

آمار پارامتریک مقدماتی

تالیف:

دکتر کامبیز کامکاری

کامکاری، کامبیز

آمار پارامتریک مقدماتی / تألیف کامبیز کامکاری. - تهران: مدرسان
تهران، ۱۳۸۳.

۱۴۲ ص.: جدول.

ISBN 964-7655-01-0

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

۱. علوم اجتماعی - برنامه های کامپیوتری. ۲. اس. پی. اس. اس.
(برنامه کامپیوتری). ۳. آمار. ۴. روانشناسی -- برنامه های کامپیوتری.
الف. عنوان.

۳۰۱/۰۲۸۵

HM ۵۳۱ / ۷۲۷

م ۸۳-۲۹۷۰۵

کتابخانه ملی ایران

آمار پارامتریک مقدماتی

مؤلف: کامبیز کامکاری

ناشر: انتشارات مدرسان تهران

حروفچینی و صفحه آرایی: انتشارات نوین پژوهش

چاپ: نوین پژوهش

لیتوگرافی: طاووس رایانه

تیراژ: ۲۰۰۰ جلد

قیمت: ۲۰۰۰ تومان

حق چاپ محفوظ و مخصوص مؤلف است.

فهرست مطالب

فهرست	صفحه
پیشگفتار	۱
مقدمه	۲
خلاصه	۱۴
خودآزمایی	۱۵
آزمون ۱ تک‌گروهی	۲۵
خلاصه	۴۰
خودآزمایی	۴۱
آزمون ۲ دو گروه مستقل	۵۱
خلاصه	۷۰
خودآزمایی	۷۱
آزمون ۳ دو گروه همبسته	۸۳
خلاصه	۱۰۲
خودآزمایی	۱۰۳
تحلیل وایانس یک‌طرفه	۱۱۵
خلاصه	۱۳۴
خودآزمایی	۱۳۵

پیشگفتار

حال که نزدیک به دو دهه، تجربه تدریس در علم آمار و پژوهش در حیطه علوم رفتاری را پشت سر گذرانده‌ام، احساس می‌کنم که قادر هستم وظیفه‌ام را به عنوان یک ایرانی مؤمن و متعهد به پرچم سه رنگ ایران، ایفا نمایم و آمادگی کامل را برای ادای دین خود نسبت به علم دارا می‌باشم. در تمامی این سال‌های پرمشقت، آرزو داشته‌ام تا تحولی عظیم در علم روان‌شناسی به وجود آورم و این چشم‌انداز را در آموزش دانشجویان برای کنکور کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا نمایانگر سازم. حداقل ۲۰۰ دانشجو به عنوان پذیرفته‌شدگان کنکور کارشناسی ارشد و ۱۰ دانشجو تحت عنوان قبول‌شدگان کنکور دکترا، نشان‌دهنده تلاش خستگی‌ناپذیرم بوده است.

افسوس که در این مسیر، کوله‌بار مشکلات را به تنهایی حمل کرده‌ام. نه استادی گره‌گشایم بوده و نه دانشگاهی مرا حمایت کرده است. بارها صورت گرفته که مورد بی‌مهری اساتید بزرگ آسمان روان‌شناسی واقع شده‌ام، زیرا که آنها تمایلی نداشتند تا دانشجویان گامی فراتر از آنها گذاشته و مسیر پرفراز علم را طی کنند. هرگز به خاطر ندارم که در کلاس درس به دنبال گمشده‌ام نرفته باشم و با انرژی و دقت وافر، پیشرو مباحث نوین روان‌شناسی نباشم. ولی همواره به یاد دارم که چراغ‌های خلاقیت و نوآوری در کلاس‌های درس برایم خاموش شده‌اند.

امید دارم که این دست‌نوشته‌ها، معرف افکارم باشد و شاید بتواند زمینه‌ای را برای جمع‌بندی اندیشه پژوهشگران فراهم سازد. ولی یقین دارم که عشق به ایران باعث شده است که در رعایت مطالب، امانت را حفظ کنم و همانند دیگر استادان گرانقدرم کپی‌برداری از کار دیگران را سرلوحه اقداماتم قرار ندهم.

به راستی ایمان دارم که اگر تلاش‌های چشمگیر سرکار

خانم شهره سُکرزاده در بازبینی دست‌نوشته‌ها و ارائه رهنمودهای سازنده ایشان نبود، هرگز این کتاب به پایان نمی‌رسید. یقین دارم که اگر بازبینی نهایی سرکار خانم مهناز عسگریان صورت نمی‌گرفت، برخی از اشتباهات مرتفع نمی‌شد. در اینجا لازم می‌دانم که از خانم‌ها شهره سُکرزاده و مهناز عسگریان تشکر و قدردانی نمایم. از خداوند منان خواستارم تا در باقیمانده عمرم بتوانم زحمات این عزیزان را جبران سازم.

چارچوب اصلی این کتاب، براساس نرم‌افزار آماری SPSS ورژن ۱۳ طراحی شده که می‌تواند در حیطه آمار پارامتریک مقدماتی در مقاطع مختلف مورد استفاده قرار گیرد، تفکر آماری دانش‌پژوهان را عمق بخشد و بستر مناسبی را برای استدلال‌های آماری فراهم نماید. این کتاب برای مقایسه دو میانگین با تأکید بر مدل آماری استیودنت در سه حیطه تک‌نمونه‌ای، گروه‌های مستقل و گروه‌های همبسته کاربرد دارد و با ارائه تحلیل واریانس یک‌طرفه، دانش ضروری برای طرح‌های عاملی را مهیا می‌سازد.

محتوای کتاب حاضر، بر مفروضه‌های علوم رفتاری استوار است که به‌عنوان یک کتاب کاربردی برای پژوهشگران در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب، با توجه به فاصله‌ای بودن متغیرهای علوم رفتاری، همواره به مقایسه میانگین تأکید شده و از آن به‌عنوان معرف‌ترین شاخص‌گرایش مرکزی استفاده به‌عمل می‌آید. در این مواقع که به مقایسه دو میانگین و یا بیشتر از دو میانگین پرداخته می‌گردد، کاربرد آزمون‌های ۱) برای دو میانگین و کاربرد آزمون F برای بیش از دو میانگین واضح‌تر می‌شود. بدین ترتیب که در مقایسه تفاوت بین دو میانگین، آزمون ۱) تک‌نمونه‌ای، آزمون ۱) دو گروه مستقل و آزمون ۱) دو گروه همبسته کاربرد دارد. در حالیکه برای مقایسه بیش از دو میانگین، تحلیل واریانس یک‌طرفه مطرح می‌شود.

از این رو، در کتاب حاضر ساده‌ترین مدل آماری توزیع F در راستای مقایسه بیش از دو میانگین با عنوان تحلیل واریانس یک طرفه مطرح گردیده و مدل‌های آماری پیشرفته از قبیل: طرح‌های عاملی، طرح‌های بلوکی، مربع لاتین و..... در نسخه‌های بعدی عنوان خواهد شد. زیرا که این کتاب به عنوان مقدمه‌ای در حیطه آمار پارامتریک شناخته می‌شود و در نسخ بعدی می‌توان به مدل‌های آماری پیشرفته در حیطه‌های آمار پارامتریک و ناپارامتریک توجه نمود.

کتابی که پیش روی شماست، به فرآیند تبیین ساده پرداخته و مواردی را عنوان می‌سازد که تنها یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته در پژوهش وجود دارند. همچنین، عنوان می‌شود که متغیر وابسته دارای حداقل مقیاس فاصله‌ای است و می‌توان از میانگین به عنوان معرف گرایش مرکزی استفاده کرد. به علاوه متغیر مستقل نیز دارای مقیاس اسمی بوده که در صورت دوارزشی بودن، توزیع t و چندارزشی بودن، تحلیل واریانس یک طرفه عنوان می‌شود.

مقدمه

آزمون‌های ۱ که برای مقایسه دو میانگین کاربرد دارد، داستانی شیرین و جذاب را به خود اختصاص می‌دهد و مطرح می‌شود که تاریخچه شکل‌گیری این‌گونه آزمون‌ها، از چشم‌انداز زیبایی برخوردار است. با بررسی عمیق و کل‌گرایانه در زمینه شکل‌گیری و کشف آزمون‌های ۱، بستر مناسبی برای فراهم‌سازی تفکر آماری به وجود می‌آید و براحتی می‌توان پژوهشگران را در استفاده و تفسیر مدل‌های آماری هدایت کرد. بنابراین، قبل از بحث در حیطه ماهیت و تنوع آزمون‌های ۱، ضروری است، تاریخچه شکل‌گیری این‌گونه آزمون‌ها در نظر گرفته شود تا از این طریق بتوان ویژگی‌های مدل‌های آماری مرتبط با توزیع ۱ را در ذهن مجسم نمود.

شاید با نگاهی سطحی‌نگر، این عقیده در ذهن متبلور شود که تاریخچه آزمون‌های ۱ و تفاوت این‌گونه مدل‌های آماری با منحنی طبیعی، چه امتیازی را برای پژوهشگران فراهم می‌سازد؟ در پاسخ به این سؤال، باید عنوان نمود که تجسم و تصویرسازی توزیع‌های نظری به عنوان اولین گام در فراگیری مدل‌های آماری محسوب می‌شوند و اگر خواهان این باشیم تا استفاده کورکورانه از مدل‌های آماری صورت نگیرد و شناخت عمیق و همه‌جانبه نسبت به توزیع‌های نظری و پس از آن مدل‌های آماری در فرآیند پژوهش به دست آید، باید داستان شکل‌گیری توزیع ۱ و اقدامات مرتبط با آن را به گونه‌ای جزئی‌نگر عنوان کرد و از این طریق بتوان به تفاوت عمده منحنی ۱ و منحنی طبیعی دست یافت.

گاس^۱ و گاست^۲ که شپاهت بسیار نزدیکی به هم دارند، قهرمانان این داستان هستند. گاس و گاست، هر دو از بنیان و پیشروان علم آمار می‌باشند

که پیشرفت‌های نوین علم، مرهون تلاش‌های بی‌وقفه این افراد است. هر چند که در برخی از کتاب‌ها به اقدامات فزاینده این افراد تاکید نشده و یا در دیگر متون، این دو شخص را مترادف در نظر گرفته‌اند، ولی گاس و گاست دو فرد متفاوت می‌باشند که نه تنها از لحاظ زمانی با یکدیگر هم عصر نبوده‌اند، بلکه از لحاظ فعالیت‌های علمی نیز روند متفاوتی را دنبال کرده‌اند. به طوری که یکی از این دو فرد منحنی طبیعی و دیگری منحنی χ^2 را تدوین نمودند. یکی از آنها از مدل‌های ریاضی و فعالیت‌های چشمگیر نیاکان بهره‌مند شده و توانست توزیع نرمال و پس از آن توزیع‌های طبیعی استاندارد شده را به جهانیان عرضه کند و دیگری با آزمایش‌هایی مداوم و تفکر نقادانه، به ماهیت بنیادی توزیع‌های χ^2 دست یافت و خانواده دیگری از توزیع‌های نظری را پایه‌ریزی نمود.

با رویکردهای موشکافانه، می‌توان به این حقیقت پی برد که قبل از توزیع χ^2 باید منحنی طبیعی ارائه شده باشد و پس از شیوع یافته‌های مرتبط با منحنی طبیعی و بررسی نقاط ضعف آن بود که توزیع χ^2 ، به دنیای علم آمار عرضه گردیده است. از این رو، منحنی طبیعی در مقایسه با منحنی χ^2 ، تقدم زمانی داشته و در اولویت قرار دارد و می‌توان پیشرو بودن گاس بر گاست را در نظر گرفت.

منحنی طبیعی را گاس و منحنی χ^2 را گاست مطرح کرده است. بنابراین، گاس بر گاست مقدم بوده و اقدامات گاست، پس از تلاش‌های گاس صورت گرفته است. گاس ریاضی‌دان آلمانی بود که در علم نجوم تخصص داشته و با توجه به منحنی احتمالات دموپور^۱، منحنی طبیعی را کشف نمود. مباحث مرتبط با منحنی طبیعی و شکل‌گیری آن در آمار توصیفی مطرح می‌شود و در

این مبحث، با جزئیات عنوان نمی‌گردد؛ زیرا که تاکید بر منحنی ۱ و توصیف اقدامات گاست است.

ویلیام سلی گاست^۱، در اوایل قرن بیستم، گرایش فراوانی را نسبت به نمونه‌برداری نشان می‌داد و در زندگی روزمره‌اش، به دنبال این بود تا با استفاده از بهترین شیوه نمونه‌گیری بتواند با حداقل هزینه، حداکثر شناخت را به دست آورد. وی به عنوان یک پژوهشگر، در کارخانه آبجوسازی کینزبروینگ^۲ در شهر دوبلین واقع در کشور ایرلند، مشغول به کار شد. پس از اینکه مسئولین، هوش سرشار و تلاش‌های وافر گاست را مشاهده کردند، وی ارتقاء شغلی یافته و به بخش کنترل کیفیت انتقال یافت. در این واحد اداری، پژوهشگران تلاش می‌کردند تا با روش‌های سنتی بتوانند از مواد تولید شده، نمونه‌برداری نموده و کیفیت محصولات را افزایش دهند.

از آنجائیکه پژوهشگران، میل به پذیرش بدون قید و شرط ندارند و به دنبال این می‌باشند تا نوآوری و خلاقیت را با ذهن شکاک تلفیق کنند و راهبردهای ویژه‌ای را برای زندگی بشری اتخاذ کنند، گاست نیز از این قاعده مستثنی نبوده و تلاش‌های شبانه‌روزی خود را ادامه داد. وی دریافت که پراکندگی، با حجم نمونه ارتباط بسیار نزدیکی دارد و حجم نمونه می‌تواند مؤثرترین عامل در پراکندگی باشد. هر چند که این اصل برای تمامی پژوهشگران امری بدیهی است؛ ولی نگاه گاست با دیگران متفاوت بوده و جرقه‌هایی را در ذهن او ایجاد کرد که پس از مدت زمانی به ارائه توزیع ۱ یا توزیع نمونه‌های کوچک، منجر گردید.

گاست در بررسی کنترل کیفیت مواد تولیدی، دریافت که نمونه‌های کوچک با نمونه‌های بزرگ متفاوت است و توزیع منحنی طبیعی، درحالی‌که

برای نمونه‌های بزرگ از اثربخشی بالایی برخوردار است، در نمونه‌های کوچک کاربرد ندارد. ضعف منحنی طبیعی در توصیف ویژگی‌های توزیع نمونه‌های کوچک، باعث گردید تا گاست علم احتمالات را مطالعه نموده و الگوی احتمالی مرتبط با منحنی طبیعی را دریابد. علاقمندی گاست به شناسایی الگوی احتمالی منحنی طبیعی، تا بدان جا پیش رفت که وی را به حضور در کلاس‌های دانشگاهی و محضر اساتید دانشگاه در رشته آمار و ریاضی سوق داد. پس از اینکه گاست مبنای نظری احتمالی منحنی طبیعی را دریافت و توانست پایه‌های آمار ریاضی را برای منحنی طبیعی توصیف و تبیین کند، به دنبال مثال‌هایی در زندگی روزمره رفت تا از این طریق منحنی طبیعی را بهتر بشناسد.

برتیلون^۱ پژوهشگری مشهور بود که تحقیقات منظمی را در زمینه زندانیان بریتانیای کبیر صورت داده و به دنبال این بود تا بتواند سیستم نوینی را در تشخیص، طبقه‌بندی و پیشگیری از جرم و مجرمان ارائه دهد. وی با بررسی عمیق ۳۰۰۰ زندانی دریافت که منحنی طبیعی برای این افراد کاربرد داشته و به خوبی می‌توان از منحنی طبیعی در توصیف ویژگی‌های روانی - اجتماعی زندانیان استفاده نمود. گاست یافته‌های تحقیقاتی برتیلون را شبانه‌روز مطالعه کرد و از این طریق توانست تا دانش خویش را نسبت به منحنی طبیعی توسعه دهد. این توسعه یافتگی تا جایی گسترش یافت که توزیع جدیدی از منحنی‌های طبیعی توسط گاست به وجود آمد؛ زیرا که گاست دریافت، اگر حجم نمونه اندک باشد، دیگر نمی‌توان منحنی‌های طبیعی و ویژگی‌های حاکم بر آن را مشاهده نمود.

در زمینه توانایی و تسلط گاست نسبت به منحنی طبیعی، می‌توان به نقل

قول سندکور^۱ (۱۹۳۷) توجه کرد: «گاست تا بدان جا پیش رفت که با استفاده از علم آمار ریاضی، مبنای نظری منحنی طبیعی را کامل تر از گاس دریافت. وی نه تنها در زمینه مبنای نظری منحنی طبیعی فراتر از گاس پیشروی نمود، بلکه با مشاهدات طبیعی توانست تا با دنیای واقعی پیوند برقرار کند. به راستی آگاهی گاست از منحنی طبیعی، بسیار فراتر از آگاهی گاس بوده است. هر چند که گاس، قبل از گاست منحنی طبیعی را کشف کرد.»

با توجه به اینکه گاس، شناخت عمیقی را در زمینه ماهیت بنیادی، الگوهای نظری و جنبه های کاربردی منحنی طبیعی به وجود آورده بود، ولی باز هم نمی توانست در موافقی که حجم نمونه ها اندک است، از منحنی طبیعی الهام بگیرد. بنابراین، به شناسایی توزیع های تجربی در نمونه های کوچک پرداخته و دریافت که باید مبنای ریاضی را در نمونه های کوچک، حتی کم تر از ۱۰ نفر به دست آورد. گاست در این زمینه با چندین استاد دانشگاه ارتباط برقرار کرده و سرانجام توانست تا در حجم نمونه های کوچک، منحنی خاصی را مطرح سازد. این منحنی که در حجم نمونه های کوچک کاربرد دارد، امروزه به عنوان «شناخته می شود».

هر چند که در منحنی طبیعی، حجم نمونه اثرات قابل توجهی را در پراکندگی برجای نمی گذارد، ولی گاست دریافت که در نمونه های کوچک، حجم نمونه عامل مؤثری در پراکندگی است. هنگامی که حجم نمونه به ۱۲۰ نفر نزدیک شود، منحنی «شکل اصلی خود را پیدا کرده و همانند منحنی طبیعی مطرح می گردد. بنابراین، گاست اعتقاد داشت که توزیع کشف شده با افزایش حجم نمونه، به «منحنی طبیعی تبدیل می شود. گاست توزیع کشف شده را توزیع وابسته به حجم نمونه عنوان کرده و پس از مدتی به این توزیع،

اصطلاح توزیع نمونه‌های کوچک را اطلاق نمود.

از این رو، بی‌علت نیست که امروزه برخی اوقات از توزیع t به‌عنوان توزیع نمونه‌های کوچک نیز یاد می‌شود که نه تنها از حجم نمونه تاثیر می‌گیرد، بلکه این تاثیرپذیری در پراکندگی توزیع هم منعکس می‌شود. هنگامی که حجم نمونه به ۱۲۰ نزدیک می‌شود، این تاثیرپذیری بسیار کاهش یافته و دیگر نمی‌توان اثرات حجم نمونه را در پراکندگی مشاهده کرد. در این مواقع که حجم نمونه به ۱۲۰ می‌رسد، شکل توزیع t به منحنی طبیعی تبدیل می‌گردد.

گاست اعتقاد داشت توزیع t که در آغاز به‌عنوان توزیع تاثیرپذیری از حجم نمونه و پس از آن توزیع نمونه‌های کوچک و سپس توزیع t استیودنت مرسوم شده است، در حجم نمونه کم‌تر از ۱۲۰ نفر به کار برده می‌شود و با حجم نمونه ۱۲۰ نفر نیز می‌تواند اثربخشی مترادف با منحنی طبیعی را داشته باشد. وی اعتقاد داشت که اگر از توزیع t استفاده شود، نه تنها در حجم نمونه‌های بزرگ، کارایی منحنی طبیعی را دارا می‌باشد، بلکه در تحقیقات با حجم نمونه‌های اندک نیز کاربردهای فزاینده‌ای را دامن می‌زند. این کشف گاست، به‌عنوان نقطه تحول علم آمار در اوایل قرن بیستم بود.

از آنجائیکه گاست به شرکت آبجوسازی کینزبروینگ متعهد بود که حق انتشار یافته‌های پژوهشی و کشفیات علمی را ندارد، از نام مستعار استیودنت استفاده کرده و به معرفی توزیع t پرداخت. مدل آماری t استیودنت که امروزه در علم آمار پارامتریک رایج شده، از دستاوردهای این نام مستعار است. گاست ۱۳ مقاله علمی در زمینه معرفی توزیع t و کاربردهای آن به چاپ رساند که تنها در مقاله سیزدهم یا آخرین مقاله علمی خویش نام واقعی خود را فاش نمود.

از آنجائیکه گاست محدودیت‌های اخلاقی در برابر شرکت کینزبروینگ

داشت، از نام مستعار بهره گرفته بود و به علت اینکه مقبولیت علمی نداشت، به راحتی نمی توانست توزیع ۱ را معرفی کند، تا اینکه فیشر^۱ در سال ۱۹۱۴ آن را در کتاب مشهور خود تحت عنوان اصول آماری برای پژوهشگران مطرح ساخت. با چاپ این کتاب که به عنوان مهم ترین کتاب در تاریخ علم آمار مطرح می شود، توزیع ۱ توسط فیشر به جهانیان معرفی گردید و فیشر توانست تا زحمات و کوشش های گاست در راستای توزیع ۱ را منعکس نماید.

امروزه توزیع ۱ جایگاه ویژه خود را پیدا کرده است و تمامی پژوهشگران علم آمار در قرن حاضر اعتقاد دارند که بهره گیری از آن در حجم نمونه های بزرگ همانند توزیع منحنی طبیعی سودمند می باشد و علاوه بر آن می تواند در حجم نمونه های کوچک نیز مؤثر واقع گردد. این واقعیت به گونه ای مصداق عینی می یابد که در نرم افزار SPSS ورژن ۱۳ برای مقایسه دو میانگین، تنها آزمون ۱ مطرح می شود و دیگر آزمون Z که بر توزیع منحنی طبیعی استوار است، جایگاهی را به خود اختصاص نمی دهد.

در این روند شکل گیری توزیع ۱ به عنوان خانواده ای نوین از توزیع طبیعی، علاوه بر گاست که کاشف اصلی بود و فیشر که جنبه حمایت کننده داشت و آن را به جهانیان معرفی نمود، افرادی همانند ولج^۲، سندکور^۳، لیون^۴، هارتلی^۵ و کوکران-کاکس^۶ نیز مؤثر بودند. تمامی این افراد اصلاحاتی را در آزمون های ۱ صورت دادند تا این آزمون توانست کارایی فزاینده ای را در راستای مقایسه دو میانگین نشان دهد.

1- Fisher

2- Eelch

3- Sendecore

4- Leven

5- Hartely

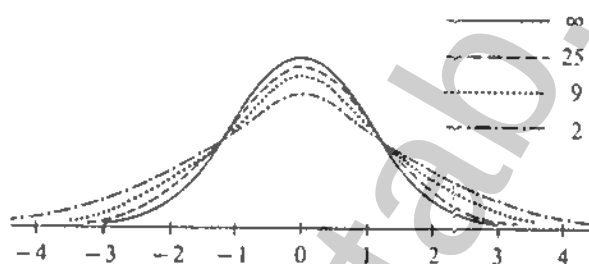
6- Cochran-Cox

لازم به ذکر است که توزیع χ^2 در مقایسه با توزیع Z ، تنها در حجم نمونه‌های اندک و کم‌تر از ۱۲۰ نفر است که تفاوت‌های خاصی را نشان می‌دهد. در این مواقع که حجم نمونه کم‌تر از ۱۲۰ نفر می‌باشد، توزیع χ^2 دارای کشیدگی منفی^۱ است، یعنی به هر میزان که حجم نمونه کم‌تر می‌شود، نه تنها پراکندگی بیشتر می‌گردد، بلکه شکل توزیع نیز به سمت کشیدگی منفی سوق می‌یابد. در این زمینه می‌توان این‌گونه مطرح کرد که حجم نمونه نقش عمده‌ای را در شکل توزیع χ^2 و یا پراکندگی ایفا می‌نماید و از آنجائیکه حجم نمونه یا درجه آزادی ارتباط بسیار نزدیکی دارد، گاست فرمول زیر را برای شناسایی پراکندگی در توزیع χ^2 مطرح ساخته است که در آن انحراف استاندارد به عنوان معرف پراکندگی در نظر گرفته شده است:

$$S = \sqrt{\frac{df}{df - 2}}$$

در نتیجه می‌توان مطرح نمود که با حجم نمونه ۵ نفر، توزیع χ^2 دارای انحراف معیار $(S = 1/28)$ ، ۱۰ نفر $(S = 1/11)$ ، ۲۰ نفر $(S = 1/5)$ ، ۳۰ نفر $(S = 1/3)$ ، ۴۰ نفر $(S = 1/2)$ ، ۵۰ نفر $(S = 1/2)$ ، ۶۰ نفر $(S = 1/1)$ و ۱۲۰ نفر $(S = 1/0.8)$ می‌باشد. بنابراین، اگر حجم نمونه بیش از ۳۰ نفر باشد، پراکندگی توزیع χ^2 را می‌توان معادل ۱ در نظر گرفت و شکل توزیع χ^2 با Z انطباق می‌یابد. درحالی‌که اگر حجم نمونه کم‌تر از ۳۰ نفر باشد، با کاهش حجم نمونه و یا درجه آزادی، توزیع χ^2 دارای انحراف معیار بیشتر و یا پراکندگی بیشتر می‌شود و به صورت کشیدگی منفی تعریف می‌گردد. از این رو، با حجم نمونه ۳۰ نفر، توزیع χ^2 کشیدگی چندانی ندارد و همانند توزیع Z است و می‌توان از آن به عنوان توزیع Z استفاده کرد. توزیع χ^2 تحت

تأثیر حجم نمونه قرار گرفته و فاصله میانگین با نقطه‌های بحرانی به صورت مقدار λ بیان می‌شود و احتمال اختلاف معنی‌دار براساس نمره‌های λ است که بر روی محور افقی قرار دارد. شکل زیر معرفت تأثیرگذاری حجم نمونه در میزان پراکندگی توزیع λ می‌باشد:



در نهایت، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که گاست در اوایل قرن بیستم دریافت که توزیع منحنی طبیعی در حجم نمونه‌های کوچک و کم‌تر از ۱۲۰ نفر کارایی ندارد. وی پس از مطالعات نظری و بررسی‌های مشاهده‌ای به ماهیت دقیق ویژگی‌های منحنی طبیعی دست یافت و زیرمجموعه‌ای از آن را با نام مستعار استیودنت، تحت عنوان توزیع λ معرفی کرد. در توزیع λ که برای نمونه‌های کوچک کاربرد دارد و اثربخشی یکسان با منحنی طبیعی در نمونه‌های بزرگ و یا حداقل ۱۲۰ نفر را نشان می‌دهد، حجم نمونه و انحراف معیار نکات اساسی هستند. در مواقعی که حجم نمونه ۱۲۰ نفر می‌باشد، حجم نمونه در پراکندگی مؤثر نیست و پراکندگی یا انحراف معیار رقم ۱ می‌باشد، ولی اگر حجم نمونه به کم‌تر از ۱۲۰ نفر تقلیل یابد، با کاهش حجم نمونه، میزان پراکندگی بیشتر شده و توزیع λ از شکل منحنی طبیعی به شکل کشیدگی منفی تبدیل می‌گردد. این یافته علمی توسط فیشر منتشر گردیده و در قرن حاضر، توزیع λ به عنوان اصلی‌ترین مدل آماری برای

مقایسه دو میانگین به کار برده می شود. این واقعیت در نرم افزار SPSS ورژن ۱۳ مصداق می یابد، به طوری که برای مقایسه دو میانگین تنها آزمون t مطرح شده است. لازم به ذکر است که در حجم نمونه های کم تر از ۱۲۰ نفر، شکل توزیع t با توجه به حجم نمونه تغییر می یابد و انحراف معیار، اندکی بیش از یک می گردد ولی در تمامی مواردی که حجم نمونه به ۱۲۰ نفر نمی رسد، شکل توزیع t دارای کشیدگی منفی می باشد.

حال که به مفهوم سازی آزمون t و مقایسه آن با آزمون z پرداخته گردید، ضروری است تا انواع آزمون های t با تاکید بر مثال های پژوهشی مطرح شوند و سه مدل آماری رایج در حیطه آزمون های t ، تحت عنوان آزمون t تک گروهی، آزمون t دو گروه مستقل و آزمون t دو گروه همبسته عنوان گردند.

خلاصه

هرچند که در نیمه دوم قرن نوزدهم برای مقایسه دو میانگین، آزمون z کاربرد داشت ولی در اوایل قرن بیست و یک، دیگر این اقدام صورت نگرفته و همواره برای مقایسه دو میانگین از آزمون t استفاده می شود. آزمون t که بر مفروضه های توزیع t استوار است، براحتی می تواند تفاوت بین دو میانگین را منعکس سازد.

در مقایسه بین آزمون z و آزمون t ، می توان مطرح کرد که آزمون t در نمونه های کم تر از ۱۲۰ نفر و گاهی اوقات ۳۰ نفر نیز کاربرد داد و هنگامی که حجم نمونه به ۱۲۰ نفر افزایش می یابد، عملکردی شبیه به آزمون z را به نمایش می گذارد. بنابراین، استفاده از آزمون t مقبول تر است تا آزمون z زیرا که آزمون t ، نه تنها در نمونه های بزرگ همانند z کارایی دارد، بلکه در نمونه های کوچک نیز به کار گرفته می شود. درحالی که، آزمون z در نمونه های کوچک اصلاً کاربرد ندارد.

درنهایت، مطرح می شود که آزمون z به عنوان یکی از آزمون های پارامتریک برای مقایسه تفاوت دو میانگین کاربرد داشته است، ولی امروزه برای مقایسه دو میانگین، از آزمون t استفاده می شود و آزمون t را می توان یکی از رایج ترین آزمون های آماری مطرح ساخت که در آمار پارامتریک از کاربرد فزاینده ای برخوردار می باشد.