب خوانند، و سور وی لفظ هر چه و هر بود.

و دیگر آن است که حکم بر همه کرده باشد به سلب و نفی، چنان که گویی: هیچ مردم جاودانه نیست، و این را کلی سالب خوانند و سور وی لفظ هیچ بود.

و سیوم آن است که حکم بر برخی کرده باشد به اثبات و هستی، چنان که گویی: برخی مردم دبیر است، و این را جزوی موجب خوانند و سور وی لفظ برخی بود.

و چهارم آن است که حکم بر برخی کرده باشد به نفی و نیستی، چنان که گویی: نیست برخی مردم دبیر، و این را جزوی سالب خوانند، و سور وی لفظ نیست برخی بود.

برای ارسطو هر استدلال^۶ مجموعه ای از چنین قضایایی است، که به طریق معینی با هم

۲ - Particular Negative

۴ - Particular Negative

۶ - Argument

۱ - Particular Affirmative

۳ - Particular Affirmative

۵ - حصار گرد شهر، Quantifier

مربوط شده‌اند. از این گذشته، ارسطو بر این فرض بود که یک استدلال درست را می‌توان به استدلالات اساسی متوالی‌ای که هر یک تنها از سه قضیه ترکیب شده، و به قیاسات^۱ موسوم‌اند، تجزیه کرد. در هر قیاس، دو قضیه، مقدمات^۲، و سومی نتیجه^۳ را تشکیل می‌دهند. در این مورد در دانشنامه چنین آمده است:

قیاس بر دو گونه است یکی را اقترانی خوانند و یکی را استثنایی^۴.

مثالی از قیاس اقترانی یا، به طور ساده، قیاس می‌آوریم:

اگر تمام انسان‌ها میرا باشند.

و تمام یونانی‌ها انسان باشند.

در این صورت تمام یونانی‌ها میرا هستند.

با به کار بردن S و P برای موضوع و محمول نتیجه، یعنی، «تمام یونانی‌ها میرا هستند»، توجه می‌کنیم که مقدمه اول شامل P و مقدمه دوم شامل S است. P و S، به ترتیب، به حد کبری یا اکبر^۵ و حد صغری یا اصغر^۶، و بنابراین، مقدمه شامل P به مقدمه کبری^۷، یا، به طور خلاصه، کبری، و مقدمه شامل S به مقدمه صغری^۸، یا، به طور خلاصه، صغری، معروف‌اند. حد^۹ «انسان» که در هر یک از مقدمات ظاهر می‌شود اما در نتیجه ظاهر نمی‌شود، به حد وسط یا اوسط^{۱۰} موسوم است و آن را با M نمایش می‌دهیم. به این ترتیب، استدلال مورد بحث به صورت زیر درمی‌آید:

Premises - ۲

Syllogisms - ۱

Conclusion - ۳

۴ - قیاس استثنایی یا Modus Ponens همان است که در منطق جدید آن را به صورت زیر علامتی می‌کنند:

$$p \Rightarrow q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

Minor - ۶

Major - ۵

Minor Premiss - ۸

Major Premiss - ۷

Middle Term - ۱۰

Term - ۹

اگر تمام M ها P باشند.
و تمام S ها M باشند.
در این صورت تمام S ها P اند.

کار مهم و اصلی ارسطو تحقیق در تمام صورت‌های ممکن منطقی بود. تعداد این صورت‌ها بسیار است، گرچه تنها بعضی از آنها به صورت‌های درست منجر می‌شوند. صورت درست را منتج^۱ و صورت نادرست را عقیم^۲ می‌گویند.
به عنوان مثال، قیاسی که هم اکنون مورد بحث قرار گرفت دارای صورت زیر است:

MP
SM
SP

S و P می‌توانند در مقدمات مربوط به خودشان، یا به عنوان موضوع یا به عنوان محمول، ظاهر شوند، در حالی که حدّ وسط متناظر با جزء دیگر مقدمه است. (به خاطر داشته باشید که S و P، به ترتیب، موضوع و محمول نتیجه‌اند.) این مطلب چهار ترکیب را به دست می‌دهد، که به چهار شکل قیاس^۳ یا اشکال اربعه^۴ موسوم‌اند:

IV	III	II	I	شکل
PM	MP	PM	MP	مقدمه کبری
MS	MS	SM	SM	مقدمه صغری
SP	SP	SP	SP	نتیجه

Invalid - ۲

Valid - ۱

Figure of Syllogism - ۳

۴ - قدام در این مورد حفظ ابیات زیر را توصیه می‌کردند:

وضع به کبری گرفت شکل نخستین شمار
رابع اشکال را عکس نخستین بسیار

اوسط اگر حمل یافت در بر صغری و باز
حمل به هر دو دؤم، وضع به هر دو سؤم

در هر یک از این اشکال، قضایا می‌توانند کلیه یا جزئی، موجه یا سالبه باشند. به این ترتیب $256 (= 4 \times 4 \times 4 \times 4)$ قیاس ممکن وجود دارد، گرچه بسیاری از آنها استدالات نادرستی هستند که در آنها نتیجه از مقدمات به دست نمی‌آید. در شکل I، مثالی از چنین قیاسات نادرست عبارت است از:

اگر هیچ M ی P نباشد،
و تمام S ها M باشند،
در این صورت بعضی S ها P اند.

به طور کلی شرایط عمومی انتاج اشکال، عبارت از سالبه نبودن هر دو مقدمه و جزئی نبودن هر دو مقدمه است و شرایط خاص هر شکل را باید در کتب مفصل منطق پی گرفت. به علت اینکه قیاس ارسطویی ارتباط کمی با استدلال ریاضی دارد آن را در مطالب مربوط به ریاضیات پی نمی‌گیریم، اما اهمیت دارد که به خاطر داشته باشیم که عمل دسته‌بندی کردن تمام صورت‌های درست قیاس، آن قدر مهم بود که ادعای ارسطو را راجع به اینکه مؤسس علم منطق است به حق توجیه کند.

اما پیش از آنکه کار ارسطو را ترک کنیم، باید به ذکر مزیت تقابل^۱ که ارتباطی با اثبات در ریاضیات دارد، بپردازیم. با معلوم بودن چهار نوع قضیه

موجه کلیه	(تمام S ها P اند.)
سالبه کلیه	(هیچ S ی P نیست.)
موجه جزئی	(بعضی S ها P اند.)
سالبه جزئی	(بعضی S ها P نیستند.)

و در نظر گرفتن یک S و P در سراسر عملیات، واضح می‌شود که این قضایا در روابط بخصوصی با یکدیگر قرار می‌گیرند، اما درباره این روابط چه می‌توان گفت؟

دو قضیه را متناقضان^۱ می‌گویند اگر وقتی یکی از آن دو راست باشد دیگری دروغ باشند و برعکس. در این مورد تفتازانی در تهذیب المنطق چنین می‌گوید:

تناقض، اختلاف دو قضیه و چنان است که از صدق یکی از آنها کذب دیگری ذاتاً لازم شود، و برعکس^۲.

به عنوان مثال، قضایای زیر را در نظر می‌گیریم:

تمام انسان‌ها دروغ‌گویند. (موجبه کلیه)
 بعضی انسان‌ها دروغ‌گو نیستند. (سالبه جزئیه)

در این صورت اگر قضیه اول راست باشد، قضیه دوم باید دروغ باشد و برعکس. نیز اگر قضیه اول دروغ باشد، قضیه دوم باید راست باشد، و برعکس. به این ترتیب، این قضیه‌ها متناقض‌اند.

دو قضیه را متضادان^۳ می‌گویند اگر هر دو نتوانند راست باشند، اما ممکن باشد که هر دو دروغ باشند. به این ترتیب، قضیه متضاد

تمام انسان‌ها دروغ‌گویند. (موجبه کلیه)

قضیه

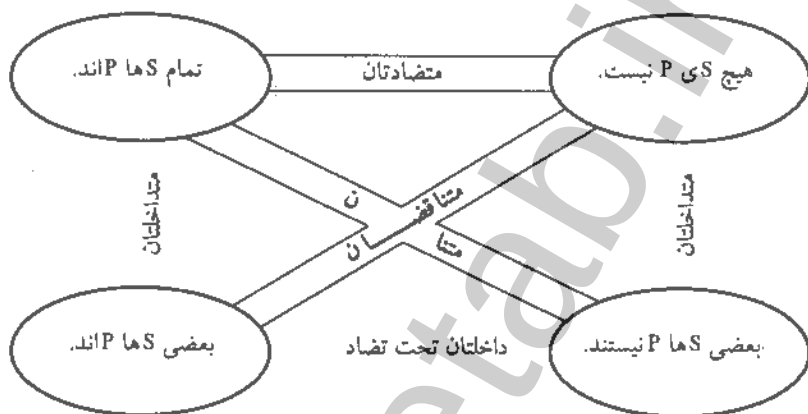
هیچ انسانی دروغ‌گو نیست. (سالبه کلیه)

Contradictories - ۱

۲ - التناقض اختلاف القضیتین بحیث یلزم لذاته من صدق کلّ منهما کذب الاخری، و بالعکس.

Contraries - ۳

است، چه این دو قضیه نمی‌توانند هر دو راست باشند، اما در صورتی که بپذیریم که بعضی، اما نه تمام، انسان‌ها دروغ‌گویند، هر دو دروغ‌اند. این روابط را می‌توانیم توسط نموداری نمایش دهیم، گرچه (تا آنجا که می‌دانیم) ارسطو چنین نکرده است.



ضلع بالای «مربع» متضادها و اقطار آن متناقض‌ها را نشان می‌دهد، و اضلاع باقی‌مانده آن روابط بین موارد زیر را بیان می‌کنند:

تمام S ها P اند. و بعضی S ها P اند.
هیچ S ی P نیست. و بعضی S ها P نیستند.
بعضی S ها P اند. و بعضی S ها P نیستند.

ارسطو چنین فرض کرده که در دو حالت اول فوق، قضیه دوم (قضیه‌های پایین نمودار) را می‌توان از قضیه اول، استنتاج کرد. بعدها، منطق‌یون نام متداخلتان^۱ را به این رابطه دادند. اما، ممکن است به این فرض، با توجه به این مطلب که «مجموعه تمام S ها» ممکن است تهی باشد، اعتراض کرد. ارسطو این را نیز مطرح کرده که از رابطه بین

بعضی Sها P اند. و بعضی Sها P نیستند.

که بعداً به داخلاتان تحت تضاد^۱ معروف شده، آگاه است.

در اینجا سؤال دیگری مطرح می‌شود و آن این است که معمولاً چه وقت مجاز است که در یک قضیه S و P را با یکدیگر تعویض کنیم؟ عکس یا عکس مستوی^۲ قضیه‌ای به صورت SP همان قضیه است که در آن P و S با هم عوض شده‌اند، و این تعویض در حالت کلی، تنها در قضیه‌ای که به یکی از دو صورت زیر باشد مجاز است:

هیچ S ی P نیست. (سالبه کلیه)
بعضی Sها P اند. (موجبه جزئیه)

در این مورد منطق‌یون اسلامی و، فی‌المثل، تفتازانی در تهذیب، عکس مستوی را تعویض طرفین قضیه با بقای صدق و کیف تعریف کرده‌اند.^۳ به این ترتیب، عکس موجبه کلیه را موجبه جزئیه و عکس موجبه جزئیه را موجبه جزئیه و عکس سالبه کلیه را سالبه کلیه دانسته‌اند و برآن‌اند که سالبه جزئیه عکس لازم الصدق ندارد و در این باره این مثال را می‌آورند که عکس «بعضی انسان‌ها ریاضیدان نیستند»، «بعضی ریاضیدان‌ها انسان نیستند» می‌شود که صد البته ناراست است.

در مورد دو صورت مجاز مذکور در فوق، فی‌المثل، اگر راست باشد که

هیچ پرنده‌ای پستاندار نیست.

در این صورت این نیز راست است که

هیچ پستانداری پرنده نیست.

نیز، اگر

بعضی یونانی‌ها دروغگو باشند.

در این صورت

بعضی دروغگوها یونانی‌اند.

و در مورد صور دیگر، مثلاً، در حالت موجبه کلیه، فی‌المثل،

تمام انسان‌ها حیوان هستند.

ممکن نیست که جای انسان و حیوان را با هم عوض کنیم و قضیه‌ای راست به دست آوریم، و همین مطلب در مورد حالت سالبه جزئیه نیز برقرار است. البته این حرف بدین معنی نیست که هیچ‌گاه ممکن نیست که طبق این سخن، در یک موجبه کلیه جای S و P را تعویض کنیم - فی‌المثل، تمام Sها Sاند را بررسی کنید - اما نمی‌توانیم این عمل را خود به خود، آن‌گونه که در حالت سالبه کلیه یا موجبه جزئیه برقرار است، انجام دهیم.

در مقابل عکس مستوی عکس نقیض^۱ را داریم که در مورد آن، بنا به قول تفتازانی، «تبدیل نقیض طرفین قضیه با بقای صدق و کذب»^۲ می‌کنیم.

اهمیت دارد که به این موضوع توجه کنیم که نظریه قیاس ارسطویی اساساً منطق طبقات^۳ یا رده‌هاست که در آن باید به جای «متغیرها»ی S و P طبقات اشیایی را، چون تمام انسان‌ها، بعضی یونانی‌ها، دروغگوها، پستاندارها، و غیره، یا گاهی، یک شیء منحصر به فرد (که آن را به

۱ - Contraposition

۲ - عکس النقیض، تبدیل نقیضی الطرفين مع بقاء الصدق و الکيف.

۳ - Logic of Classes

عنوان طبقه‌ای که یک عضو دارد در نظر می‌گیریم)، قرار دهیم. اما معروف است که منطقی باستانی یا منطق رواقیون^۱، که توسط زنون^۲ (۴۹۵ - ۴۳۵ ق.م.) تأسیس شده، وجود داشته که اساساً منطق قضایا^۳ بوده و، چنان که، می‌تواند مقدم حقیقی منطق امروزی به شمار رود. منطق رواقی از منطق مکتب مگاری^۴، که توسط اقلیدس^۵ (۳۶۰ - ۳۰۰ ق.م.) تأسیس شده بود، به وجود آمد. این اقلیدس شاگردی به نام اوپولیدس^۶ داشت که بیشتر معروفیتش به خاطر کشف تعدادی پارادوکس است که قابل توجه‌ترینشان معروف به «پارادوکس کاذب یا دروغگو»^۷ است که صورت امروزی آن چنین است:

این جمله دروغ است.^۸

فرض می‌کنیم که این جمله راست باشد، در این صورت راست است که راست نیست. به همین ترتیب، فرض می‌کنیم که این جمله دروغ است، در این صورت نتیجه می‌شود که راست است. (این پارادوکس بسیار معروف شد و حتی در اولین نامه‌ای که پولس مقدس^۹ به تیتوس^{۱۰} نوشته نیز ذکر شده است.) «پارادوکس کاذب» از این حقیقت که جمله آن به طریق خاصی به خودش برمی‌گردد ناشی شده است. در این مورد تنها در سال‌های اخیر بوده که تفاوت بین زبان^{۱۱} و ماورای زبان^{۱۲} که در آن زبان را مورد بحث قرار می‌دهیم، آشکار شده است. البته در بسیاری از حالات بازگشت به خود^{۱۳} پارادوکسی روی نمی‌دهد. فی‌المثل، از جمله فارسی زیر هیچ اشکالی به وجود نمی‌آید:

این گزاره دقیقاً شامل هفت کلمه است.

Zenon - ۲	Stoics - ۱
Megarian School - ۴	Logic of Propositions - ۳
Eubulides - ۶	Eukleides - ۵
	Liar Paradox - ۷
کل کلامی کاذب.	۸ - این قضیه در منطق اسلامی چنین است:
Titus - ۱۰	St. Paul - ۹
Metalanguage - ۱۲	Language - ۱۱
	Self-Reference - ۱۳

اما ممکن است این سؤال را مطرح کنیم که در صورتی که این جمله به زبان چینی ترجمه شود چه اتفاقی می افتد؟

متأسفانه، تنها قسمت‌هایی از نوشته‌های مگاری - رواقی باقی مانده و، بنابراین، چنین پیش آمده که منطق قدیم به مقدار زیادی به معنی منطق قیاسی ارسطویی باشد. این اقلیدس را، که نامش بیش از یک بار در نوشته‌های افلاطون ذکر شده، نباید با مؤلف کتاب مقدمات یا اصول^۱، یعنی اقلیدس^۲، ریاضیدان یونانی، که مکتب اسکندریه را در حدود ۳۰۰ قبل از میلاد به وجود آورد، اشتباه کرد (کاری که بعضی از فلاسفه قرون وسطی کردند). مقدمات بالغ بر سیزده جلد می شود که از آن نه جلد به هندسه مسطحه و فضایی و چهار جلد به حساب اختصاص دارد. بسیاری از مواد آن، تنظیم سیستماتیک ریاضیاتی است که پیش از او معلوم بوده، و در حقیقت کار بیش از یک فرد است. (حتی مطرح شده که چندین نویسنده عمداً از نام اقلیدس استفاده کرده‌اند، مانند نام بورباکی^۳ که در ایام اخیر چنان به کار رفته است). دقیقاً مشخص نشده که قصد اقلیدس از نوشتن مقدمات چه بوده است، اما نتیجه مهم آن به عنوان «بزرگ‌ترین کتاب درسی تمام ایام» تعریف شده است، و در حقیقت، از این بازمانده بیش از ۲۰۰۰ سال قبل، در قرن اخیر نیز به طور منظم در مدارس استفاده شده است. در این کتاب، کار با ۲۳ تعریف^۴، ۵ اصل موضوع^۵ و ۵ اصل متعارفی^۶ آغاز، و از آنها قضایای^۷ بسیاری استنتاج می شود. این کار تمثیل بسیار ابتدایی ای است از آنچه امروزه روش اکسیوماتیک^۸ نامیده می شود و با پیشرفت‌های جدید منطق ریاضی قرابت بسیار دارد. در اینجا از آوردن فهرست تمام تعاریف و ... خودداری می کنیم، اما یکی دو مثال، از جمله مثال مربوط به اصل توازی را، که بعداً به آن رجوع خواهیم کرد، به دست می دهیم.

مثال‌هایی از تعاریف:

Euclid - ۲
Definition - ۴
Common Principle - ۶
Axiomatic Method - ۸

Elements - ۱
Bourbaki - ۳
Postulate - ۵
Theorems - ۷

نقطه چیزی است که جزء ندارد.

خط طولی بدون پهناست.

سطح چیزی است که تنها طول و عرض دارد.

در اینجا بد نیست که در این موارد نگاهی به تعاریف ابوریحان بیرونی، دانشمند بزرگ اسلامی، داشته باشیم. این دانشمند در کتاب التفهیم خود که کتابی مقدماتی است و برای تدریس به ریحانه بنت الحسین الخوارزمی که بنا به قول ابوریحان خواننده او بوده، به «طریق پرسیدن و جواب دادن بر رویی که خوبتر بود و صورت بستن آن آسان تر»^۱ نوشته شده، در مورد سطح و خط و نقطه، به ترتیب، چنین می گوید:

سطح چیست؟ جسم ناچار بینهایت بُود به همه سوها، و نهایت او سطح است و این نام را از بام خانه گرفتند. و نیز او را بسیط گویند یعنی گستریده از برای سطح بر جسم گسترده است.

خط چیست؟ اگر بسیط را نهایت باشد آن نهایت او ناچار خطی باشد و آن خط طولی باشد بی عرض.

نقطه چیست؟ چون خط را نهایت باشد نهایت او نقطه بُود و نقطه کمتر از خط باشد به یک بعد و خط را جز طول نیست.

اما، مثال هایی از اصول موضوع:

تمام زوایای قائمه برابرند.

اگر خط راستی دو خط مستقیم را قطع کند و زوایای داخلی واقع در یک طرف آن کمتر از دو قائمه باشد، در این صورت دو خط مستقیم به طور نامحدود رسم شده مزبور، یکدیگر را در همان طرف تلاقی می کنند.

مثال‌هایی از اصول متعارفی:

اگر مساوی‌ها به مساوی‌ها اضافه شوند، نتایج مساوی‌اند.
کل از جزء بیشتر است.

در واقع، اصل موضوع دومی که نقل شد، پنجمین اصل موضوع اقلیدس، و موسوم به اصل توازی^۱ است، زیرا می‌توان نشان داد که این اصل معادل اصل زیر می‌باشد:

از یک نقطه معلوم خارج یک خط مستقیم معلوم، تنها یک خط می‌توان موازی آن خط مستقیم رسم کرد.

هم این اصل موضوع^۲ هم اصل متعارفی «کل از جزء بیشتر است» تا زمانی که طرح‌های ریاضی قرن نوزدهم، سازمان‌های هندسی^۳‌ای به دست دادند که در آنها راست^۴ نبودند، به عنوان حقایق مورد قبول در نظر گرفته می‌شدند.

از موارد مهم قابل اشاره یکی این است که کتاب مقدمات اقلیدس از تمرین خالی بود. گویی اقلیدس جمیع مشکلات را برطرف و تمام مسائل را حل کرده و چیزی برای دیگران باقی نگذاشته بود.

به هر حال، اکنون آنچه را که منطق قدیم^۵ نامیدیم تحت سه عنوان اصلی می‌آوریم:

- (۱) نظریه قیاس ارسطویی
- (۲) منطق مگاری - رواقی
- (۳) مقدمات اقلیدس

۱ - Parallel Postulate

۲ - در مورد این اصل بعضی از ریاضیدان‌های ایرانی - اسلامی، از جمله خیام نیشابوری مطالب گرانمایی مطرح کرده‌اند که منجر به هندسه‌های نااقلیدسی می‌شوند. ۳ - Geometric Structures

۴ - Ancient Logic

۵ - True

عنوان (۱) نظریهٔ جامعی بر مبنای قیاس به دست می‌دهد که برای بیست قرن تأثیر عظیمی بر فلسفه و الهیات داشت، (۲) اولین کوشش در تحلیل پارادوکس‌ها را به دست می‌دهد، اما از این موضوع چیز نسبتاً کمی باقی می‌گذارد، و (۳) نمایشی جامع و سیستماتیک و به صورت آکسیوماتیک از اغلب مطالبی که در قرون باستانی از هندسه و حساب شناخته شده بودند به دست می‌دهد.

در انتهای این بحث ابتدا دو سخن می‌آوریم یکی از سلطان الحکما، خواجه نصیر طوسی، و از آغاز کتاب اساس الاقتباس او، که تحت عنوان «ابتدای سخن در منطق» در تعریف و فایدهٔ منطق چنین می‌گوید:

و نه هر که کاری کند داند که چه می‌کند یا چه می‌باید کرد. بلکه بسیار کسان باشند که در کارها شروع کنند بر سبیل خبط. و همچنین باشد حکم کسانی که طلب علوم کنند و بر صناعت منطق واقف نباشند.

پس علم منطق شناختن معنی‌هایی است که از آن مغانی رسیدن به انواع علوم مکتسب ممکن باشد، و آنک از هر معنی به کدام علم توان رسید.

و دیگری از معلّم ثانی، ابونصر فارابی، که در آغاز فصل دوم کتاب احصاء العلوم خود در باب منطق چنین می‌گوید:

صناعت منطق، به طور کلی، قوانینی را به دست می‌دهد که پیروی از آنها باعث استقامت خرد می‌گردد، و در مواردی که ممکن است در بعضی از معقولات برای آدمی اشتباهی پیش آید او را به راه درست و حقیقت رهنمون می‌شود.

و سپس قول پیرس^۱ را متذکر می‌شویم که بر این است که «در حدود صد تعریف از منطق در دست است» و با این همه همچنان در اوّل وصف آن مانده‌اند، و بعد قول صدرالمتألهین را در تعریف

منطق می آوریم که می گوید:

منطق میزان ادراکی ای است که افکار را، برای دانستن صحیح از فاسدشان، با آن وزن می کنند.^۱

و سرانجام، و با این همه، با اینکه به این قول که

منطق بررسی استدلال است.

باور داریم با گفته شیخ محمود شبستری، در گلشن راز، این بخش از سخنان را ختم محمود می کنیم:

پس آنگه لمعه ای از نور تأیید	بُود فکر نکو را شرط تجرید
ز استعمال منطق هیچ نگشود	هر آن کس را که ایزد راه نمود

۱۳ - منطق جدید و ریاضیات^۲:

به خاطر اجتناب از عدم کفایت های زبان های طبیعی در
اهداف تحلیل منطقی، لازم است که زبان طبیعی به
نمادی دقیق تر ترجمه شود. «آلوزو هرچ»^۳

ارزیابی استدلالات ارائه شده در زبان فارسی یا هر زبان طبیعی دیگر، غالباً به علت طبیعت مبهم و دو پهلوی کلمات به کار رفته در آنها، ایهام ساختاری شان، اصطلاحات گمراه کننده ای که ممکن است در بر داشته باشند، شیوه استعاری بالقوه گیج کننده شان، و

۱ - المنطق فسطاس ادراکی بوزن به الافکار لیعلم صحیحها من فاسدها.

۲ - مقاله منطق جدید و ریاضیات، غلامرضا باسی پور، مجله ریاضی برهان، شماره ۲، انتشارات مدرسه

Alonzo Church - ۳

آشفته‌گی حاصل از مقصود عاطفی‌شان، مشکل است. حتی هنگامی که این مشکلات برطرف شوند، مسئله تشخیص درستی یا نادرستی استدلال همچنان باقی می‌ماند. برای اجتناب از این مشکلات برونی شایسته است که زبان علامتی مصنوعی^۱ بری از نقایص فوقی طرح شود، که بتوان در آن گزاره‌ها و استدلالات را علامتی کرد، و عهده‌دار این مهم موضوعی است که منطق علامتی یا سمبلیک^۲ نامیده می‌شود.

جورج بول^۳ (۱۸۱۵ - ۱۸۶۴) در آغاز فصل اول کتاب مشهورش به نام قوانین تفکر^۴، چنین تقریر می‌کند:

مقصود از مقاله زیر تحقیق در قوانین اساسی آن دسته از اعمال ذهن است که استدلال به کمک آنها انجام می‌گیرد، نمایش آنها در زبان علامتی یک حساب، و بر این مبنا، تأسیس علم منطق و بنای روش آن؛ تنظیم این روش به عنوان مبنای روش عمومی‌ای در کاربرد اصول ریاضی احتمالات، و بالاخره، جمع بعضی از دلالات محتمل مربوط به طبیعت و ساخت ذهن بشری از عناصر گوناگون صدقی که طی این تحقیقات آشکار می‌شوند.

اما در این تحقیقات اینکه چه چیز اصل است و چه فرع خیلی روشن نیست و به ناچار باید به قول پاتنم^۵ که

متجسس در ریاضیات باید حقیقت ریاضیات را به عنوان فرضی قبلی یا پیشینه فرض قبول کند، نه اینکه دنبال توضیح آن برود.

یا به گفته فرگه که

در حساب سر و کار ما با چیزهایی نیست که ... با خارج بیگانه باشند، بلکه با

چیزهایی است که مستقیماً با قوه عقلی ما ارتباط دارند و برای آن چنان روشن‌اند که گویی نزدیک‌ترین بسته آن‌اند.

عمل کنیم و در این مراحل، چنان که غالب ریاضیدان‌ها نمی‌ایستند، توقف نکنیم. در این مورد راسل به این موضوع اعتقاد داشت که ریاضیات در واقع همان منطق است. در واقع وی نشان داد که ریاضیات عبارت است از منطق و نظریه مجموعه‌ها، یعنی می‌توان با صبر و حوصله کافی و تعاریفی به قدر کافی طولانی، هریک از شاخه‌های ریاضیات را بر حسب منطق و نظریه مجموعه‌ها تعریف کرد و همه اثبات‌ها را در چهار چوب حساب احتمالات انجام داد.

در این صورت به منطق نمادی یا علامتی که به قول اندرتون^۱ مدلی ریاضی برای تفکر قیاسی است، یا حداقل در آغاز چنین بوده، می‌پردازیم، و به تعریف منطق رو می‌آوریم، و در تعریف به صدق آن می‌گوییم منطق دانش بررسی ساخت‌های نمونه صادق است، و در تعریف به استنتاج آن مطرح می‌کنیم که منطق دانش بررسی ساختمان‌های استنتاجی درست است.

منطق جدید، همان طور که به تفصیل ملاحظه خواهیم کرد، در رابطه با آنچه که به نام بحران در اصول ریاضیات نامیده شده، و در آغاز قرن بیستم، حضور و سرعت یافت. هر گونه کوشش در طرح سیستماتیک ریاضیات (یا هر علم دیگر) به مسئله انتخاب مفاهیم اساسی (اولیه) و اصولی که کل طرح بر آن مبتنی است، منجر می‌شود.

مسئله انتخاب و توجیه انتخاب مفروضات اولیه مزبور قاعداً در خارج علم مربوطه قرار می‌گیرد و به فلسفه و متدولوژی علم مربوط می‌شود.

بسیاری از اشخاص کوشیده‌اند ویژگی ریاضیات را، هم از لحاظ موضوع هم از لحاظ روش، تعریف کنند. موضوع ریاضیات به طور مداوم افزایش می‌یابد و با نظام‌های جدید غنی می‌شود، بنابراین، به جای اینکه به طور ساده به شمارش این نظام بپردازیم، باید طریقی در توضیف به کفایت محتویات نظریه‌های ریاضی بیابیم. در قرن نوزدهم، کوشش در مشخص کردن ریاضیات به عنوان علم کمیت انجام گرفت. اما امروزه باید بپذیریم که این تعریف بس محدودکننده است؛ و فی‌المثل، مفاهیم اساسی ریاضیات، چون نظریه گروه‌ها یا توپولوژی، را در بر نمی‌گیرد. این موضوعات با ساخت‌های اساسی‌ای سر و کار دارند که توجه ریاضیدان‌ها به

آنها، در خالص‌ترین صورت‌شان، تنها از پایان قرن گذشته به این طرف معطوف شده است. به این ترتیب، مشخص کردن ریاضیات با موضوعش مرتب در حال تغییر است و ممکن است آنچه که امروزه موضوع آن در نظر گرفته می‌شود فردا متغیر شود. اما مطالب مربوط به روش ریاضیات در اساس همان است که دو هزار سال پیش بوده، و از ریاضیدان این انتظار می‌رود که قضایای علم خود را ثابت کند، و در این مورد رابطه خوش تعریفی^۱ بین یک قضیه ریاضی و قضایایی که در اثبات این قضیه به آنها رجوع می‌شود، موجود است، و کار منطقی بررسی این رابطه می‌باشد.

اکنون با اشاره به اینکه منطق را علم بررسی استدلال خوب و بد نیز دانسته‌اند، به آن می‌پردازیم.

مورد استعمال عبارت «منطق» طی قرون متمادی به گونه وسیعی از نویسندگانی به نویسندگانی تغییر کرده است. اما چنین به نظر می‌رسد که موارد استعمال گوناگون مذکور دارای این قسمت مشترک باشند که منطقی که به صورت متداول توصیف شده، به طور مبهم، علم استنتاج لازم است، و تمایل فزاینده‌ای موجود است که عبارت «منطق» را به این حوزه محدود کنند.

ویژگی به گونه‌ای کمتر مبهم این حوزه، به این ترتیب است که عبارات اساسی شامل «اگر»، «در این صورت»، «و»، «یا»، «نه»، «جز اینکه»، «همه»، «هیچ»، «هر»، «آن» و غیره را، که سخن را با آنها آغاز می‌کنیم، می‌توان منطقی^۲ نامید. عبارات فوق در گزاره‌های مربوط به هر موضوعی ظاهر می‌شوند، و نمونه‌ای را که طبق آن سایر اجزاء خاص‌تر یک گزاره، طبق این عبارات اساسی به یکدیگر مربوط می‌شوند، می‌توان ساخت یا سازمان منطقی^۳ آن گزاره‌ها خواند. به عنوان مثال، گزاره‌های

هر میکربی حیوان یا سبزی است،

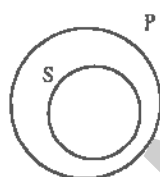
هر ایرانی شیعه یا سنی است،

دارای ساخت منطقی یکسان‌اند. در این صورت منطق حمل ساخت منطقی بر صدق و کذب را

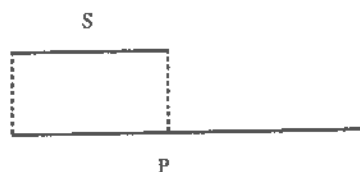
بررسی می‌کند.

معمولاً ظهور منطق جدید را با کارهای جورج بول در جبر منطق^۱ در نظر می‌گیرند، ولی ما تاریخ آن را یک قرن زودتر و با فیلسوف و ریاضیدان آلمانی، گوتفرید ویلهلم لایب نیتس^۲ (۱۶۴۶ - ۱۷۱۶) آغاز می‌کنیم.

لایب نیتس احتمالاً نخستین ریاضیدانی بود که مفهوم منطق را مورد توجه قرار داد. شهرت اصلی این ریاضیدان برجسته برای کارهای خلاقش در حساب جامع و فاضل است، گرچه طراح یک زبان علامتی بین‌المللی نیز بوده. این دانشمند در کوشش‌هایی که برای علامتی کردن استدالات منطقی در عبارات جبری به عمل آورد بر بول مقدم بود، اما آثارش در این مورد، از آنجا که تا سال ۱۹۰۳ به چاپ نرسید، کم‌اثر یا بی‌اثر بودند. لایب نیتس به نمایش هندسی قیاسات نیز توجه داشت و اولین کسی بود که آنچه را که امروز به عنوان نمودارهای ون^۳ می‌شناسیم (۲۰۰ سال قبل از ون) به کار برد، و همراه با نمودارهای (مجموعه‌ای) دایروی از نمودارهای خطی نیز، از آنجا که آنها را برای به کار گرفتن آسان‌تر می‌پنداشت، استفاده کرد. دو مثال زیر مفهوم کلی این موضوع را به دست می‌دهند.

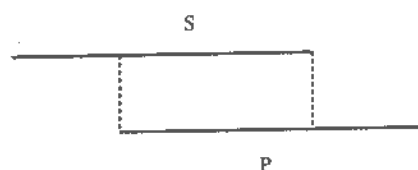
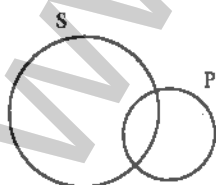


صورت دایروی



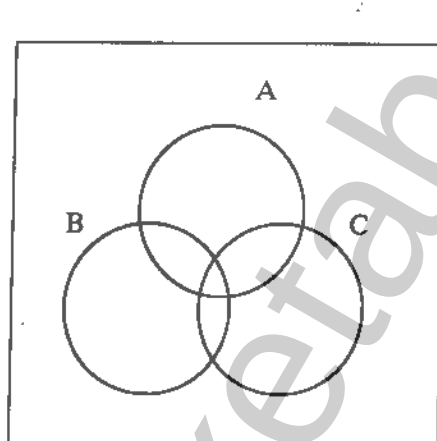
صورت خطی

تمام S ها P اند.



بعضی S ها P اند.

در این مورد لئونارد اویلر^۱ (۱۷۰۷ - ۱۷۸۳) سوئیسی، جان ون^۲ (۱۸۳۴ - ۱۹۲۳) و بالاخره چارلز داجسون^۳ (۱۸۳۲ - ۱۸۹۸) نیز سهمی دارند، که دوایر ون را در مستطیل (یا مربع) نمایش دهنده عالم مقال^۴ (مجموعه جهانی) قرار، و به این ترتیب، نمودار ون را به طریقی که امروزه آن را به کار می‌بریم به دستمان دادند.



اصل توازی^۵ اقلیدس را می‌شناسیم. طی قرون متمادی کوشش‌های بسیاری برای اثبات این اصل (یا اصول معادل آن) با استفاده از تعریفات، اصول موضوعه، و اصول متعارفی، گرچه بدون موفقیت، به عمل آمد. با این همه اصل مزبور همواره به عنوان حقیقتی بدیهی^۶ در نظر گرفته می‌شد، تا اینکه نیکلای لباچفسکی^۷ (۱۷۹۳ - ۱۸۵۶)، ریاضیدان روسی، با تغییر این اصل، هندسه‌ای نااقلیدسی کشف و جزئیات آن را منتشر کرد. در هندسه لباچفسکی به جای توازی اقلیدسی اصل زیر قرار دارد:

از یک نقطه خارج یک خط معلوم می‌توان بینهایت خط موازی با آن خط

John Venn - ۲

Leonhard Euler - ۱

Charles Dodgson - ۳

۴ - اصطلاح را از این بیت حافظ گرفته‌ایم:

من که ملول گشتمی از نفس فرشتگان

قال و مقال عالمی می‌کشم از برای تو

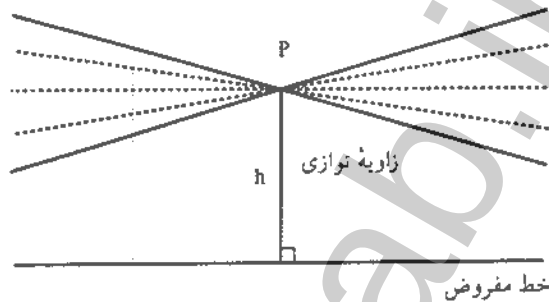
Self-Evident Truth - ۶

Parallel Postulate - ۵

Nikolai Lobachevski - ۷

معلوم رسم کرد.

در این مورد نمودار زیر را در نظر می گیریم.



(از تفسیر اقلیدسی این نمودار خودداری کنید.) در این شکل خطوط گذرنده از P به دو طبقه تقسیم شده اند. طبقه اول آنها که خط معلوم را قطع می کنند، و طبقه دوم آنها که آن را قطع نمی کنند، و دو خطی که مرز بین طبقات را تشکیل می دهند، با عمود مرسوم از P به خط، زاویه ای حاده، که معروف به زاویه توازی است و مقدار واقعی آن به ارتفاع h، نقطه P بالای خط معلوم، بستگی دارد، می سازند. این زاویه هنگامی که h زیاد می شود به ۰، و زمانی که کم می شود به ۹۰° میل می کند.

خاصیت جالب هندسه لباچفسکی در این است که این هندسه مقیاس مطلق فاصله را، یعنی مقیاسی که به انتخاب واحد (مثل متر و یارد) بستگی ندارد، به دست می دهد. و این بدین علت است که فاصله (ارتفاع) h به تمامی بر حسب زاویه، یک کمیت بدون بعد، اندازه گیری می شود. نتیجه دیگر اصل لباچفسکی این است که مجموع زوایای داخلی هر مثلث از دو قائمه کمتر است، اما همچنان که سطح مثلث به صفر میل می کند به مقدار اقلیدسی مایل می شود. از آنجا که در این هندسه، فاصله تنها به زوایا بستگی دارد، مثلث های متشابه الزوایا لزوماً دارای یک سطح اند و قضایای تشابه اقلیدسی بی معنی می شوند.

مثال دیگری از هندسه نااقلیدسی، توسط برنهارد ریمان^۱ (۱۸۲۶ - ۱۸۶۶) داده شده است. این ریاضیدان طی یک دوره سخنرانی معروف در دانشگاه گوتینگن^۲ در سال ۱۸۴۵،

هندسه‌ای را مطرح کرد که در آن از یک نقطه خارج یک خط معلوم هیچ خطی نمی‌توان موازی آن خط رسم کرد. در هندسه ریمان مجموع زوایای داخلی هر مثلث بیش از دو قائمه است، اما همچنان که مساحت مثلث به صفر میل می‌کند، به مقدار اقلیدسی مایل می‌شود.

هر دو هندسه نااقلیدسی فوق، دستگاه‌هایی کاملاً سازگارند، گرچه شهردمان بر این است که، به این مفهوم، که چنین به نظر می‌رسد که دنیای فیزیکی اطرافمان بر مقیاس کوچکی که می‌توانیم آن را اندازه بگیریم اقلیدسی است، راست نیستند. اما شهودها به هیچ وجه همیشه راهنمایی قابل اعتماد نیستند. و در این مورد باید قبل از اینکه هندسه‌های دیگر را کنار بگذاریم احتیاط کرده به خاطر بیاوریم که هندسه اقلیدسی نیز بر تعاریف اشیا بنا شده که در دنیای فیزیکی ماندنی ندارند، و به عنوان نمونه، نقطه به صورت «چیزی که جزء ندارد» تعریف شده است. نیز باید این را به خاطر داشته باشیم که تئوری نسبیت^۱ اینشتین^۲ که یکی از صورت‌های تعمیم‌یافته هندسه ریمانی است، در فضای فیزیکی راست است.

اکنون به جورج بول، که پیش از این نیز نامش را ذکر کردیم، و کارش، راجع به جبر منطق، که با آن نام آگوستوس دومورگان^۳ (۱۸۰۶ - ۱۸۷۱) نیز مربوط است و هر دو آنها کارشان را در سال ۱۸۴۷ انتشار دادند، باز می‌گردیم.

بول در ابتدا با توسعه جبر منطق سروکار داشت، و با به کار بردن صورتی از جبر، که با جبر معمولی تفاوت داشت، دریافت که امکان دارد که نظریه کامل قیاس را استنتاج کند و در حقیقت توانست خطاهای نظریه ارسطو را، که به مدت ۲۰۰۰ سال کشف نشده باقی مانده بود، مورد بحث قرار دهد. اما آنچه که امروزه به نام جبر بول^۴ معروف است، در واقع، توسعه بعدی جبری است که توسط بول مطرح شده است. توسعه مذکور کار ارنست شرودر^۵ (۱۸۴۱ - ۱۹۰۲) منطقی بود که کارش را با دستگاه بول آغاز کرد، اما بعد آن را برای مقابله با مشکلات خاصی که در تعبیر، بخصوص تعبیر مجموع منطقی^۶ رخ می‌داد، تعدیل کرد.

بول به این مطلب توجه کرد که ارسطو در کار خود به رده‌ها یا طبقات^۷ اشیا نظر داشته است، زیرا گزاره

Einstein - ۲

Boolean Algebra - ۴

Logical Sum - ۶

Theory of Relativity - ۱

Augustus De Morgan - ۳

Ernst Schröder - ۵

Classes - ۷

تمام انسان‌ها میرا هستند.

بدین معنی است که ردهٔ تمام انسان‌ها زیرودهٔ x تمام موجودات میراست. به این ترتیب، زیرودهٔ اعضای ردهٔ x را، که اعضای ردهٔ y نیز هستند، با xy ، حاصلضرب منطقی^۲، نمایش داد، و ردهٔ تمام اشیایی را که به ردهٔ x تعلق نداشتند با $1 - x$ نشان داد، و ردهٔ تمام اشیای متعلق به ردهٔ x یا ردهٔ y را، با فرض اینکه x و y عضو مشترک ندارند، با $x + y$ ، مجموع منطقی، نمایش داد. برای نمایش دادن اینکه ردهٔ x تهی است (یعنی، عضو ندارد)، $x = 0$ ، و برای نمایش دادن اینکه رده‌های x و y یکسان‌اند، $x = y$ را نوشت.

به این ترتیب، اثبات روابط زیرکاری نسبتاً آسان است:

$$xy = yx$$

$$x + y = y + x$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

تمام این روابط با روابط آشنا در جبر معمولی متناظرند، اما برخلاف جبر معمولی، این روابط نیز نتیجه می‌شوند که

$$xx = x$$

$$(x + y)(x + z) = x + yz$$

اما در مورد مجموع منطقی مزبور، زمانی که x و y اعضای مشترکی داشتند، مشکلی بروز کرد. در این مورد بول طی مسئله‌ای استفاده از

$$x + y$$

را مجاز ساخت، اما، از آنجا که این موضوع، در چنین حالاتی، صورت نامعتبری بود، لازم دانست که مطلب مزبور در پاسخ نهایی خود به طور مناسبی باز-حل شود. بنابراین، در دستگاه بول، عبارت

$$x + x = x$$

از آنجا که سمت راست آن از لحاظ Δ نامعتبر است، یافت نمی شود. اکنون می توانیم مثالی چند از موارد استعمال دستگاه علامتی بول به دست دهیم. به عنوان نمونه، اگر

x رده اشیاى سخت باشد،

y رده اشیاى کش دار باشد،

و

z رده اشیاى فلزى باشد،

در این صورت

xz رده اشیاى سخت فلزى را نشان می دهد،

و

$z(1 - y)$ طبقه اشیاى ناکش دار فلزى را نمایش می دهد.

باز به عنوان مثال، چهار قضیه اساسی ارسطو را می توان به صورت زیر نمایش داد:

تمام S ها P اند با $s(1 - p) = 0$

هیچ S ی P نیست با $sp = 0$

بعضی S ها P اند با $sp \neq 0$

بعضی S ها P نیستند با $s(1 - p) \neq 0$

(حروف کوچک s و p به عنوان علایم متناظر با رده‌های S، P در منطق ارسطو به کار رفته‌اند.)
در منطق ارسطو، قیاس:

اگر هر M ی P باشد،

و هر M ی S باشد،

در این صورت بعضی S ها P اند.

درست در نظر گرفته می‌شود، اما، چون دو مقدمه آن را در دستگاه علامتی بول، به ترتیب، به صورت

$$m(1 - p) = 0$$

و

$$m(1 - s) = 0$$

قرار دهیم، آشکار می‌شود که لزوماً چیزی در مورد S و P نتیجه نمی‌شود، زیرا معادلات مزبور به ازای $m = 0$ و به عبارت دیگر، چون M طبقه‌ای تهی باشد، برقرارند. به همین ترتیب، قیاس ارسطویی:

اگر هیچ M ی P نباشد،

و تمام M ها S باشند،

در این صورت، بعضی S ها P نیستند.

که آن نیز به صورت درست در نظر گرفته می‌شود، به طور مساوی با تهی بودن M برقرار می‌شود. اما، درستی صورت ضعیف‌تر اولین این دو قیاس، یعنی

اگر بعضی M ها P باشند،
و تمام M ها S باشند،
در این صورت، بعضی S ها P اند.

توسط بول نشان داده شده، زیرا از

$$\begin{aligned} mp &\neq \circ \\ m(1-s) &= \circ \end{aligned}$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$sp \neq \circ$$

بول توجه خود را به رده‌ها و نظریه قیاس معطوف کرد، اما ریاضیدان معاصر او، دومورگان، به طور وسیعی با رده‌ها و نسبت^۱ بین رده‌ها سروکار داشت. در واقع بسیاری از نتایجی که این دو به دست آوردند یکسان بودند. این نتایج، با ادراکاتی که امروزه از این مسئله داریم به هیچ وجه قابل توجه نیستند، گرچه چنین به نظر می‌رسد که در روزگار خودشان نیز وضع بدین منوال بوده است.

نام دومورگان امروزه با قوانین تتیم^۲،

$$\begin{aligned}\overline{x \cap y} &= \overline{x} \cup \overline{y} \\ \overline{x \cup y} &= \overline{x} \cap \overline{y}\end{aligned}$$

همراه است، اما این قوانین و بسیاری از روابط دیگر بین طبقات در دوران مدرسی^۱ مشخص بوده‌اند و صرفاً توسط دومورگان برحسب جبر رده‌ها^۲ صوری بازگویی شده‌اند.

همان طور که ملاحظه کردیم بول و دومورگان، در اصل به بیان قوانین قبلاً مشخص شده استدلال و رده‌بندی، برحسب جبر علامتی می‌پرداختند، و مؤسس واقعی آنچه که امروزه به منطق ریاضی معروف است، گوتلب فرگه^۳ (۱۸۴۸ - ۱۹۲۵) است، که نه تنها در حساب گزاره‌ها^۴، بلکه در کاربرد کامل سوره‌های عمومی و وجودی^۵ در ریاضیات، و تحلیل منطقی روش مهم اثبات با استقرای ریاضی^۶ به او مدیونیم.

مقصود اصلی فرگه بنای حساب، تنها بر منطق بود؛ یعنی این هدف که در حساب گزاره‌هایی در مورد حقایق تجربی موجود نباشد، و در این راه در واقع از رؤیای زبان علامتی جهانی^۷ لایب نیتس پیروی می‌کرد، و روش برخوردش، چون روش اقلیدس، آکسیوماتیک بود، و بر تمایز بین مقدمات^۸ (که می‌توانند به صورت علامتی نمایش داده شوند) و قواعد استنتاج^۹ (که در صورتی که محدود به علایم مقدمات مزبور باشیم نمی‌توانند به صورت علامتی نوشته شوند) تأکید می‌کرد.

فرگه، برخلاف بول، نتوانست کار علامتی کردن خود را بر مبنای علایم جبری بگذارد زیرا سعی در استفاده از منطق در بنا نهادن پایه‌های حساب داشت، و در نتیجه مجبور بود که از ظهور مقدماتی آنچه که جهد در استخراجش داشت خودداری کند. سهم بزرگ او در دقت استثنایی روش علمیش در کوشش در بنا نهادن پایه‌های ریاضیات، قرار دارد.

به مفهومی بس حقیقی، بول، دومورگان و شرودر در پایان مسیر درازی که مستقیماً به ارسطو باز می‌گردد، ایستاده‌اند، در حالی که فرگه در آغاز راه تازه‌ای در منطق قرار گرفته است، که همچنان ادامه دارد و خطوط مهیجی در تحقیق به دست می‌دهد.

در این مرحله، لازم می‌نماید به عقب برگردیم و دو بحران ریاضیات را، که یکی از آنها هنوز هم به مقدار وسیعی لاینحل مانده است، مورد بررسی قرار دهیم.

Algebra of Classes - ۲

Propositional Calculus - ۴

Mathematical Induction - ۶

Premises - ۸

۱ - قرون وسطی Scholastic Times

۲ - Gottlob Frege

۳ - Universal and Existential Quantifiers

۴ - Universal Symbolic Language

۵ - Rules of Inference

در قرون هفدهم و هجدهم، ریاضیدان‌ها تحت تأثیر قدرت حساب جامع و فاضل یا دیفرانسیل و انتگرال، بسیاری از مسائلی را که تا آن زمان بسیار مشکل بودند، حل کردند. در انجام این کار، آنان هیچ‌گاه در مورد صحت روش‌هایشان نگران نبودند، و بعضی از کارهایشان را می‌توان، حداقل، به عنوان بی‌قید توصیف کرد. فی‌المثل، اوایل در آثارش سری متباعدی چون

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

را به کار گرفته، و جمع آن را با بیان آن به صورت

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

و قرار دادن $x = 1$ به دست آورده است، و با دریافتن اینکه این سری (که تصاعدی هندسی است) دارای مجموع حدی

$$\frac{1}{1+x}$$

به ازای $x < 1$ است، نتیجه گرفته که مجموع سری اصلی $\frac{1}{2}$ است. روش اوایلر، اما، لزوماً جواب‌های سازگار به دست نمی‌دهد. به عنوان مثال، مورد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^3}$$

$$= (1-x^2)(1+x^3+x^6+\dots)$$

$$= 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - \dots$$

که چون $x = 1$ را در آن قرار دهیم بار دیگر سری

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

را به دست می آوریم، اما این بار حیلۀ اولر

$$\frac{1 + 1}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

را به عنوان جمع حدّی آن به دست می دهد.

بحران فوق که از کاربرد بی احتیاط روش های حدّی سرچشمه می گیرد توسط آگوستین لویی کوشی^۱ (۱۷۸۹ - ۱۸۵۷) که نشان داد چگونه می توان کاربرد به احتیاط نظریۀ حدود را به جای روش های بی قید اولر قرار داد، برطرف شد. اما، از پس این بحران، مسئله بسیار مشکل تر دیگری به وجود آمد.

در نیمۀ دوّم قرن نوزدهم نشان داده شد که بیشتر ریاضیاتی که تا آن زمان شناخته شده بود، می تواند به دستگاهی بنا شده از حساب اعداد صحیح مثبت تحویل شود. اما طنز در اینجاست که این موضوع نه تنها صحّت و ایقان ریاضیات را بنا نکرد بلکه چاهی را، که برگرد آن بسیاری از مطالب ریاضیات بنا شده بود، نیز آشکار کرد. در گسترش دستگاه های پیچیده تر از حساب مقدّماتی، به نظریۀ مجموعه هایی نیازمندیم، و نه صرفاً نظریۀ مجموعه های اعداد صحیح، بلکه نظریۀ ای که مفهوم مجموعه مجموعه ها، مجموعه مجموعه های مجموعه ها و غیره را در بر گیرد.

خالق نظریۀ مجموعه ها^۲ جورج کانتور^۳ (۱۸۴۵ - ۱۹۱۸) بود. او چنین مطرح کرد که کلمۀ نامتناهی^۴ در ریاضیات دارای دو معنی است. اول، می تواند به جای مقداری قرار گیرد که ماورای هر حدّ مشخصی افزایش می یابد، و کانتور آن را که توسط علامت اکنون آشنای ∞ نمایش داده شده نامتناهی ناتمام یا ناسره^۵ نام نهاد. معنی دوّم را می توان با در نظر گرفتن یک خط متناهی^۶ به عنوان مجموعه نامتناهی ای از نقاط توضیح داد.

به علت اینکه خط مورد بحث متناهی است، دریافتی وجود دارد که در آن می توانیم از این

مجموعه به عنوان نامتناهی تمام^۱ یاد کنیم^۲ (خط مزبور می تواند در تمامیت خود با وجود اینکه شامل بینهایت نقطه است رسم شود، اما یک مقدار افزایش یابنده نمی تواند با هیچ شکل کاملی نمایش داده شود).

تعریف کانتور از مجموعه به عنوان «دسته ای اشیای معین و جدا از هم» تا وقتی که تنها به بررسی تعداد متناهی ای از اشیای می پردازیم به اشکالی برخورد نمی کند. اما مشکل در ارتباط با مجموعه های نامتناهی، و، بخصوص، با مجموعه جمیع مجموعه ها^۳ پدیدار می شود.

کانتور دو مجموعه را معادل یا هم ارز^۴ نامید در صورتی که بتوانند در تناظری یک به یک^۵ قرار گیرند؛ به این ترتیب، مجموعه های $\{a, b, c, d, e\}$ و $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ معادل اند، زیرا، فی المثل، تناظر:

$$a \leftrightarrow 1$$

$$b \leftrightarrow 2$$

$$c \leftrightarrow 3$$

$$d \leftrightarrow 4$$

$$e \leftrightarrow 5$$

را داریم. واضح است که مجموعه های معادل باید تعداد عضوهای یکسان^۶ داشته باشند، و تا وقتی که کار خود را محدود به مجموعه های متناهی کرده ایم پارادوکسی حاصل نمی شود. اکنون مجموعه اعداد صحیح زوج مثبت، زیرمجموعه ای از مجموعه جمیع اعداد صحیح مثبت، را در نظر می گیریم. این مجموعه را می توان در تناظر یک به یک با مجموعه جمیع اعداد صحیح مثبت، فی المثل:

۱ - Completed Infinite

۲ - این بحث یادآور این مطلب از گلشن راز شیخ محمود شبستری است که در پاسخ شخصی که از او سؤال می کند که مسافر چون بود رهرو کدام است

بینهایتی را ذکر می کند که در داخل خودش چنین است و از خارج به او کمک نمی رسد، یعنی می گوید:

بُودِ مرد تمام آن کز تمامی کند با خواجگی کار غلامی

۴ - Equivalent

۳ - Set of all Sets

۶ - Same Number of Elements

۵ - One-One Correspondence

$$2 \leftrightarrow 1$$

$$4 \leftrightarrow 2$$

$$6 \leftrightarrow 3$$

$$8 \leftrightarrow 4$$

و در حالت کلی،

$$2n \leftrightarrow n$$

قرار داد. به این ترتیب، درست به اندازه اعداد صحیح زوج مثبت، عدد صحیح مثبت موجود است. مثال‌های بسیاری از چنین مجموعه‌هایی که تعداد اعضایی برابر تعداد اعضای زیرمجموعه واقعی‌ای از خود دارند موجودند، اما در هر یک از چنین حالاتی تعداد اعضا نامتناهی است.

در این صورت بر سر اصل متعارف اقلیدس:

کُل هر چیزی بزرگتر از جزء آن چیز است.

چه می‌آید؟ این اصل به طور واضح در مورد مجموعه‌های نامتناهی برقرار نیست. در واقع، می‌توانیم مجموعه متناهی^۱ را به عنوان «مجموعه‌ای که نمی‌تواند با زیرمجموعه واقعی خود معادل باشد»، و مجموعه نامتناهی^۲ را به صورت «مجموعه‌ای که می‌تواند» تعریف کنیم. با این همه نباید تصور کنیم که با نظریه مجموعه‌های کانتور، جمیع مسائل و پارادوکس‌های مطرح شده حل شده‌اند.

برای مشخص کردن اینکه چنین نیست، به ذکر تنها یکی از مشکلات نظریه کانتور می‌پردازیم.

اگر مجموعه‌هایی را که شامل خودشان نیستند نرمال یا بهنجار^۱ و آنهایی را که شامل خودشان هستند (چون مجموعهٔ جمیع مجموعه‌ها) اَبَنرمال یا نابهنجار^۲ بنامیم، در این صورت می‌توانیم این مسئله را که «آیا مجموعهٔ جمیع مجموعه‌های نرمال، نرمال است یا اَبَنرمال؟» مطرح کنیم.

فرض می‌کنیم نرمال باشد. در این صورت، بنا به تعریف، شامل خودش نیست. اما به عنوان مجموعهٔ جمیع مجموعه‌های نرمال، شامل خودش هست.

اکنون فرض می‌کنیم اَبَنرمال است. در این صورت شامل خودش هست، و بنابراین باید نرمال باشد. به این ترتیب، در هر یک از دو حالت، به تناقض می‌رسیم. (این پارادوکس خاص به نام برتران راسل^۳ (۱۸۷۲ - ۱۹۷۰)، فیلسوف انگلیسی، که آن را کشف کرد، معروف است.) صورت‌های معروف بسیاری از این پارادوکس در دست است، و یکی از آنها صورت زیر می‌باشد:

در دهکده‌ای، آرایشگر دهکده صورت کسانی و تنها کسانی را که صورت خودشان را اصلاح نمی‌کنند اصلاح می‌کند. آیا بنابراین، آرایشگر مزبور صورت خودش را اصلاح می‌کند؟

فرض می‌کنیم که آرایشگر خودش صورت خود را اصلاح کند. در این صورت، نتیجه می‌شود که چنین نمی‌کند، زیرا تنها صورت کسانی را اصلاح می‌کند که خودشان صورت خود را اصلاح نمی‌کنند. اکنون فرض می‌کنیم صورت خود را اصلاح نمی‌کند. در این صورت، صورت خود را اصلاح می‌کند. زیرا او صورت تمام کسانی را که صورت خود را اصلاح نمی‌کنند اصلاح می‌کند؛ می‌توان به طور ساده از پارادوکس عامه‌پسند راسل با گرفتن این نتیجه که نتیجهٔ مزبور ثابت می‌کند که اصول موضوعه‌مان دروغ‌اند، یعنی، چنین آرایشگری نمی‌تواند وجود داشته باشد، خلاص شویم. اما، مجموعه‌های نرمال و اَبَنرمال وجود دارند، بنابراین مسیر برخورد با پارادوکس راسل روشن نیست، گرچه باید یا اشتباهی در استدلال یا سستی‌ای در تعاریف آن موجود باشد.

کار فرگه، که آن را به اختصار مورد بحث قرار دادیم، شدیداً بر راسل که به اتفاق آلفرد نورث وایتهد^۱ (۱۸۶۱ - ۱۹۴۷) کتاب سه جلدی اصول ریاضیات^۲ را تهیه کرد، اثر گذاشت. راسل و وایتهد هوشیارانه از اصول کلی فرگه تبعیت کردند اما تغییراتی در علامت‌نویسی و اصطلاحات او به وجود آوردند. در اینجا به بحث در تغییرات مزبور نمی‌پردازیم؛ و به طریقی توجه می‌کنیم که آنها برای اجتناب از مشکل پارادوکس راسل آن را مطرح کردند.

کار را با به دست دادن تعریفی از عدد ۱ که، در واقع، تعبیری است از آنچه راسل و وایتهد در نماد جدید

$$1 = \{X : \sim(X = \phi) \vee y \in X \wedge z \in X \Rightarrow y = z\}$$

بیان کرده‌اند، آغاز می‌کنیم. این نماد را به صورت زیر می‌خوانیم:

عدد یک مجموعه اشیا X و چنان است که هیچ X ی تهی نیست، و چنان که اگر y و z هر دو به یک X متعلق باشند، در این صورت y و z یکی باشند.

در این مورد بخصوص توجه داشته باشید که هر X باید خود یک مجموعه باشد (زیرا چیزی در مورد اعضای X ، نیز اینکه هیچ X ی تهی نیست گفته‌ایم)، که در نتیجه ۱ به صورت مجموعه مجموعه‌ها تعریف شده است. در واقع، ۱ به طور ساده به صورت مجموعه جمع مجموعه‌های دارای یک عضو منفرد تعریف شده است. ممکن است تعریف فوق در نگاه اول تعریفی به گونه‌ای پیچیده به نظر برسد، اما در واقع چنین نیست، چه با روشی که در زندگی روزمره مان، طبق آن، با اعداد آشنا شده‌ایم، به خوبی موافقت دارد. تهیه چنین تعریفی دستاوردی بزرگ بود، زیرا قبلاً تصور می‌رفت اعداد صحیح و مثبت، چیزهایی هستند که دیگر نمی‌توانند مورد تحلیل قرار گیرند.

لئوپلد کرونکر^۳ (۱۸۲۳ - ۱۸۹۱) این جمله معروف را خاطر نشان کرده بود که

خداوند اعداد صحیح را آفرید، مابقی اثر انسان است.^۱

اما حتی تعریف فوق نیز خالی از اشکال نیست، زیرا برحسب نظریه مجموعه‌ها ادا شده است. لیکن این نظریه نمی‌تواند نظریه مجموعه‌های کانتور باشد زیرا مورد اخیر شامل همان پارادوکسی است که تعریف مورد بحث برای اجتناب از آن طرح شده است. وایتهد و راسل به این تشخیص رسیدند که علت اصلی مشکل مورد بحث در مجاز شمردن تعلق هر چیز به خودش قرار دارد، و لذا نظریه انواع^۲ را مطرح کردند. به این ترتیب، گفته می‌شود که

- افراد^۳ از نوع ۰ اند،
- مجموعه افراد از نوع ۱ اند،
- مجموعه اشیای نوع ۱ از نوع ۲ اند، و غیره.

عباراتی چون

$$y \in X$$

تنها اگر X از نوعی دقیقاً یکی بیشتر از y باشد، مجازند. این موضوع از بروز مشکلات پارادوکس راسل جلوگیری می‌کند، اما اینکه در مورد آن، مشکلات دیگری ظهور می‌کنند یا خیر آشکار نیست.

با بازگشت به تعریف عدد ۱، به عنوان مجموعه مجموعه‌ها، و پذیرفتن نظریه انواع، درمی‌یابیم که مسئله جدی‌ای داریم: y ، z باید از یک نوع باشند، و بنابراین X باید از نوع بالاتری باشد. به طور واضح، ۱، به عنوان مجموعه X ‌ها، باز هم باید از نوع یکی بالاتری باشد. مطابق با انتخاب‌مان در مورد y ‌ها و z ‌ها می‌توانیم اعداد از نوع ۲، ۳، ۴، و غیره را انتخاب کنیم، اما این به هیچ وجه آنچه که مقصودمان بود نیست. اینکه بکشیم که ۱ از نوع (مثلاً) ۲ را به ۱ از نوع ۳ بیفزاییم چه معنی دارد؟ چرا که مقصودمان از ابتدا تعریف یک عدد ۱ منحصر به فرد

بود.

وایتهد و راسل تصمیم گرفتند با معرفی آنچه که آن را اکسیوم تحویل‌پذیری^۱ نامیدند، خود را از این محمصه خلاص کنند. این اکسیوم (به طور تقریبی) به این معنی است که اگر شیء ریاضی‌ای از نوع معینی را تعریف کردیم، می‌توانیم وجود اشیاى از هر نوع دیگر متناظر با آن را بینگاریم. مقصود کلی موضوع اخیر را می‌توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم:

انواع اگر چه گاهی اهمیت پیدا می‌کنند، می‌توان اغلب اوقات از آنها چشم پوشید.

به طور وضوح، یک چنین فرضی امکان وقوع ناسازگاری را بار دیگر به دست می‌دهد. ظاهراً کوشش در بنا نهادن ریاضیات بر اساس منطق غیرقابل لرزانی، بادوام نیست. لزوم اکسیومی چون اکسیوم تحویل‌پذیری عامل مهمی در سرخوردگی ریاضیدان‌ها از دستگاه وایتهد - راسل شد.

شکست جهد فوق در استخراج ریاضیات از منطق یکی از معضلات مهم ریاضی قرن بیستم را آشکار می‌کند؛ اما در این مورد کوشش‌های دیگری نیز برای روشن کردن مسائل جدی رخ‌دهنده در اساس ریاضیات انجام گرفته بود.

برخوردی کاملاً متفاوت به این مسئله از ریاضیدان هلندی بروئر^۲ (۱۸۸۱ - ۱۹۶۸) بود. بروئر پیش‌تاز چیزی بود که به مکتب شهودگرای ریاضیدان‌ها معروف شده است. شاید نام مزبور اندکی بداقبال باشد، زیرا چنین به نظر می‌رسد که مستلزم این باشد که در جریان اثبات‌های ریاضی توسلی به شهود صورت می‌گیرد. اما در واقع، اثبات‌های شهودگرایان، حداقل به اندازه اثبات‌های ریاضیدان‌های دیگر، دقیق‌اند؛ و اغلب دقت منطقی بیشتری را می‌طلبند. نام مزبور از این حقیقت مشتق شده که شهودگرایان هر گونه کوشش در بنا نهادن حساب بر دستگاه اساسی‌تری را مردود می‌شمارند، و اعداد صحیح و مثبت را به عنوان حقیقتی شهودی در نظر می‌گیرند که به صورت مبنای مطمئنی که بنا کردن بر آن انجام می‌گیرد، به کار می‌رود. در دفاع از این نظرگاه حرف بسیاری برای گفتن موجود است.

بروئر تصوّر وجود^۱ در ریاضیات را مرادف ساخت‌پذیری^۲، و صدق^۳ را مرادف اثبات‌پذیری^۴ در نظر می‌گرفت. بنابراین، ادعای صدق یک گزاره ریاضی ادعای این می‌شود که اثباتی از آن داریم. به همین ترتیب، ادعای کذب^۵ یک گزاره ریاضی به این معنی می‌باشد که اثباتی داریم که اگر گزاره مزبور را راست بپنداریم این پندار گرفتار تناقض‌مان می‌کند. این مطلب استلزامات منطقی مهمی در بردارد.

می‌دانیم که به ازای هر گزاره a

$$a \vee \sim a$$

صادق^۶ (یعنی a هر چه باشد راست) است. در واقع این صادق، که از دوران گذشته به عنوان قانون طرد اوسط^۷ معروف بوده، بر این است که یک گزاره معلوم باید راست^۸ یا دروغ^۹ باشد. برای شهودگرا این مطلب به این مفهوم است که «یا اثباتی برای a داریم یا، در غیر این صورت، این اثبات که فرض a به تناقض می‌انجامد، در دست است». بنابراین، قانون طرد اوسط نمی‌تواند در دستگاه شهودگرایان داخل شود، زیرا این دستگاه مستلزم این است که چیزی به عنوان مسئله حل نشده وجود ندارد. اثر مفروضات شهودگرایان این است که کلّ حوزه‌هایی از ریاضیات کلاسیک که در آنها اثبات‌های سنتی بنا شده بر مفروض

$$a \vee \sim a$$

توانند بر مبنایی شهودگرا دوباره‌سازی شوند، باید کنار گذاشته شود. اغلب ریاضیدان‌ها موافقت دارند که هر چیزی که در دستگاه شهودگرا ثابت شود درست است، اما عموماً چنین تصوّر می‌رود که شهودگرایان بیش از اندازه محتاط‌اند، و ردّشان بر آن همه ریاضیات در غیر این صورت پذیرفتنی، زیانی جدّی است.

Constructibility - ۲

Provability - ۴

Tautology - ۶

True - ۸

Existence - ۱

Truth - ۳

Falsehood - ۵

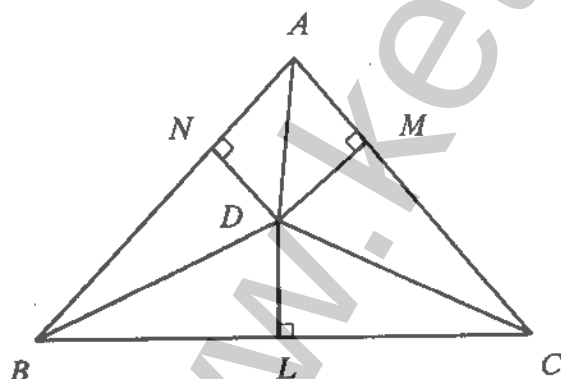
Law of Excluded Middle - ۷

False - ۹

اکنون به سراغ مؤسس مکتب دیگری از تفکر می‌رویم. دیوید هیلبرت^۱ (۱۸۶۲ - ۱۹۴۳) عقیده داشت که کوشش در بنا کردن کل ریاضیات بر مبنای منطق بسیار جاه طلبانه است. برخورد او تجزیه کردن مسائل گوناگون به اجزا و خرد خرد به آنها پرداختن است. نخست، مسئله صدق و کذب، که همواره باعث مشکلات فلسفی شده بود، باید به کناری نهاده می‌شد، و تمرکز بر سازگاری^۲ و تمامیت^۳ مجموعه‌های آکسیوم‌ها قرار می‌گرفت. سازگاری در این زمینه مستلزم این است که در هیچ دستگاهی نمی‌توان یک مطلب و نقیض همان مطلب را اثبات کرد. و تمامیت به این معنی است که آکسیوم‌های کافی، برای اینکه جمیع نتایجی که باید (به مفهومی) استنتاج پذیر باشند بتوانند استنتاج شوند، داده شده باشند.

یکی از دستاوردهای اولیه هیلبرت تنظیم مجموعه کامل آکسیوم‌های هندسه اقلیدسی بود. اثبات اقلیدسی زیر را در نظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم ABC مثلث دلخواهی باشد:



و فرض می‌کنیم نیمساز زاویه A و عمود منصف BC در D تلاقی کنند. عمودهای DN ، DM را، به ترتیب، بر AC ، AB فرود می‌آوریم. DB ، DC را وصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم L وسط BC باشد. اکنون از آنجا که $BL = LC$ ، DL مشترک است، و $\angle BLD = \angle CLD = 90^\circ$ ، مثلث‌های BLD ، CLD همبسته‌اند، و بنابراین $BD = CD$ است. از آنجا که زوایای NAD و MAD مساوی‌اند، $\angle AND = \angle AMD = 90^\circ$ و AD مشترک است، مثلث‌های AND ، AMD همبسته‌اند، و بنابراین $AN = AM$ ، $DN = DM$

از آنجا که $BD = DC$, $DN = DM$ و $\angle BND = \angle CMD = 90^\circ$ است، مثلث‌های CMD , BND همنهشت‌اند، و بنابراین $NB = MC$. و از آنجا که

$$AN = AM \quad \text{و} \quad NB = MC$$

نتیجه می‌شود که

$$AB = AC$$

بنابر این مثلث دلخواه همان متساوی‌الساقین است؛ در نتیجه هر مثلث، متساوی‌الساقین می‌باشد.

مطلب فوق آشکارا یاره است، و با این همه اثبات آن از آکسیوم‌های اقلیدسی در مورد هندسه به دست می‌آید. اشکال در این واقعیت قرار دارد که آکسیوم‌های اقلیدسی ناتمام‌اند و نیاز به این دارند که با آکسیوم‌های برخورد^۲ که بیان‌کننده این مطلب‌اند که چون خطوطی به طریق معینی رسم شوند، در قسمت معینی از صفحه برخورد می‌کنند، تکمیل شوند. (طریقی که شکل را رسم کرده‌ایم مفروض است و در نتیجه بیان می‌کند که D داخل مثلث واقع می‌شود که فرضی ناموجه است.)

به علت اینکه هیلبرت و پیروانش بر ساخت دستگاه‌های صوری، که به کمک آنها توانستند هر یک از شاخه‌های مشخص ریاضیات را به طور جداگانه مورد بررسی قرار دهند، متمرکز شده بودند، برخوردشان به عنوان صورت‌گرایی^۳ شناخته، و برنامه‌هاشان به خاطر قادر شدن به بررسی سازگاری و تمامیت این دستگاه‌های صوری، شامل ساخت زبان کلی‌تر، یا ماورای زبان^۴ شد، که دستگاه‌های صوری بتوانند در آنها مورد بحث قرار گیرند. و سرانجام، نشان داده شد که سازگاری دستگاه‌های صوری به سازگاری حساب مقدماتی وابسته است.

متأسفانه، برنامه هیلبرت نیز مانند سایر برنامه‌های مقدم بر آن، سرانجام به مانعی جدی

برخورد کرد. و این زمانی اتفاق افتاد که در ۱۹۳۰ کورت گودل^۱ (۱۹۰۶ - ۱۹۷۸) نتایج خود را در مورد قضایای تردیدآمیز دستگاه صوری اعلام کرد.

گودل نشان داد که در هر دستگاهی که در بیان حساب مقدماتی به قدر کافی «غنی» باشد، یا گزاره‌های اثبات شده‌ای که دروغ‌اند، یا گزاره‌های اثبات نشدنی‌ای که راست‌اند، و در آنها باید به دروغ و راست تعبیری مطابق دستگاه مورد بررسی، داده شود، وجود دارند. این نتیجه احتمالاً بزرگ‌ترین نتیجه در منطق جدید است. برای آگاهی یافتن از اهمیت این موضوع، دستگاه صوری ساده‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض می‌کنیم کار را با دستگاه صوری‌ای شامل، مثلاً، یک یا دو علامت منطقی، تعداد کمی علائم حسابی چون ۰، ۱، +، =، و چند آکسیوم و قاعده تبدیل آغاز کنیم. می‌توان تصور کرد که جمیع گزاره‌های ممکن در چنین دستگاهی را می‌توان نوشت. لیکن دستگاه‌مان نباید چنان «غنی» باشد که پارادوکس‌هایی چون پارادوکس دروغگو^۲ را در برگیرد، یا ناسازگار باشد. اما، فرض می‌کنیم که شامل گزاره‌ای به صورت

این گزاره اثبات‌پذیر نیست.

باشد. گزاره مزبور را S می‌نامیم.

اگر S راست باشد، در این صورت S اثبات‌پذیر نیست.

اگر S راست نباشد، در این صورت S اثبات‌پذیر است.

اگر S اثبات‌پذیر باشد، در این صورت S راست نیست.

اگر S اثبات‌پذیر نباشد، در این صورت S راست است.

بنابر این باید نتیجه بگیریم که اگر دستگاه‌مان برای در برداشتن S به قدر کافی «غنی» باشد، در این صورت باید حداقل شامل یک جمله که راست است اگر و تنها اگر اثبات‌پذیر

نباشد، باشد. این مشکل در جمیع دستگاه‌هایی رخ می‌دهد که برای در بر گرفتن حساب مقدماتی به قدر کافی «غنی» اند، و بنابر این در پایان نشان داده می‌شود که برخورد صورت‌گرایی نیز، درست به اندازه برنامه استخراج کلّ ریاضیات از منطق، غیر قابل دفاع است و اکنون آشکار می‌شود که هیچ یک از چنین دستگاه‌هایی نمی‌تواند هم سازگار هم تمام باشد.

در «تاریخچه» مان سعی در نشان دادن این داشتیم که چگونه ریاضیات و منطق در سرتاسر گسترش‌های مربوطه‌شان به طور مکرّر بر یکدیگر اثر گذاشته‌اند، و هر بار که تأثیر متقابل مستقیمی وجود داشته هر دو دستگاه بهره‌مند شده‌اند. بسیاری از مسائل حل شده، اما حل مسائل یک قرن به طور تغییرناپذیری مسائل دیگری را، که می‌بایست توسط منطق‌پوین و ریاضیدان‌های قرن بعد به آنها پرداخته شود، مطرح کرده است. و اکنون می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که «در چه مرحله‌ای قرار گرفته‌ایم؟» زیرا به نظر می‌رسد که هنوز هم پارادوکس‌های حل‌نشده‌ای در اساس ریاضیات موجود باشد. و اوضاع را می‌توان احتمالاً مطابق چیزی شبیه این توصیف کرد:

اگر طالب ایقان مطلق‌ایم، در این صورت باید به محدود کردن خود به دستگاه بسیار «مختصر»ی چون حساب گزاره‌ها با گزاره‌هایی به تعداد متناهی، قناعت کنیم. اما، اگر مایل به لذّت بردن از غنای مخاطرات واقع در استدلال‌هایی هستیم که مفاهیم نظریه مجموعه‌ها و اعداد مجازشان می‌شمرند، در این صورت باید عناصری از ناامنی، و امکان روبرو شدن با پارادوکس‌هایی را که تنها سفری دورتر به اطراف و اکناف (امکاناً) حتّی ناامن‌تر توان حل‌شان حاصل می‌شود، به جان بپذیریم.

در پایان قولی از راسل می‌شنویم:

حاصل نخستین و بلاواسطه لحظه شهود، اعتقاد به امکان نحوه‌ای از معرفتی است که می‌توان آن را مکاشفه یا الهام یا اشراق نامید، به خلاف احساس و استدلال و تجزیه و تحلیل، که ما را در وادی جهل و وهم سرگردان می‌سازند.

و به قولی از آن جلال‌الدین محمد مولوی گوش دل فرا می‌دهیم:

در گشاد عقده‌ها گشتی تو پیر	عقده‌ای چند دگر بگشاده گیر
عقده را بگشاده گیر ای منتهی	عقده‌ای سخت است بر کیسه تهی
عقده‌ای کان پر گلوی توست سخت	اینکه دانی که خسی یا نیک‌بخت
حل این اشکال کن گر آدمی	خرج این دم کن اگر صاحب دمی

۱۴ - زمینه تاریخی منطق ریاضی^۱:

نه هر که کاری کند داند که چه می‌کند یا چه می‌باید کرد،
بلک بسیار کسان باشند که در کارها شروع کنند بر سبیل
خط، و همچنین باشند حکم‌کسانی که طلب علوم کنند
و بر صناعت منطق واقف نباشند.

«اساس الاقباس»
«خواجه نصیر طوسی»

ارسطو، تقریباً در پایان اثری که امروزه به ابطال‌های سوفسطائی^۲ موسوم است، ظاهراً بر این ادعا بوده که موضوع منطق را خلق کرده است. نزدیک‌ترین ادعای مشابه با چنین ادعایی در قرن ما بدون شک این بیانیه فروید^۳ در سال ۱۹۱۴ است که می‌گوید:

... روانکاوی^۴ مخلوق من است؛ طی ده سال من تنها کسی بوده‌ام که با آن سرو کار داشته‌ام ...

محتمل به نظر می‌رسد که ادعای ارسطو به همان اندازه ادعای فروید راست باشد، و گرچه ادعای فروید درست است، با این وجود برای مورخ امکان دارد که تمام انواع اشارات و

۱ - مقاله زمینه تاریخی منطق ریاضی، هوارد دلونگ، غلامرضا یاسی‌پور، خردنامه صدرا، شماره ۲، بنیاد حکمت

اسلامی صدرا

Sophistical Refutations - ۲

Freud - ۳

Psychoanalysis - ۴

پیش‌بینی‌های روانکاوی او را در آثار متفکران قبل از او بیابد؛ بنابراین در صورتی که آثار نویسندگان پیش از ارسطو دست نخورده باقی مانده بود مورّخین می‌توانستند بی‌هیچ شک به موردی مشابه دست یابند.

به عنوان مثال افلاطون^۱ گزاره زیر را در جمهور^۲ خود آورده است:

یک شیء هیچ‌گاه نمی‌تواند در آن واحد و نسبت به جزء ثابتی از خودش، و در رابطه با شیء واحد، در دو طریق متقابل عمل کند یا به دو طریق متقابل روی آن عمل شود، یا دو چیز متقابل باشد.

ارسطو مدّعی است که محقّق‌ترین تمام اصول این است که «یک صفت واحد نمی‌تواند در آن واحد و از جهت واحد به یک شیء متعلّق باشد و نباشد». اصل اخیر، صورت ارسطویی قانون عدم تناقض^۳ است، و چنین وسوسه می‌کند که بگوییم ارسطو نه تنها این قانون، بلکه بسیاری از ایده‌های خود را درباره منطق از پیشینیان خود اخذ کرده است. با وجود این، باید در مقابل این وسوسه مقاومت کنیم زیرا افلاطون این ملاحظه را تنها به طور گذرا مطرح کرده است و مدرکی موجود نیست که او، یا کس دیگری پیش از ارسطو، کوششی در راه تدوین قواعد استنتاج درست به عمل آورده باشد. بنابراین می‌توان ادّعای ارسطو را پذیرفت و این سؤال را مطرح کرد که چه عاملی او را به آفریدن موضوع منطق رهنمون شده است.

ارسطو در جمله افتتاحیه کتاب متافیزیک^۴ خود چنین می‌گوید:

تمام افراد بشر بنا به طبیعتشان تمایل به دانستن دارند.

هم او هم افلاطون بر این اعتقادند که فلسفه با شگفتی آغاز می‌کند، و شک نیست که این موضوع، انگیزه‌ای قوی در تحقیقات منطقی ارسطو بوده است. با این همه به نظر نمی‌رسد که انگیزه مذکور تنها یا حتّی قوی‌ترین انگیزه بوده باشد. در واقع دو منظور وابسته اما عملی‌تر

دیگر، یکی در ارتباط با ریاضیات و دیگری در رابطه با سفسطه^۱ در میان بوده است. در این صورت اگر بخواهیم بدانیم منطق در مورد چه چیز گفتگو می‌کند بهترین طریق این است که کارمان را با همین پرسش در مورد ریاضیات یونان باستان پیش از ارسطو آغاز کنیم.

اولین ریاضیدان یونانی، تالس از اهالی ملطیه^۲ (۶۲۴ - ۵۴۵ ق. م.) است. تالس از مصر دیدن کرده بود و محتمل است که در آنجا مقداری معرفت هندسه عملی کسب کرده باشد. اما، از آنچه که اکنون در مورد ریاضیات مصری می‌دانیم، محتمل‌تر به نظر می‌رسد که چیزهای باارزشی را که یونانی‌ها در هندسه به ارث برده‌اند در اصل از بین النهرین باستانی^۳ دریافت کرده باشند. دانش هندسی مورد اخیر بسیار بالاتر از آن مصریان بود. اگر بتوانیم به روایات اطمینان داشته باشیم، تالس باید در واقع ریاضیدان بسیار بزرگی بوده باشد چرا که ظاهراً او اولین کسی بود که هم قضایای کلی هندسی را به تصور آورد هم لزوم اثبات کردن آنها را ملاحظه کرد. تعدادی از قضایای هندسی منسوب بدوست - به عنوان مثال، این قضیه که زوایای قاعده مثلث متساوی الساقین مساوی‌اند - اما متأسفانه هیچ‌گونه ایده‌ای در مورد اینکه چگونه آنها را اثبات کرده است نداریم. همین سخن باید در مورد فیثاغورس^۴ (۵۶۶ - ۴۹۷ ق. م.)، که او نیز بنا به روایات از مصر دیدن کرده و شاگرد تالس بوده است، گفته شود.

مهم‌ترین سهم فیثاغورس در هندسه یونانی شاید توسط پروکلس^۵ (۴۱۰ - ۳۸۵ ق. م.) به بهترین وجهی جمع‌بندی شده باشد. وی چنین می‌گوید که فیثاغورس، به دنبال تالس «دانش هندسه را با بررسی از ابتدای اصول این علم و اثبات قضایای آن به طریقی غیرمادی و عقلانی به دانشی قیاسی، یعنی آموزشی صرفاً فکری و نه عملی، تبدیل کرد...» اگر این سخن راست باشد، تمام دستاوردهای (حقیقی یا ادعایی) ریاضی دیگر تالس و فیثاغورس در مقایسه با آن بی‌اهمیت‌اند، زیرا مطلب فوق بدین معنی است که آنها به ویژه مسئولیت تبدیل هندسه از دانشی تجربی و تقریبی را به دانشی غیرتجربی و دقیق به عهده داشته‌اند. گرچه اطلاعات کافی برای اینکه این ادعا را در مورد آنان، با هر درجه از اطمینان که باشد، به کار بریم در دست نیست.

به هر حال فیثاغورس، که احتمالاً در ساموس^۶ متولد شده بود، به شهر یونانی

Thales of Miletus - ۲

Pythagoras - ۴

Samos - ۶

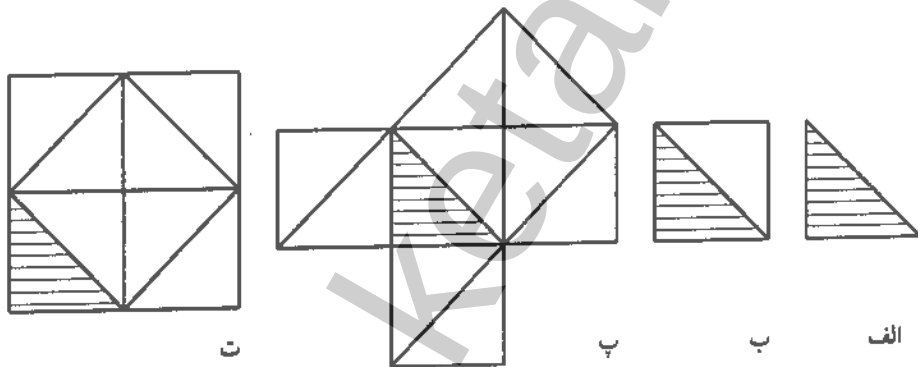
Sophism - ۱

Mesopotamia - ۳

Proclus - ۵

کروتون^۱، واقع در ایتالای جنوبی، نقل مکان کرد، و در آنجا انجمن اخوت مذهبی^۲ ای، بر مبنای عقاید و اعمال مرتاضانه متعددی، بنا نهاد. اعضای انجمن ظاهراً به تناسخ ارواح^۳ و عدد رمزی^۴ معتقد بودند. خصوصیات مکتب مورد بحث تا اندازه‌ای، به این علت که پیروان آن سوگند راز نگهداری خورده بودند، مبهم است، و گرچه دستاوردهای فیثاغورس نامعین‌اند، احتمال می‌رود مکتبش برای مدتی متجاوز از یک قرن پیروانی داشته، و محقق است که تعلیماتش بر بسیاری از متفکران مهم، از جمله افلاطون و ارسطو، تأثیر گذاشته است.

شکل (۱)



یکی از دستاوردهای این مکتب - و شاید یکی از دستاوردهای فیثاغورس - اثبات^۵ اولیه قضیه فیثاغورس، یعنی قضیه‌ای است که بیان می‌کند مجموع مربعات اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه مساوی مربع وتر آن است. ملاحظه صدق^۶ قضیه مزبور - بخصوص در بعضی از حالات خاص - بسیار مشکل نیست و خود قضیه یا حالت خاصی از آن به طور مستقل در تعدادی از فرهنگ‌ها، مثلاً در بابل، هند، و چین کشف شده بود. در این مورد نمی‌دانیم که فیثاغورسیان چگونه قضیه را اثبات کرده‌اند، اما محتمل به نظر می‌رسد شخصی که در حال ارائه دادن اثبات بوده هنگام سخن گفتن شکلی رسم می‌کرده و در جریان کار از شخصی که به اثبات گوش می‌داده این سؤال را که با آن موافقت دارد یا خیر می‌پرسیده است. این همان روش

۲ - Religious Brotherhood

۴ - Numerology

۶ - Truth

۱ - Croton

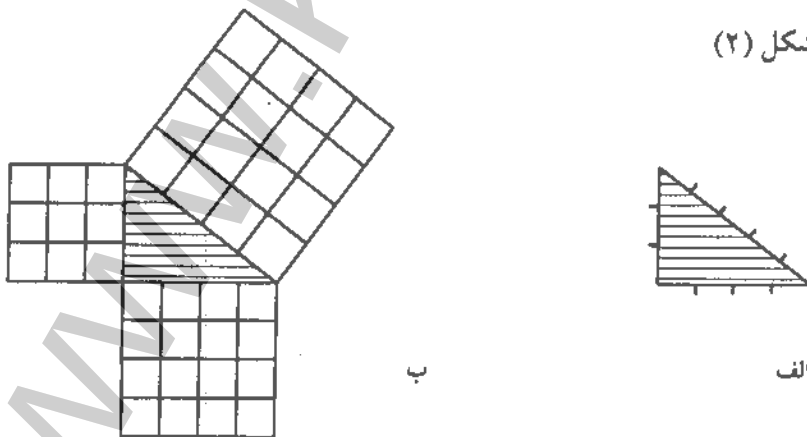
۳ - Transmigration of Souls

۵ - Proof

سقراط در کتاب منوی افلاطون^۱ (۳۹۰ ق.م) است که در آن در واقع حالت خاصی از این قضیه ثابت شده است. نیز محتمل به نظر می‌رسد که همان طور که اغلب در ریاضیات اتفاق می‌افتد، ابتدا حالات خاص قضیه اثبات شده و بعد تعمیم یافته باشد. بالاخره، احتمال دارد که مفروضات اثبات در ابتدا بیان نشده باشند بلکه در طی اثبات به آنها توسل شده باشد، و - حداقل، در بعضی موارد - به وضوح توسط یکی از دو طرف اثبات مشخص نشده باشند. با فرض تمام این موارد، می‌توانیم صورت محتمل زیر را در نظر بگیریم.

فیثاغورس کار را با مثلث قائم الزاویه متساوی الساقینی (چنان که، در شکل ۱ الف نشان داده شده است) آغاز و شکلی بر این مثلث بنا کرد (شکل‌های ۱ ب و پ). در این صورت اثبات قضیه را می‌توان با جریان شمارش مثلث‌های همنهشت^۲ به دست داد. به طریق دیگر، ممکن است یک شکل رسم (شکل ۱ ت) و تنها در مورد همان شکل استدلال کرده باشد. نیز مدرکی موجود است که مقرر می‌کند وی (مانند بابلی‌های باستانی‌ای که ۱۲۰۰ سال مقدم بر او بودند) می‌دانسته که مثلث به اضلاع ۳، ۴، ۵ قائم الزاویه است. اگر چنین باشد، ممکن است اشکالی چون شکل‌های ۲ که در آنها شمردن مربع‌های واحد امکان‌پذیر است، رسم کرده باشد.

شکل (۲)



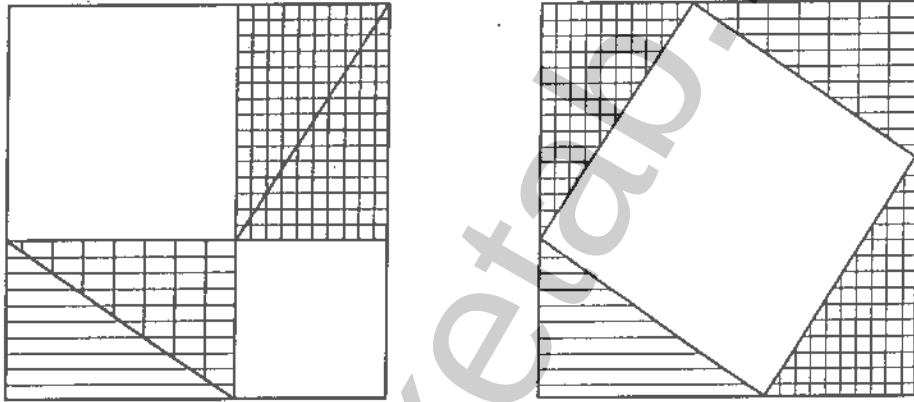
◀ مربعی هفت در هفت واحد، مشابه شکل ۱ ت، چنان رسم کنید که در آن بتوان صدق قضیه فیثاغورس را در مورد مثلث به اضلاع ۳، ۴، ۵ بدون انجام ترسیمات دیگر ملاحظه کرد.

در صورتی که فیثاغورس قضیه‌اش را در حالت کلی اثبات کرده باشد، ممکن است از ترسیمی چون ترسیم داده شده در شکل ۳ الف استفاده کرده باشد. آشکار است که هر مثلث

شکل (۳)

الف

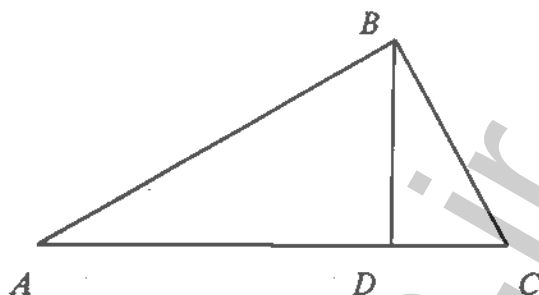
ب



قائم‌الزاویه را می‌توان چنان که در این شکل مشخص شده است، چهار بار رسم کرد. اما سطح مربع مربوط به وتر برابر تمام سطح مربع بزرگ منهای سطح چهار مثلث هم‌نهشت است. مثلث‌ها را به صورتی که در شکل ۳ ب مشخص شده است، درمی‌آوریم. واضح است که مجموع مربعات مربوط به دو ضلع زاویه قائمه مثلث قائم‌الزاویه مورد بحث برابر تمام سطح مربع بزرگ منهای سطح چهار مثلث هم‌نهشت است.

این طریق به طور شهودی واضح‌ترین طریق اثبات قضیه عمومی فیثاغورس است، که تا کنون کشف گردیده است. اما درست به همین دلیل، از آنجا که اغلب اتفاق می‌افتد که نخستین اثبات قضیه‌ای بسیار دورتر از ساده‌ترین اثبات آن باشد، نامحتمل است که فیثاغورس آن را کشف کرده باشد. در عوض، احتمال دارد که در این مورد فیثاغورس از تئوری تناسب^۱ خود استفاده کرده باشد. این اثبات را به زبان امروزی می‌توان چنین توصیف کرد که مثلث ABC را (شکل ۴)، که در آن زاویه B قائمه است، در نظر می‌گیریم، و از B عمودی بر وتر آن فرود

شکل (۴)



می آوریم. در این صورت مثلث های ADB ، BDC ، ABC متشابه اند (یعنی، زوایای متناظر مساوی دارند) و بنابراین اضلاعشان به یک نسبت اند. در نتیجه

$$(AB) : (AD) :: (AC) : (AB)$$

$$(BC) : (DC) :: (AC) : (BC)$$

با بیان تازه این روابط (با ضرب طرفین و وسطین) داریم

$$(AB)^2 = (AD) \cdot (AC)$$

$$(BC)^2 = (DC) \cdot (AC)$$

و با جمع کردن، حاصل می کنیم

$$\begin{aligned} (AB)^2 + (BC)^2 &= (AD) \cdot (AC) + (DC) \cdot (AC) \\ &= (AC) \cdot ((AD) + (DC)) = (AC)^2 \end{aligned}$$

هنگام بررسی اثبات های امکاناً از فیثاغورس فوق، تعدادی ویژگی آشکار می شوند، که اولین آنها این است که مفروضات به طور واضح بیان نشده اند، و در هر مرحله صرفاً به وضوح شهودی استناد شده است. و دوم، چنین در نظر گرفته شده اند که، همان طور که افلاطون در زیر

مطرح می‌کند، کلی، مثالی، و دقیق باشند.

[دانشجویان هندسه] اشکال مرئی را به کار برده در مورد آنها به بحث می‌پردازند، هر چند آنچه که واقعاً در ذهن آنهاست مبادی‌ای است که اشکال از آنها بیرون آمده‌اند، به این ترتیب که، به عنوان مثال، در مورد این مربع یا قطر خاصی که رسم کرده‌اند استدلال نمی‌کنند، بلکه در مورد مربع و قطر مثالی به برهان آوردن می‌پردازند، و در تمام حالات نیز چنین می‌کنند. نمودارهایی که رسم می‌کنند و مدل‌هایی که می‌سازند اشیایی واقعی‌اند... در حالی که دانشجو در جستجوی مشاهده حقایقی است که تنها فکر می‌تواند ادراکشان کند.

سوم، هیچ علامتگذاری خاصی به کار نرفته است، جز اینکه در شکل ۳، از هاشور، که توضیح مطلب بدون آن بسیار طولانی می‌شود، استفاده شده است، و امکان دارد که فیثاغورس از وسیله‌ای مشابه آن استفاده کرده باشد، و در هر حال امکان دارد که از وسیله‌آشنای مشخص کردن مثلث‌ها با حروف، آنسان که در شکل ۴ به کار رفته، مطلع نبوده باشد. ممکن است این موضع بکلی بی‌اهمیت به نظر برسد، اما امروزه می‌دانیم که پیشرفت علوم و ریاضیات غالباً به پیشرفت در علامتگذاری بستگی داشته است. تا یک مرحله چنین به نظر می‌رسد که علامتگذاری صرفاً به خاطر سهولت در کار به کار می‌رود، اما از این مرحله که بگذریم این کار به عمل ابتکاری ارائه دادن توسعه‌های بیشتر یک خاصیت ذاتی و تجویز فشرده کردن عبارات، که درک مطلب را ممکن می‌سازند، کمک می‌کند. در این مورد نمی‌دانیم چه کسی برای اولین بار راجع به این وسیله ساده اسم‌گذاری نقاط، خطوط، مثلث‌ها، و غیره فکر کرده، اما بدون این کار تنظیم کتاب مقدمات^۱ اقلیدس امکان‌پذیر نبوده است.

اما مهم‌ترین قضیه ریاضی مکشوف فیثاغورس و مکتب او رابطه فیثاغورس نبود؛ بلکه کشف و اثبات وجود طول‌های سنجش‌ناپذیر^۲ بود. سنجش‌ناپذیر به معنی بدون مقیاس مشترک است، و آشکار است که مقیاس مشترک تمام اعداد واحد است و در حقیقت، هر عدد به صورت تعداد کثیری از واحدها^۳ می‌باشد. نیز تصوّر می‌شد که واحد حسابی^۴ تقسیم‌ناپذیر باشد، و

کسرهایی چون $\frac{1}{4}$ ، $\frac{2}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ و غیره، به صورت ارائه دهنده قسمتی از واحد در نظر گرفته نمی شدند، بلکه آنها را همواره به صورت ۱ واحد از ۲ واحد، ۲ واحد از ۳ واحد، ۳ واحد از ۴ واحد، و غیره می دانستند. با معلوم بودن این واحد حسابی، احتمالاً آشکار بود که باید وجود هندسی تقسیم ناپذیر^۱ به قدر کافی کوچکی موجود باشد که هر طولی مضرب زوجی از آن باشد. در این صورت نتیجه می شد که هر دو طول در نسبت ثابت معینی^۲ به یکدیگرند، و آنچه که از نسبت ثابت معین در نظر گرفته می شد این بود که اندازه نسبی هر دو طول می تواند به صورت نسبتی بین دو عدد بیان شود. یعنی،

$$x : y :: \text{طول دوم} : \text{طول اول}$$

که در آن x تعداد وجودهای تقسیم ناپذیر در طول اول و y تعداد آنها در طول دوم است. نظریه تناسب فوق این عقیده فیثاغورسیان را، که اعداد ذات اشیا می باشند، قابل فهم می کند. چرا که به این ترتیب یکی پنداشتن وجود هندسی تقسیم ناپذیر مورد بحث و واحد عددی طبیعی بود. اما فیثاغورسیان بنای یکی پنداری^۳ دیگری را، یعنی، اینکه واحد (یا وجود تقسیم ناپذیر) ذره ای فیزیکی^۴ نیز هست، گذاشتند. عقیده فوق انگیزه (یا انگیزه)ی این کشف فیثاغورسیان شد که تمام مقیاس های موسیقی را می توان به صورت نسبتی از چهار عدد طبیعی اولیه، و فی المثل اکتاو ۱:۲، پنجم ۲:۳، چهارم ۳:۴، بیان کرد. فیثاغورسیان در این حقیقت که $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ اهمیت خاصی ملاحظه می کردند، و چنان که ارسطو می گوید در هر جا عدد می دیدند:

به نظر می رسید در اعداد شباهت های بسیاری - بیش از آنکه در آتش و خاک و آب - با اشیا یی که وجود دارند و به وجود می آیند می دیدند (از این دست که تغییر چنان و چنین اعداد عدل می شود، تغییر دیگر روح و محبت می شود، دیگری اقبال می شود - و به همین ترتیب تقریباً تمام اشیا از لحاظ عددی قابل بیان اند) و از آنجا که، باز، ملاحظه می کردند که تغییرات و نسبت های مقیاسات موسیقی قابل بیان به اعدادند - و از آنجا

که، در این صورت به نظر می‌رسید که تمام اشیای دیگر با تمامی ذاتشان بر اعداد مدلبندی شده‌اند، و به نظر می‌رسید که اعداد اولین اشیا در کل طبیعت‌اند، فرض می‌کردند که اصول اعداد اصول تمام اشیا هستند، و کل افلاک، مقیاس موسیقی و عدد است.

با داده شدن این اعتقاد به عدد به عنوان منبع توحید حساب، هندسه، جهان‌شناسی و فلسفه - اعتقادی که اندک اندک و با تمام مهارت عملی مذهبی القا شده بود - بایستی کشف طول‌های سنجش‌ناپذیر، به عنوان اولین تصادم از تصادمات بسیار بین علم و مذهب در غرب، ضربه‌ای جانانه بوده باشد. گفته می‌شود که فیثاغورسیان قسم یاد کردند که هیچ‌گاه این کشف را آشکار نکنند. ارسطو در مورد اینکه چگونه وجود طول‌های سنجش‌ناپذیر برای اولین مرتبه اثبات شد اشاره مختصری کرده است. جوهر اثبات مذکور، به بیان امروزه، به ترتیب زیر است:

فرض می‌کنیم مربع واحدی داریم (شکل ۱ ب را ملاحظه کنید) و نسبت ضلعش (که آن را s می‌نامیم) به قطرش (که آن را d می‌نامیم) را در نظر می‌گیریم. طبق نظریه نسبت‌ها:

$$s : d :: x : y$$

که از آن، در صورتی که دو طرف آن را مربع کنیم، استخراج می‌کنیم

$$\frac{s^2}{d^2} = \frac{x^2}{y^2}$$

بنا به قضیه فیثاغورس،

$$d^2 = s^2 + s^2 = 2s^2$$

بنابر این داریم

$$\frac{s^2}{d^2} = \frac{s^2}{2s^2} = \frac{1}{2} = \frac{x^2}{y^2}$$

یعنی، $2x^2 = y^2$ ، که از آن نتیجه می‌شود لازم زوج است. در نتیجه x ، از آنجا که y و x مقسوم علیه مشترک ندارند، باید فرد باشد. اگر لازم زوج باشد، در این صورت $2z = y$ و $2x^2 = 2z^2 = y^2$ ، و بنابراین $2z^2 = x^2$ ، که از آن نتیجه می‌شود x زوج است. از آنجا که برای یک عدد غیرممکن است که هم فرد هم زوج باشد، s و d نمی‌توانند سنجش پذیر باشند.

◀ اثبات فوق کلی‌تر از مطلوب بود. از چه لحاظ؟

از آنجا که عدد به عنوان تعدادی از آحاد در نظر گرفته می‌شود، نتیجه می‌گیریم که هیچ عددی نمی‌تواند یا طول قطر یک مربع واحد متناظر باشد. به این ترتیب، هماهنگی بین اعداد و طول‌ها، یا بین حساب و هندسه، شکسته شد. طول $d (= \sqrt{2})$ نه یک عدد، نه نسبت (به «اعداد گویا» رجوع کنید) بین دو عدد بود، و به جای این، طبق نظر فیثاغورسیان، d متناظر با یک مقدار گنگ^۱ است. در نتیجه عدد نمی‌تواند اساس هندسه، و از آن کمتر، اساس جهان‌شناسی یا فلسفه باشد.

اهمیت توسعه فوق برای منطق در این است که اولین استفاده علمی از اثبات تعلیق به ناممکن^۲ را ارائه می‌دهد. در چنین اثباتی نقیض فرض را استخراج می‌کنیم و سپس نتیجه می‌گیریم که آن فرض دروغ است، و اهمیت آن در این است که قادرمان می‌کند وضعیتی را که توسط خود یا دیگری در نظر گرفته‌ایم ابطال کنیم. ولی در صورتی که آنچه که استخراج شده است دروغ باشد، استدلال تعلیق به محال^۳ نامیده می‌شود. به این ترتیب نوع استدلال اخیر غیر از استدلالاتی که در آنها نتیجه مستخرج صرفاً دروغ در نظر گرفته می‌شود شامل استدلالات تعلیق به ناممکن نیز می‌شود. شک نیست که این نوع متمایز تا زمان‌های بسیار بسیار بعد مشخص نشده بود.

ریاضیات در فاصله بین دوره دستاوردهای فیثاغورسیان اولیه و روزگار ارسطو در تعدادی از رشته‌های مهم توسعه یافت. ولی، از نقطه نظر منطقی در واقع هیچ چیز تازه‌ای به طرز عمل

اثبات و رد^۱ فیثاغورسیان اولیه افزوده نشد. اما ریاضیات تنها زمینه‌ای نبود که محرک توسعه منطق گردید؛ استدلالات فلسفی و دادگاه‌های حقوقی نیز چنین کردند.

ارتباط چنین استدلالاتی را می‌توان با بررسی فایده‌گسترش یک تئوری منطقی در وضعیتی ملاحظه کرد که در آن هم بحث مفصلی که هدفش اثبات راستی این و آن است وجود دارد، هم عدم توافق راجع به اینکه راستی چیست موجود است. در این مورد در صورتی که عدم توافقی موجود نباشد یا تنها تعداد کمی از آن وجود داشته باشد (و از آنجا که در حالت اخیر هر عدم توافق را می‌توان به طور مجزا مورد بررسی قرار داد) بیان اصول منطقی لازم نمی‌شود. برعکس، توانایی توضیح اصول منطقی متضمن توافق در بعضی از استدلالات بسیار ساده است. چه بدون آن نامحتمل است که اصولاً ارتباط امکان داشته باشد.

آتن باستان زمان ارسطو نظریات متنوع و متفکران بسیار آماده داشت. بعضی از این متفکران از خود آتن، و بسیاری از آنان از مستعمرات یونان بودند؛ و اینان یا خود به آتن می‌آمدند یا اخبار نظریاتشان توسط مریدانشان آنجا آورده می‌شد. از این گذشته، نوشته‌های باقیمانده یا روایات شفاهی‌ای از میراث فلسفی موجود بود که حتی در آن هنگام بیش از ۲۰۰ سال از قدمتشان می‌گذشت، و طبق آنها تالس بر این بود که ماده اصلی جهان آب است؛ آناکسیماندر^۲ بر اینکه نه یک چیز بلکه چیزهایی نامعین است؛ هراکلیتوس^۳ بر اینکه تمام اشیا در حرکت‌اند؛ پارمنیدس^۴ بر اینکه هیچ چیز در حرکت نیست؛ پروتاگوراس^۵ بر اینکه تمام قضاوت‌های اخلاقی مان نسبی‌اند؛ سقراط^۶ بر اینکه چنین نیستند؛ و غیره. بنابراین ارسطو به خاطر ابطال استدلالات سوفسطائیان جورواجور^۷ و فلاسفه‌ای که نتیجه‌گیری‌هاشان را یا نادرست یا پارادوکس‌نما^۸ یافته بود، کوشش داشت که مجموعه‌ای از اصولی را تشکیل دهد که به کمک آنها بتوان خوب بودن استدلال معلومی را تعیین کرد.

زنون ایلایی^۹ نمونه‌ای از متفکران پیش از سقراط^{۱۰} بود که ارسطو سعی در ابطال استدلال‌هایش کرد. مطابق گفته افلاطون، زنون «دارای چنان هنر سخنوری‌ای بود که اشیای یکسان را

Anaximander - ۲

Parmenides - ۴

Socrates - ۶

Paradoxical - ۸

Pre-Socratic - ۱۰

Disproof - ۱

Heraclitus - ۳

Protagoras - ۵

Sundry Sophists - ۷

Zenon of Elea - ۹

در نظر شنوندگانش مساوی و نامساوی، واحد و کثیر، ساکن و متحرک جلوه می‌داد» در این مورد از زنون نوشته باقیمانده‌ای نداریم، و این امکان نیز وجود دارد (گرچه نامحتمل است) که اصلاً چیزی ننوشته باشد. با این همه آشکار است که زنون تعداد معتناهایی معما که فایده فلسفی دارند مطرح کرده است. تفسیر و تنقید این معماها از خیلی قبل ظاهر شدند و نوشته‌های مربوط به آنها هنوز هم با سرعت قابل توجهی در جریان است. نمونه‌ای از پارادوکس‌های زنون، به اصطلاح حجت آشیل^۱ علیه حرکت است. در این مورد ارسطو چنین می‌گوید:

... این معما روی هم رفته به این ترتیب است که در یک مسابقه سریع‌ترین دونده هیچ‌گاه نمی‌تواند به کندترین دونده اندکی جلوتر از خود برسد، زیرا تعقیب‌کننده نخست باید به نقطه‌ای که مورد تعقیب از آن آغاز کرده برسد، بنابراین کندترین باید همواره تقدم داشته باشد.

یکی از دلایل اینکه تفاسیر بسیاری در مورد معماهای مذکور موجود بوده، توصیفات (از جهات بسیار) مرموزی است که از آنها در دست است. مورد فوق نمونه‌ای از این توصیفات است، اما بازسازی احتمالی آن ممکن است به صورت زیر باشد:

آشیل زاده ربه النوع و سریع‌ترین دوندگان بشری، حتی نمی‌تواند به لاک‌پشتی که کندترین موجودات است برسد. زیرا فرض می‌کنیم مسابقه‌ای داریم که در آن به لاک‌پشت تقدم می‌داده‌ایم. در این صورت، آشیل برای رسیدن به نقطه‌ای که لاک‌پشت در آن بوده است، هر چه هم که سریع بدود، باید مقداری وقت صرف کند، و در این وقت لاک‌پشت مسافتی (گرچه کمتر) به جلو حرکت کرده است. اما می‌توانیم این استدلال را بار دیگر و بار دیگر تکرار کنیم. واضح است که آشیل می‌تواند به لاک‌پشت نزدیک‌تر و نزدیک‌تر شود اما نمی‌تواند به او برسد.

گرچه محقق نیست، اما امکان دارد که تعلیق به محال علیه وجود حرکت فوق، از تعلیق به ناممکن استدلالات ریاضیات فیثاغورسی ملهم شده باشد. به هر تقدیر، استفاده بیشتری از این نوع استدلال را در فلسفه نمی شناسیم. اما اهمیت این نوع استدلال، یعنی تعلیق، در این است که هنگامی که آموخته شود، بیش از مریدانی که تعالیم استاد را معتقدانه پذیرفته و انتشار داده اند، به پروراندن مباحثه و مناظره تمایل دارد، و شاید، ابداع موضعی در بحث بر ضد یکی از حقایق وضع شده توسط واضع، مهم ترین سهم فلاسفه پیش از سقراط در تمدن ما باشد، و مطمئناً یکی از بزرگ ترین دستاوردهای فرهنگی تمام اعصار است.

متأسفانه، معلوماتمان در مورد منابع این دستاورد بسیار اندک است. اما، محتمل است که سهم مزبور از عنصر بذله گویی ای که در طبیعت بشر است، سرچشمه گرفته باشد، و شاید یکی از صورت های اولیه آن معمایی باشد که توسط ابوالهول^۱ در افسانه اودیپوس^۲ مطرح شده است. در این افسانه، ابوالهول می پرسند: «کدام موجود است که صبحگاهان بر چهار پا، نیمروز بر دو پا، و شب هنگام بر سه پا حرکت می کند؟» پاسخ صحیح اودیپوس ابهام آمیز و چنین است: «انسان، زیرا در طفلی بر دست و پا می خزد؛ در بزرگی مستقیم می رود؛ و در سنین پیری به کمک عصا حرکت می کند.» و به این ترتیب برق بینش، شهر تبه^۳ را نجات می دهد. احتمال دارد بیشتر تعلیمات فلاسفه پیش از سقراط به همین ترتیب، یعنی عقل لبابی^۴ ای بوده باشد که آمدنش «غیرمترقبه»^۵ است.

در هر حال، نمونه نمایش دیگری گسترش یافت که در آن بازی ای وجود داشت که موضوعش شکست دادن رقیب با استفاده از کلمات بود. شاید زنون تأثیر مهمی در گسترش این بازی داشته است. در این مورد می دانیم که طبقه ای از تعلیم دهندگان وجود داشتند که به عنوان سوفیست یا سوفسطائی^۶ معروف شدند. اینان، چون مطربان آواره، در سفر بودند، و در مقابل مبلغی حق التعلیم به شاگردانشان می آموختند که چگونه به طرزی مؤثر و متقاعدکننده در مورد انواع مختلفی از موضوعات سخن گویند. سوفسطائیان برای شکست دادن مخالفان در بحث های عمومی نیز آمادگی داشتند. در چنین نمایشی، باید رقابت ها بسیار شدید و بحث ها اغلب داستان و ش^۷ بوده باشد، از این رو می توان دانست که چرا ورود سوفسطائی مهمی به شهر،

Oedipus Myth - ۲

Aphoristic Wisdom - ۴

Sophist - ۶

Sphinx - ۱

Thebes - ۳

Out of the Blue - ۵

Dramatic - ۷

موجب هیجان بسیار می‌شد و چرا سوفسطائیان غالباً می‌توانستند حق الزحمه‌های بسیار طلب کنند.

پروتاگوراس، که اغلب، بزرگ‌ترین سوفسطائیان محسوب می‌شود، و بی‌هیچ شک در صورتی که آثارش باقیمانده بود، متفکر بزرگی به شمار می‌آمد، بیشتر برای این گفته‌اش که «انسان معیار تمام اشیا است» معروف است و هومانیسمش را، احتمالاً به طریقی، که از لحاظ غرابت مدرن در نظر گرفته می‌شوند، ارائه داده است.

داستان قدیمی زیر در مورد او، گرچه شاید جعلی باشد، نوع زبان‌آوری‌هایی را مشخص می‌کند که سوفسطائیان قادر به انجام آن بودند. پروتاگوراس با اثوافلوس^۱ قرار گذاشت که به او چنان که بتواند وکیل دعاوی شود معافی بیان بیاموزد، و اثوافلوس در ابتدا تنها نیمی از حق التعلیم کلان او را پرداخت، و در مورد بقیه بر این توافق کردند که قسط دوم بعد از اینکه اثوافلوس در اولین دعوی در دادگاه برنده شد پرداخت شود. اما اثوافلوس برای مدت مدیدی در اقدام به عمل تأخیر کرد، و پروتاگوراس که از طرفی در مورد شهرتش نگران شده بود و از طرف دیگر به حق الزحمه‌اش نیاز داشت، تصمیم به شکایت گرفت. در دادگاه پروتاگوراس با هیئت قضات چنین استدلال کرد:

اثوافلوس مدعی است که نباید پولی به من بپردازد اما سخن او بی‌معنی است. زیرا فرض می‌کنیم در این دعوی برنده شود، در این صورت، از آنجا که این اولین ظهور او در دادگاه است، باید پول را بپردازد زیرا در اولین دعوی خود پیروز شده است. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم در دعوی بازنده شود، در این صورت، باز باید، بنا به حکم دادگاه، حق الزحمه مرا بپردازد. و از آنجا که ناچار در این دعوی یا برنده یا بازنده می‌شود، باید حق الزحمه مرا بدهد.

اثوافلوس شاگرد خوبی بود و توانست پاسخ استدلال پروتاگوراس را به سبک خودش بدهد:

پروتاگوراس بر این ادعاست که باید پولی به او بپردازم اما این سخن اوست که بی‌معنی است. زیرا فرض می‌کنیم در این دعوی برنده شود، در این صورت از آنجا که در اولین دعویم پیروز نشده‌ام، مطابق قرارداد، نیازی نیست که پولی به او بپردازم. از طرفی دیگر، فرض می‌کنیم در محاکمه بازنده شود، در این صورت، بنا به حکم دادگاه، مجبور به پرداخت وجهی به او نیستم. در نتیجه، از آنجا که باید در این دعوی یا برنده یا بازنده شود، نباید به او چیزی بپردازم.^۱

◀ می‌توان استدلال‌های مشابه اثوافلوس و پروتاگوراس، در دفاع و دادخواهی داستان زیر تشکیل داد. داستان را از کتاب دن کیشوت اثر سروانتس برداشته‌ایم. در داستان، سانچوپانزا، حاکم جزیره باراتویا، با دعوی زیر که توسط بیگانه‌ای برای او مطرح شده روبروست:

عالیجناب ... رودخانه بزرگی است که یک ملک اربابی را به دو ناحیه تقسیم کرده است - از جناب حاکم تقاضا می‌کنم خوب توجه بفرمایند، زیرا، مسئله مهم و حلش به گونه‌ای صعب‌الوصول است. - به مطلب برگردیم: روی این رودخانه پلی است که در یک سوی آن چوبه‌داری قرار دارد با آنچه که شبیه دادگاهی است که در آن عموماً چهار قاضی برای نظارت به اجرای قانونی نشسته‌اند که توسط صاحب رودخانه، پل، و ملک اربابی وضع شده است. قانون مذکور چنین است: هر کس از این پل می‌گذرد باید ابتدا به راستی سوگند بخورد که به کجا و چرا می‌رود. در این صورت اگر حقیقت را بگوید، اجازه رفتن می‌یابد، اما اگر دروغ بگوید، بدون هیچ گونه امید بخشایشی بر داری که در آنجا تعبیه شده است، خواهد مرد. از زمانی که این قانون و شرایط سختی که مقرر کرده اعلام شده است، بسیار کسان بوده‌اند که حقیقت را گفته‌اند و از جانب قاضیان مجاز به آزادانه گذشتن از پل شده‌اند. اما یک روز چنین اتفاق افتاد که هنگامی که بر سر سوگند دادن شخصی آمدند، آن شخص سوگند خورد و تأکید کرد که مقصدش مردن بر سر داری است که آنان بر پا کرده‌اند و هیچ قصد دیگری ندارد ...

۱ - در این داستان، برای اینکه به صورت منطقی خود درآید، تغییرات غیراساسی داده‌ایم. کسانی که علاقه به ملاحظه اصل داستان دارند، به متن اصلی رجوع کنند.

آشکار است که برای سر و سامان دادن به چنین معماهایی باید در روش‌های عمومی^۱ استدلال تحقیق کنیم، و ممکن است انگیزه چنین تحقیقی تنها یافتن حقیقت نباشد و شکست دادن حریف نیز به میان آید. مطمئناً انگیزه اخیر بر افلاطون (۴۲۷ - ۳۴۷ ق. م.) که یک سری دیالوگ، که او را هم به عنوان متفکر هم به عنوان نویسنده دست‌نیافتنی کرد، نوشت، تأثیر داشته است. افلاطون از عنصر تفریحی موجود در کار عظیم و تهورآمیزش آگاه بود و گاهگاه - بخصوص در اواخر عمرش - آن را، و نیز این را که به طور کلی سعی در هنرگری شایسته فیلسوف راستینی نیست که باید حقیقت را بی‌توجه به هنر و تفریح جستجو کند، حس می‌کرد. در این مورد نیچه‌ی جوان کار افلاطون را چنین تصویر می‌کند:

... آنچه در دیالوگ‌های افلاطون از اهمیت هنری خاص برخوردار است این است که اساساً حاصل مناظره‌ی وی با هنر خطیبان، سوفسطائیان، و درام‌نویسان عصرش، به این منظور به وجود آمده است که او را قادر کند که در آخر چنین بگوید: نگاه کنید، من نیز می‌توانم آنچه را که رقبای بزرگم توان انجام دادن آن را دارند انجام دهم؛ در حقیقت، من آن را بهتر از آنها انجام می‌دهم. نه پروتاگوراس افسانه‌هایی به زیبایی افسانه‌های من آفریده؛ نه هیچ درام‌نویسی اثر زنده و جذابی چون سمپوزیوم^۲ من به وجود آورده؛ و نه هیچ خطیبی خطبه‌هایی از آن دست که در گرگیاس^۳ من است نوشته است - و اینک من تمام این مطالب را به کل انکار و تمام هنرهای تقلیدی را محکوم می‌کنم، چرا که تنها حس رقابت در مناظره بود که مرا شاعر و سوفیست و خطیب بار آورد.

شاید در هیچ دیالوگی روح بازیگر و رقابت جوی افلاطون بهتر از پروتاگوراس آشکار نشده باشد. اصل مطلب در این دیالوگ عبارت از گفتگویی طولانی بین پروتاگوراس و سقراط در حضور جمع است، و به این موضوع که آیا فضیلت آموختنی است یا خیر می‌پردازد. پروتاگوراس اظهار می‌کند که می‌تواند چنین باشد؛ سقراط در درستی این سخن تردید می‌کند. و این موضوع به این مسئله که فضیلت اساساً چیست می‌انجامد. اما، مکالمه، آنجا که در پایان افلاطون سقراط را به گفتن مطالب زیر وامی دارد، چیزی بیشتر از بازی و تفریح را آشکار

می‌کند:

... نتیجه بحثمان به نظر من غریب می‌آید. چه، اگر استدلال‌مان صوتی انسانی داشت، آن را می‌شنیدیم که به ما می‌خندد و چنین می‌گوید: «پروتاگوراس و سقراط، شما موجودات عجیبی هستید؛ تو سقراط، که می‌گفتی فضیلت را نمی‌توان آموخت، اکنون حرف خود را با کوشش در اثبات اینکه تمام چیزها، از جمله عدالت، میانه‌روی، و دلیری، معرفت‌هایی هستند که منجر به نشان دادن این می‌شوند که فضیلت محققاً می‌تواند آموخته شود، نقض می‌کنی؛ زیرا در صورتی که فضیلت، آن طور که پروتاگوراس کوشش در اثبات آن داشته است، چیزی غیر از معرفت باشد، واضح است که نمی‌تواند آموخته شود؛ اما در صورتی که فضیلت، آن گونه که تو جویای نشان دادن آنی، کلاً معرفت باشد، در این صورت جز این فرض که فضیلت درخور آموخته شدن است، نمی‌توانی کرد. از طرف دیگر، پروتاگوراس که بحث را، با گفتن اینکه ممکن است فضیلت را آموخت، آغاز کرد، اکنون علاقه به اثبات این دارد که فضیلت هر چیز جز معرفت است؛ که اگر این موضوع راست باشد، باید به طور کامل عاجز از آموخته شدن باشد، اینک، پروتاگوراس، من با مشاهده این درهم‌آمیختگی شدید افکارمان، میل بسیار دارم که موضوع روشن شود.

شاید این ایده که استدلال حیات خاص خود را دارد، و نتایج آن ممکن است در نظر سازنده آن غیرمنتظره یا ناخواسته باشد ناآشنا با سقراط نبوده باشد. اما این نظریه به کیفیت قابل بحث دیالوگ‌های سقراطی منجر می‌شود، که به نوبه خود آتش اشتیاق را به علت پی‌آمد نامعلومش، دامن می‌زند. آشکار به نظر می‌رسد که سقراط اولین کسی بود که به جای پرداختن به قضایای خاصی که ممکن است نتایج تحقیق باشند نهایت توجه خود را به خود تحقیق معطوف می‌کند. در این مورد در فرصتی به طرف صحبت مکالمه فلسفیش چنین می‌گوید: «... زیرا در صورتی که شرافتمندانه و بدون ناراحتی خود را به دست شفافبخش استدلال، چنان که به طبیعی، بسیاری هیچ زبانی نخواهی کرد...» اینکه حتی امروز کمال مطلوب را از تحقیق درست و بی‌عیبی به دست می‌آوریم، که در آن محقق از استدلال، به هر جا که منجر شود تبعیت می‌کند - حتی اگر برایش گرفتاری یا زیان به بار آورد - از سقراط است. توسعه این طرز برخورد گرچه تماماً سهم منطق نیست، برای آن دارای کمال اهمیت است، چه بدون آن قسمت عظیمی از آرزوی صحیح

استدلال کردن به باد خواهد رفت.

این طرز تلقی منجر به حرمتی برای مکالمه حکیمانه‌ای می‌شود که درستی خود را حفظ کرده و به زبان‌بازی محض انحطاط نیافته است. سقراط معتقد است که

... غالباً به نظر می‌رسد که مردم ناهشیارانه وارد مشاجرات محضی می‌شوند که آنها را با استدلال معقول اشتباه می‌کنند، و قادر به بیرون کشیدن امتیازات مناسب موضوع بحث‌شان از آنها نیستند، و بنابراین، به جای تبادل حکیمانه افکار در تعقیب تناقضاتی عمر ضایع می‌کنند که صرفاً لفظی‌اند.

مثال‌های بسیاری از تناقضات صرفاً لفظی و مبهم‌گویی در دیالوگ‌های افلاطون، بخصوص در اثونودموس^۱ آمده است. در این دیالوگ استدلالات نامعقولی در دهان گویندگان نهاده شده است؛ استدلالاتی که نتایج‌شان، مثلاً، عبارت از این هستند که هیچ کس نمی‌تواند دروغ بگوید، چیزی به نام تناقض وجود ندارد؛ سقراط همه چیز را می‌داند. مثالی از این دست، جرّ و بحث مشهور بین دیونوسودوروس^۲ و کتسی‌پیوس^۳ است:

... می‌گویی که سگی داری.

کتسی‌پیوس گفت: بله، و از آن سگ‌های بدذات.

و او توله‌هایی دارد؟

بله، و آنها بسیار شبیه خودش‌اند.

و سگ مورد بحث پدر آنهاست؟

گفت: مسلماً، من او و مادر توله‌ها را دیدم که با هم حرکت می‌کنند.

و سگ از آن تو نیست.

مطمئناً هست.

در این صورت او پدر است، و از آن توست؛ لذا، پدر توست، و توله‌ها برادران تواند.

◀ در استدلال فوق دو تعریف متفاوت از یکی از عبارات آن، چنان به دست دهید که ابهامی را رفع کند که موجه‌نمایی استدلال وابسته به آن است.

جاهلانۀ است که تصوّر کنیم افلاطون از نادرستی استدلالانی مشابه استدلالات مذکور در اثوودموس آگاه نبوده است. با این همه از اینکه تا چه حدّ در تشخیص درستی بسیاری از استدلالانی که در دهان قهرمانان نوشته‌های خود می‌گذاشته دچار اشکال بوده است آگاهی نداریم. با وجود این افلاطون حجم عظیمی از استدلالات را در نوشته‌های خود حفظ کرده است، و همین موضوع جزء مهمّی از استدلالانی را که ارسطو منطق خود را از آنها مطرح کرده، تشکیل داده است.

بنابر این واضح است که همین نوشتن استدلالات یکی از سهام اصلی افلاطون در ماقبل تاریخ منطق صوری است. امّا هر چند که در جریان دیالوگ‌ها تعداد کمی از اصول منطقی اعلام شده است، محرّک حقیقی منطق نوشته‌های افلاطون نمایش دادن این حالت فکری غربانۀ سقراط است که مقرر می‌کند باید

در پذیرفتن این معنی که هیچ گونه سلامت و صحتی در استدلالات موجود نیست و راه دادن آن به ذهنمان محتاط باشیم، و به جای آن بگوییم که هنوز به صحت در خویش نرسیده‌ایم، و باید بالاترین سعی را در حاصل کردن سلامت ذهن انجام دهیم و در این راه مردانه بکوشیم...

چنین وضعی گرچه بر این تقاضاست که اجازه ندهیم استدلالات فلسفی در ایهامات محض ضایع شوند، اما محقّقاً طالب آن نوع جدّیتی نیست که بذله‌گویی و شیرین سخنی را کنار می‌گذارد.

اکنون به جمع‌بندی انگیزه ارسطو در اختراع منطق می‌پردازیم. در این مورد در مرحله اوّل میل به دانستن حقیقت طبیعت استدلال موجود است، یعنی کنجکاوی عقلانی‌ای که به علّت یا توجیه بیشتری نیاز ندارد، و در مرحله دوّم میل به دانستن شرایطی مطرح است که تحت آنها چیزی اثبات می‌شود. مسئله اخیر شاید به واضح‌ترین وضعیت در مورد هندسه تمرکز یافته، و چنین مطرح کرده باشد که چگونه تشخیص می‌دهیم رابطه‌ای ریاضی حقیقتاً برقرار است؟ امّا

مطلب از این بالاتر بوده در مسائل متافیزیکی نیز مطرح است. استدالات زنون در مورد اخیر مثال خوبی به دست می‌دهد. سرانجام و در مرحله سوم تمایل غلبه بر خصم موجود است. در این مورد شاید شباهتی با اختراع نظریه احتمال وجود داشته باشد. نظریه اخیر هنگامی آغاز شد که شوالیه^۱ از پاسکال درخواست کرد که مسائل خاصی را در رابطه با برنده شدن در قمار حل کند. اما نظریه احتمال، با کاربردش در موارد بسیار متفاوت، از جمله جمیع علوم فیزیکی و اجتماعی، بسیار جامع‌تر از این است. به همین ترتیب، منطق بسیار جامع‌تر و مفیدتر از وسیله‌ای است که ممکن است صرفاً برای نشان دادن اینکه خصم بر خطاست به کار رود. با این همه نباید خودخواهی و روحیه رقابتی را از یاد ببریم که بر مبدأ آن اثر داشته است.

ارسطو (۳۸۴ - ۳۲۲ ق. م.) باید مردی با انرژی بی‌حدّ بوده باشد، چه حوزه آگاهیش مبهوت‌کننده است. در قسمت‌های مهم زیست‌شناسی، فیزیک، نجوم، نظریه سیاسی و اخلاق سهمیم بوده، و دستاوردش در منطق تنها یکی از کشفیات بسیار دیگر اوست، که اگر به تمامی هم بر خطا بود باز او را یکی از اعظم دنیای تفکر به شمار می‌آورد. اما، نظر به تنوع مسائل مورد علاقه‌اش، نیز اعتقادش بر اینکه منطق تکنیک، هنر یا علمی آلی است، غیرمحمّل است خود وی با نظرمان راجع به این جنبه از تفکرش موافقت می‌کرد. در واقع نظریه منطقی‌ش چنان در تعدادی از مطالب متافیزیکی وابسته دیگر جای گرفته است که، در صورتی که بخواهیم آن را به طور جامع مورد بررسی قرار دهیم، باید درباره آن به تفصیل به بحث بنشینیم، اما به خاطر اجتناب از انحراف در مقصودمان که به دست دادن زمینه‌ای برای منطق ریاضی است، از چنین بحثی صرف‌نظر می‌کنیم.

گرچه ارسطو تعریف استدلال^۲ را به دست نداده است، آشکار است که مقصودش از آن، همان مقصود ما، یعنی، مجموعه‌ای از قضایاست که مدّعی است که یکی از آنها از بقیه نتیجه شده است، و به عبارت دیگر، بر این ادّعاست که یکی از قضایا، در صورتی که قضیه یا قضایای دیگر راست باشند، باید راست باشد. قضیه‌ای که از سایر قضایا به دست آمده است، نتیجه^۳ نامیده می‌شود؛ و آن یا آنها که نتیجه از آن یا آنها حاصل شده به مقدمه یا مقدمات^۴ موسوم است.

در این صورت استدلال درست^۱ استدلالی است که در آن اگر مقدمات راست باشند نتیجه نیز باید لزوماً راست باشد. استدلال نادرست^۲ استدلالی است که درست نباشد. درستی یک استدلال در حالت کلی مستقل از صدق یا کذب مقدمات آن است، و کاملاً امکان دارد که یک استدلال درست نتیجه دروغ و یک استدلال نادرست نتیجه راست داشته باشد.

◀ از هر یک از دو استدلال فوق مثالی تشکیل دهید.

از آنجا که مقررات درستی و راستی در حالت کلی مستقل اند، در به کار بردن «درست - نادرست» فقط در مورد استدلالات و «راست - دروغ» در مورد مقدمات یا نتیجه از عرف استاندارد منطق تبعیت می‌کنیم. این پیروی به گونه‌ای از مکالمات معمولی، که در آنها گفتن «مقدمه درست» یا «استدلال راست» مجاز است، تفاوت دارد. و با پرهیز از چنین زبانی از بعضی اغتشاشات سخنان معمولی در استدلالات پرهیز خواهیم کرد.

ارسطو تمایز بین درست و راست و نادرست و دروغ را می‌دانست، اما اولین نظم واضح و دقیق آن توسط رواقیون بر پا شد. در مورد تمایز بین جمله و گزاره نیز باید گفته مشابهی ادا شود، گرچه به نظر می‌رسد که ارسطو در این تمایز گهگاه به اشتباه بوده است. در زبان فارسی معمولاً فرق بین «جمله» و «گزاره» یا «بیانیه» را، گرچه نه به سهولت، تمیز می‌دهیم. مثال مناسبی در این مورد کلمه «اعلامیه» یا «بیانیه» در نطق گتیزبورگ لینکلن^۳ است:

هشتاد و هفت سال پیش، پدران ما ملت جدیدی، حامل آزادی، به این قاره آوردند،
و این بیانیه را که جمیع انسان‌ها مساوی خلق شده‌اند هدیه کردند.^۴

در این مورد شخص به خودش جمله هدیه نمی‌کند. به همین ترتیب، اگر به اصل پنجم اقلیدس اشاره کنیم، معمولاً مقصودمان چیزی در زبان یونانی نیست. جمله‌ای فارسی را در نظر می‌گیریم. آن را به دوازده زبان ترجمه می‌کنیم. در این صورت سیزده جمله، اما تنها یک گزاره

داریم. گزاره چیزی است که توسط جمله بیان شده است.
ارسطو بین جمله و گزاره تمایزی، هر چند متمایز از آنچه هم اکنون وصف شد، می‌گذاشت:

هر جمله، بنا به قرارداد، ... دارای معنی است. با این همه هر جمله گزاره نیست؛ و تنها آنهایی گزاره‌اند که در خود صدق یا کذب دارند. به این ترتیب دعا جمله است، در حالی که راست یا دروغ نیست.

برای اینکه به عرف معاصر نزدیک‌تر باشیم، تمایز مورد بحث را به این طریق در نظر نمی‌گیریم، و به جای آن از جمله‌ها یا گزاره‌های خبری، پرسشی، امری و تعجبی سخن می‌گوییم.

۱۵ - فلسفه ترفندان ریاضی^۱:

کور گفت: «اینک گروهی می‌رسند
من همی بینم که چه قوم‌اند و چند»
گفت کر: «آری شنیدم بانگشان
که چه می‌گویند پیدا و نهان»
آن برهنه گفت: «ترسان زان منم
که بیژند از درازی دامنم»^۲
«مولوی»

سه پرسش اصلی ریاضیات، نیز هر علم دیگر، این است که سرچشمه این علم چیست؟
خود این علم چیست؟ و به کجا می‌رود؟^۳

۱ - مقاله فلسفه ترفندان ریاضی، غلامرضا یاسی‌پور، خردنامه صدرا، شماره ۱، بنیاد حکمت اسلامی صدرا

۲ - دفتر سوز مثنوی معنوی

۳ - زکجا آمده‌ام آمدنم بهر چه بود به کجا می‌روم آخر نمایی وطنم؟

«منسوب به مولوی»

از هیچ کسی نیز در گوشم نشنود کاین آمدن و رفتنم از بهر چه بود

«خیام»

اگر به قدیمی‌ترین منابعی که در دست‌اند استناد کنیم^۱، سرچشمه ریاضیات را در رفع مشکلات حاصل از عمل^۲ می‌یابیم. اما چگونگی دلالت این مشکل به قضایای ریاضی همچنان نامعلوم است، زیرا این سؤال پیش می‌آید که، مثلاً، از کجا دانستیم که باید بدان گونه عمل کرد.^۳ اما اینکه خود ریاضیات چیست؟ سؤالی بس مشکل‌تر از پرسش اول است.^۴ چه اگر چنین باشد که «قضایای اولی یا پیشینی^۵ منطق و ریاضیات خالی از مضمون واقعی باشند، و صدق آنها بر حسب وضع و قرارداد لغوی باشد»^۶، و اگر این گفته کانت درست باشد که

عقل انسان چنان ساخته شده که اگر از حدود تجربه ممکن تجاوز کند و بخواهد به اشیا و امور در نفس خود یا، به اصطلاح، به نفس الامر بپردازد، دچار تناقضات و قضایای جدلی الطرفین می‌شود.^۷

و باز اگر این قول جان استیوارت میل درست باشد که

ضروری یا یقینی بودن حقایق منطق و ریاضیات مردود است، زیرا در این مورد تنها می‌توانیم فرض کنیم که «حقایق» ریاضی یا منطق به طور کلی صادق‌اند، اما تضمینی از این بابت در دست نداریم، زیرا این «حقایق» فرضیات تجربی محض‌اند که صدق آنها در گذشته معلوم شده است، ولی مانند سایر فرضیات تجربی، نظراً قابل خطا هستند.^۸

نیز اگر بنا به قول هائری پوانکاره چنین باشد که

اصول موضوعه هندسه، چیزهایی جز تعریفات نیستند، و قضایای هندسه فقط

۱ - پاپروس ریند و پاپروس مسکو

۲ - نظیر تقسیم‌بندی مجدد زمین‌های زیر آب نیل رفته پس از فرو نشستن طغیان رود و تقسیم ارثیه.

۳ - فی‌المثل از کجا مشخص شده که به درستی تقسیم کردن زمین یا ارث عمل درستی است.

۴ - زیرا مستقیماً با سؤال اول که بی‌جواب مانده در ارتباط است.

۵ - A Priori

۶ - زبان، حقیقت و منطق

۸ - مرجع پیشین

۷ - مرجع پیشین

نتایج منطقی این تعریفات اند.^۱

و

هیچ هندسه‌ای به خودی خود درباره فضا یا مکان مادی نباشد و در واقع به خودی خود درباره هیچ چیزی نباشد.^۲

نیز اگر قول برتران راسل راست باشد که

ریاضیات موضوعی است که در آن هرگز نمی‌دانیم از چه سخن می‌گوییم و به درستی آنچه هم می‌گوییم اطمینان نداریم.^۳

باز اگر طرح این گونه پرسش‌ها درست باشد که

اگر هندسه‌هایی که برخی از قوانینشان از جنبه منطقی با قوانین هندسه اقلیدسی ناسازگارند از جنبه ریاضی درست و پذیرفتنی باشند؛ پس مفهوم «حقیقت ریاضی» چه می‌شود؟^۴

در این صورت چگونه می‌توان از چیستی ریاضیات سخن گفت؟ و از آن مهم‌تر چه کار باید کرد؟ آیا باید آستانه درگاه ریاضیات را ببوسیم و از راه آمده بازگردیم و عطایش را به لقایش ببخشیم؟ یا قول کورانت را بپذیریم که بر این است که

ریاضیات، به عنوان یکی از تراوشات ضمیر آدمی، منعکس‌کننده اراده فعال، سیر معنوی عقل و استدلال و علاقه‌مندی به کمال زیبایی می‌باشد. عواملی که مبنای آن را

۱ - H. Poincaré, *La Science et L' Hypothèse* - ۲ - زبان، حقیقت و منطق

۴ - مرجع پیشین

۳ - فلسفه ریاضی

تشکیل می‌دهند عبارت‌اند از منطق و اشراق^۱، تحلیل و سازندگی، وحدت و کلیت. و بدون تردید تمام توسعه ریاضیات دارای ریشه‌هایی روانی در خواسته‌ها و فعالیت‌های عملی بشر می‌باشد. برخی از بزرگ‌ترین اکتشافات فیزیکی عصر حاضر به عنوان اجر و مزد تقدیم کسانی شد که با شجاعت کامل از اصل «طرد ماوراء الطبیعه» پیروی کردند. خوشبختانه صاحبان قدرت خلاق در مواردی که معتقدات فلسفی و سنت‌ها مانعی در راه ابداعات سازنده ایجاد می‌کنند به خوبی می‌توانند این معتقدات را فراموش نمایند. برای دانشمندان نیز، همچون برای عامه مردم، فقط تجربه فعال در ریاضیات است، و نه فلسفه، که می‌تواند به این سؤال جواب دهد که ریاضیات چیست؟^۲

یا قول اریک تمپل بل را که می‌گوید:

توجه ما بخصوص به ریاضیات جدید است و مقصود از آن عبارت است از افکار ساده و بزرگی که راهنمای ریاضیدانان قرون اخیر بوده است و در عصر حاضر نیز چه در پیشرفت ریاضیات چه در تکامل دانش خلاق و چه در زندگی عادی اهمیت قاطع دارند. نباید تصور کرد که یگانه عمل ریاضیات که آن را «خادم علوم» نامیده‌اند، خدمت به علوم دیگر و کوشش در پیشرفت آنها می‌باشد، بر این دانش نام دیگر «ملکه علوم» نیز اطلاق می‌شود.^۳

و به این ترتیب، گوش به قیل و قال‌هایی از این قبیل که «ریاضیات محض چگونه ممکن است؟»^۴ ندهیم و از طرح مسائلی چنین که «آیا ریاضیات محض و مخصوصاً هندسه محض، فقط به شرطی می‌تواند واقعیت عینی داشته باشد که صرفاً بر محسوسات اطلاق شده باشد؟»^۵ بگذریم، و در جهانی که به قولی بر احتمال بنا شده است^۶ از تلاقی با این مسائل سر باز زنیم، و به همان سادگی که نفس

۲ - ریاضیات چیست؟

۱ - شهرد

۳ - ریاضیدانان نامی

۴ - اولین مسئله از چهار مسئله استعلاهی اصلی کتاب تمهیدات کانت

۵ - تمهیدات

۶ - نام کتاب زیر که بر این است که جهان چنین است:

The World Is Built on Probability

می‌کشیم^۱ به ریاضیات نظر کنیم، و عارفانه چونان احمد غزالی بگوییم:

آنجا که حقیقت کار است معشوق را از عشق نه سود است نه زیان^۲.

و حافظ‌وار بسراییم که

ز عشق ناتمام ما جمال یار مستغنی است^۳

و نتیجه چنین گیریم که

تا وقتی که واقعاً و حقیقتاً به نقطه توفقی که در آن هبوط^۴ کاملاً صورت گرفته،
نرسیم، عموماً به درک چنین اموری قادر نخواهیم بود.^۵

و به قول اگوست کنت بسنده کنیم که «تاریخ علم همان علم است»^۶، جادوگری را مادر علم^۷ بدانیم
و به چنین ریسمان‌ها تمسک کنیم. قول یان استیوارت را قال مقالمان کنیم که

ریاضیات زیباست، و از لحاظ فکری الهام‌بخش - حتی سودمند است. در ریاضیات
محض، هدف، کاربردهای عملی نیست بلکه ارضای فکری است و از این لحاظ ریاضیات
محض به هنرهای زیبا می‌ماند.^۸

و به مرجع، حقیقت و واقعیت^۹ کاری نداشته باشیم و چونان عالم ریاضی به قضایای وابسته به

۱ - غلط ننویسیم

۲ - سوانح، فصل ۴۰

۳ - مصراع دوم آن: به آب و رنگ و خال و خط چه حاجت روی زیبا را

«حافظ»

۴ - Falling

۵ - سیطره کمیت

۶ - تاریخ علوم

۷ - همان مرجع

۸ - مفاهیم ریاضیات جدید

۹ - نام کتابی با عنوان زیر و با مقالاتی درباره فلسفه زبان:

اعداد و اتّصال و انفصال بنگریم^۱ و به «خorde کاری‌های علم هندسه^۲» دل مشغول داریم و پرسش‌هایی از این قبیل که «آغاز علم از چه وقت و در چه نقطه از جهان بوده است؟^۳» طرح نکنیم و بپذیریم که «در هر اجتماع مردم هوشمند و مردم احمق، هر دو، وجود دارند، و اکثریت را مردم میانه تشکیل می‌دهند^۴» و خود از مردم میانه باشیم و کرانه گیریم و کناره کنیم و در ده روزه عمر قصه اسکندر و دارا^۵ نگوییم و نشنویم، و به هر حال، به ریاضیات لازم و لوازماتش بپردازیم. اما ریاضیات به کجا می‌رود؟ به این سؤال بر سری پاسخی نه چندان سرسری می‌دهیم، ولی ابتدا تمثیل زیر را می‌شنویم:

گفت: «آنگاه همسفر من توانی شد که جواب مطابق بگویی، هیچ زیادت نی.»
چون باز آمد، گفت: «زن داری؟»
گفت: «زن دارم و دو بچه.»^۶

ریاضیات به جایی می‌رود که جواب مطابق بگوید و هیچ زیادت نی.

۱۶ - اسقاط اضافه با اشاره مختصری به منطق ریاضی یا علامتی^۷:

نشانی داده‌اند اهل خرابیات

که التوحید اسقاط الاضافات^۸

«گلشن راز»

۱ - تاریخ علم

۲ - تعبیر از مولوی و از بیت زیر است:

خorde کاری‌های علم هندسه با نجوم و علم طب و فلسفه

۴ - مرجع پیشین

۳ - تاریخ علم

۵ - تعبیر از پژمان بختیاری و از بیت زیر است:

تا چند کنی قصه اسکندر و دارا ده روزه عمر این همه افسانه ندارد

۶ - مقالات شمس

۷ - مقاله اسقاط اضافه، مجله آشنایی با ریاضیات، جلد ۳۶، شهریور ۱۳۷۱

۸ - توحید، انداختن و حذف زیادتی‌هاست.

غایت جهد بشر رسیدن از کثرت به وحدت، و اگر این مقصد عالی^۱ دست ندهد، رسیدن به حداقل است. مثلاً در هندسه، کوشش مهندس^۲ بر این است که حداقل با چند جزء از اجزاء اصلی یا فرعی مثلث، می توان آن را رسم کرد و در این کوشش به آنجا می رسد که، مثلاً با معلوم بودن سه ضلع یا دو ضلع و زاویه بین یا دو زاویه و ضلع بین، مثلث به کفایت رسم می شود و برای رسم آن به اجزای دیگر نیاز نیست، و به عبارت دیگر، معلوم بودن، مثلاً، سه ضلع از یک مثلث برای رسم آن کافی است. مرد متفکر، انسان کافی را آن می داند که به کفایت عمل کند، یعنی سر رشته را نگهدارد^۳، نه چنان سست بگیرد که زمام امور از دستش به در رود و نه چنان سخت، که آن را بگسلد، به عبارت دیگر شرایط لازم و کافی را در هر امر به جا آورد و در هر کار پا از گلیم خویش به در نکند. این روش، عموماً در علوم و خصوصاً در ریاضیات و بالاخص در منطق به کار می رود. کار منطقی نیز، چونان ریاضیدان، روی به رسیدن به وحدت دارد و مثلاً در این اندیشه است که چگونه می تواند با کمترین تعداد رابطها، تمام ترکیبات گزاره ها را بیان کند.

می دانیم که رابط^۴، همان است که توسط آن گزاره های ساده^۵ را به هم گره می زنند و از آنها گزاره های مرکب^۶ می سازند و همین بلا را سر گزاره های مرکب هم می آورند، یعنی از آنها هم، باز گزاره های مرکب تر درست می کنند.

رابط های معروف^۷ عبارت اند از: $\sim$ ، $\wedge$ ، $\vee$ ، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$ ، که داستان هر یک را می توان در

۱ - تعبیر از حافظ است:

ما بدان مقصد عالی نتوانیم رسید مگر هم پیش نهد لطف شما گامی چند

۲ - هندسه دان

۳ - تعبیر از حافظ است:

گرت هواسه که ممشوقه نگسلد پیوند نگاه دار سر رشته تا نگه دارد

۴ - Connective، که با اندکی تسامح، همان حرف ربط دستور زبان است.

۵ - Simple Statements، گزاره هایی که از یک موضوع و یک محمول تشکیل شده اند.

۶ - Compound Statements، گزاره هایی که توسط رابطها از گزاره های ساده یا مرکب ساخته می شوند.

۷ - معروف از این لحاظ که جمیع استدلال های در زبان طبیعی را می توان با آنها بیان کرد و رابطهای دیگر به ترادف با آنها قابل بیان اند.

۸ - این رابطها به ترتیب: نقیض "Negation" یک گزاره، ترکیب عطفی "Conjunction"، ترکیب فصلی "Disjunction"، ترکیب شرطی "Conditional"، و ترکیب دوشروطی "Biconditional" دو گزاره را مشخص می کنند. ترکیبات مذکور تابع ارزش "Truth Function" در نظر گرفته می شوند و قاعده هاشان توسط جداولی به نام جداول ارزش "Truth Tables"، معین می شود.

کتب مربوطه خواند. منطقی هنگامی که به این روابط می‌رسد، مانند هر متفکر دیگر، این سؤال را مطرح می‌کند که آیا برای بیان جمیع پنج ترکیب حاصل از پنج رابط فوق، نیاز به هر پنج آنهاست یا با کمتر از آنها هم می‌توان این مهم را انجام داد و اگر می‌توان، این حداقل چند است و آیا می‌شود تنها با یک رابط، جمیع این روابط را بیان کرد؟

برای پاسخ به پرسش‌های فوق به چند تعریف و قضیه نیاز داریم.

تعریف ۱ - تعریف رابط $\leftrightarrow$:

اگر p و q متغیرهایی گزاره‌ای^۱ باشند، در این صورت ترکیب دوشروطی p و q عبارت است از:

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

با همین تعریف، یکی از رابط‌های فوق، یعنی $\leftrightarrow$ ، را از گردونه خارج می‌کنیم و به این ترتیب چهار رابط باقی می‌گذاریم.

قضیه ۱: قضیه دومورگان^۲: اگر p و q دو متغیر گزاره‌ای باشند در این صورت:

$$(p \wedge q) = \sim(\sim p \vee \sim q)$$

$$(p \vee q) = \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

اثبات: با رسم جدول ارزش به سادگی انجام می‌گیرد.

با قضیه فوق یکی دیگر از روابط (۸ یا ۷) را کنار می‌گذاریم.

قضیه ۲: اگر p و q دو متغیر گزاره‌ای باشند در این صورت:

۱ - Statement Variables، که در واقع جای گزاره‌ها را نگه می‌دارند و جا نگه‌دارند.

۲ - این صورت بسیار ساده و ابتدایی قضیه دومورگان است.

$$(p \rightarrow q) = \sim p \vee q$$

اثبات: با استفاده از جدول ارزش به سادگی انجام می‌گیرد.

قضیه فرعی ۱: با توجه به قضایای ۱ و ۲ داریم:

$$(p \rightarrow q) = \sim(p \wedge \sim q)$$

اثبات:

$$(\bar{p} \rightarrow q) = \sim p \vee q \quad \text{قضیه ۲:}$$

$$\sim p \vee q = \sim(\sim \sim p \wedge \sim q) \quad \text{قضیه ۱:}$$

$$\sim \sim p = p \quad \text{تقیض تقیض:}$$

$$(p \rightarrow q) = \sim(p \wedge \sim q) \quad \text{در نتیجه:}$$

با توجه به مطالب فوق یکی دیگر از روابط از بین می‌رود.

تعریف ۲: مجموعه بسند روابط:

مجموعه‌ای است که هر ترکیب را بتوان تنها با رابط‌های آن نشان داد.

قضیه فرعی ۲: $\{\sim, \rightarrow\}$ ، $\{\sim, \vee\}$ ، $\{\sim, \wedge\}$ و $\{\sim, \rightarrow\}$ مجموعه بسند رابط‌هايند.

اثبات: نتیجه فوق با توجه به قضایای قبل به سادگی به دست می‌آید.

مثال ۱: $((\sim p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$ را تنها با $\sim$ ، $\vee$ ، $\wedge$ و $\rightarrow$ بیان کنید.

حل:

$$(\sim((\sim p_1) \vee p_2) \vee p_3)$$

۱

$$\sim(\sim(p_1 \wedge (\sim p_2)) \wedge (\sim p_2)) \quad ۲$$

$$((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2) \quad ۳$$

ملاحظه کردیم که هر سه مجموعه بسند رابط‌هایی که به دست آوردیم شامل $\sim$ بودند. اکنون پرسش زیر مطرح می‌شود:

پوشش ۱: آیا ترکیبی که همواره ارزش «ن»^۱ می‌گیرد^۲ می‌تواند با مجموعه بسندی که در آن از $\sim$ خبری نیست بیان شود؟

پاسخ: خیر. زیرا چون به تمام متغیرهای گزاره‌ای واقع در ترکیب مزبور «د» بدهیم حاصل «د» می‌شود و بنابراین ارزش «ن» نمی‌دهد.

قضیه فرعی ۳: مجموعه‌ای که از میان رابط‌های ۸، ۷، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$ تشکیل شده باشد نمی‌تواند مجموعه بسندی بدهد.

اثبات: زیرا بنا به پاسخ پرسش ۱، حالتی که همه متغیرهای گزاره‌ای واقع در ترکیبی که همواره ارزش «ن» می‌گیرد، «د» باشند، نمی‌تواند به آن ترکیب، ارزش «ن» بدهد.

تمرین ۱: ثابت کنید که $\{ \sim, \leftrightarrow \}$ نیز مجموعه‌ای بسند نیست. اکنون به سراغ پاسخ دادن به سؤال اصلی، یعنی اینکه آیا تنها با یک رابط می‌توان تمام ترکیب‌ها را بیان کرد یا خیر؟ می‌رویم، و برای این کار تعریف‌ها و قضیه‌های زیر را می‌آوریم:

تعریف ۳ - رابط نه - یا^۳:

علامت این رابط $\downarrow$ و جدول ارزش آن چنین است:

۱ - «ن» مختصر «نادرست» در مقابل «درست» است و به غلط به جای «راست» "True" و «دروغ» "False" نهشته، و باب شده است.

۲ - مثلاً این ترکیب $p \wedge \sim p$ که همواره ارزش «ن» می‌گیرد و کاذب "Contradiction" نامیده می‌شود.

۳ - Nor که مخفف No or یا «نقیض یا» است.

p	q	$(p \downarrow q)$
د	د	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

قضیه ۳: مجموعه $\{\downarrow\}$ مجموعه بسند رابط‌هاست.

اثبات: با توجه به اینکه $\{\sim, \wedge\}$ و $\{\sim, \vee\}$ مجموعه بسندند، کافی است که ثابت کنیم $\sim$ ، $\wedge$ ، یا $\vee$ برحسب $\downarrow$ قابل بیان‌اند. اما $(\sim p)$ معادل منطقی $(p \downarrow p)$ است، و $(p \wedge q)$ معادل منطقی $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ است. اثبات این دو با استفاده از جداول ارزش به سادگی انجام می‌گیرد و، مثلاً، در مورد اولی به صورت زیر است:

p	$\sim p$	$p \downarrow p$
د	ن	ن
ن	د	د



همان‌طور که از جدول ملاحظه می‌شود ستون‌های مربوط به $\sim p$ و $p \downarrow p$ یکسان‌اند و این بدان معنی است که $\sim p$ و $p \downarrow p$ منطقاً معادل‌اند. در مورد تعادل منطقی دوم نیز وضع به همین منوال است زیرا:

p	q	$p \wedge q$	$p \downarrow p$	$q \downarrow q$	$((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	ن



با توجه به اینکه $\vee$ را می‌توان برحسب $\wedge$ بیان کرد نتیجه می‌گیریم که هر دو مجموعه بسند $\{\sim, \vee\}$ و $\{\sim, \wedge\}$ قابل تحویل به مجموعه بسند تک عضوی $\{\downarrow\}$ اند.

تعریف ۴ - رابط نه - و:

علامت این رابط | و جدول ارزش آن چنین است:

p	q	$p q$
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	د

قضیه ۴: مجموعه $\{\downarrow\}$ مجموعه بسند رابط‌هاست.

اثبات: مانند مورد اثبات قضیه ۳، کافی است ثابت کنیم که $\sim$ ، $\wedge$ ، یا $\vee$ برحسب | قابل بیان‌اند. اما $(\sim p)$ معادل منطقی $(p | p)$ ، و $(p \vee q)$ معادل منطقی $(q | (q | p))$ است، و اثبات این هر دو با رسم جدول ارزش به سادگی میسر می‌شود، و $\wedge$ هم که قابل بیان با $\vee$ است پس اثبات قضیه تمام است.

به این ترتیب، همان‌طور که ملاحظه شد تنها با یک رابط می‌توان جمیع ترکیبات گزاره‌ها را بیان کرد و این مطلب، علاوه بر آنکه ما را به وحدت رهنمون است، موارد استعمال مهمی در ماشین‌های کامپیوتری دارد. اما در عمل، حرکت با یک رابط، چنان‌که در مثال زیر خواهیم دید، کار را به درازا می‌کشانند، و بنابراین برای مقاصد متعارف همان بهتر که از همان پنج رابط معروف و به همان عادت مألوف^۲ استفاده کنیم.

مثال ۲: با استفاده از مجموعه بسند $\{\downarrow\}$ ، ترکیبی منطقاً معادل با $(p \rightarrow q)$ بیاورید.

۱ - Nand که مخفف No and یا «نقبض و» است. ۲ - روش آشنا، تعبیر از سعدی است.

حل: $p \rightarrow q$ منطقاً معادل است با

$$\sim(p \wedge (\sim q))$$

و معادل

$$\sim(p \wedge (q \downarrow q))$$

و معادل

$$\sim((p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)])$$

$$\{(p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]\} \downarrow \{(p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]\}$$

* * *

فهرست منابع

منابع فارسی و عربی

- ۱ - آشنایی با منطق ریاضی، غلامرضا برادران خسرو شاهی، محمد رجبی طرخورانی
- ۲ - احصاء العلوم، ابونصر فارابی، خدیم جم
- ۳ - اساس الاقتباس، خواجه نصیر طوسی، تصحیح مدرّس رضوی
- ۴ - اشارات و تنبیہات، ابوعلی سینا
- ۵ - التفہیم، ابوریحان بیرونی، تصحیح جلال الدین همایی
- ۶ - اللمعات المشرقیة، فی الفنون المنطقیة، صدرالدین شیرازی، دکتر مشکوة الدینی
- ۷ - تاریخ علوم، پی یر روسو، حسن صفّاری
- ۸ - تاریخ علم، جورج سارتون، احمد آرام
- ۹ - تاریخ منطق، آ. ماکوولسکی، فریدون شایان
- ۱۰ - تاریخ ریاضیات، دیوید اسمیت، غلامحسین صدری افشار
- ۱۱ - تمهیدات، ایمانوئل کانت، غلامعلی حدّاد عادل
- ۱۲ - تہذیب المنطق، مولانا سعدالدین تفتازانی
- ۱۳ - حافظ، قزوینی، غنی
- ۱۴ - حکمة الاشراق، شہاب الدین سہروردی، دکتر ضیاء الدین سجادی
- ۱۵ - خودآموز منطق ریاضی، ترجمہ غلامرضا یاسی پور
- ۱۶ - درة التّاج، قطب الدّین شیرازی
- ۱۷ - دریای گوهر، جلد ۱، حمیدی
- ۱۸ - رباعیات خیّام، فروغی
- ۱۹ - رسالہ منطق دانشنامہ علائی، ابوعلی سینا، دکتر معین و محمد مشکوة
- ۲۰ - ریاضیات چیست؟ ریچارد کورانت، ہربرت رابینز، حسن صفّاری
- ۲۱ - ریاضیدانان نامی، اریک تمپل بل، حسن صفّاری
- ۲۲ - زبان، حقیقت و منطق، الف. ج. آیر، منوچہر بزرگمہر
- ۲۳ - سوانح، احمد غزالی، نصر اللہ پور جوادی

- ۲۴ - سیطرہ کمیت، رنہ گنون، علی محمد کاردان
 ۲۵ - غلط نویسیم، ابوالحسن نجفی
 ۲۶ - فلسفہ ریاضی، استیفن پارکر، احمد بیرشک
 ۲۷ - فلسفہ ریاضی، نظارت و مقدمہ حسین ضیایی
 ۲۸ - گلشن راز، شیخ محمود شبستری
 ۲۹ - مثنوی معنوی، نیکلسون
 ۳۰ - مفاهیم ریاضیات جدید، یان استیوارت، جمشید پرویزی
 ۳۱ - مقالات شمس تبریزی، احمد خوشنویس
 ۳۲ - منطق ریاضی چیست؟ شاپور اعتماد، غلامرضا برادران خسرو شاہی
 ۳۳ - منطق و اثبات، غلامرضا یاسی پور
 ۳۴ - منطق و عرفان، نجف دویابندری

منابع خارجی

- 1 - A Profile of Mathematical Logic, Howard DeLong
- 2 - An Investigation of the Laws of Thought, George Boole
- 3 - Dictionary of Philosophy and Psychology, James Mark Baldwin
- 4 - Introduction to Mathematical Logic, H. Hermes
- 5 - Logic, John Nolt, Dennis Rohatyn
- 6 - Logic, Quine
- 7 - Logic II: Proof, Prepared by the Mathematics Foundation Course Team
- 8 - Mathematical Logic, Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin
- 9 - Philosophical Logic, Edited by P. F. Strawson
- 10 - Reference, Truth and Reality, Essays on the Philosophy of Language
 Edited by Mark Platts
- 11 - Symbolic Logic, Copi
- 12 - The World Is Built on Probability, Lev Tarasov, Mir Publishers Moscow