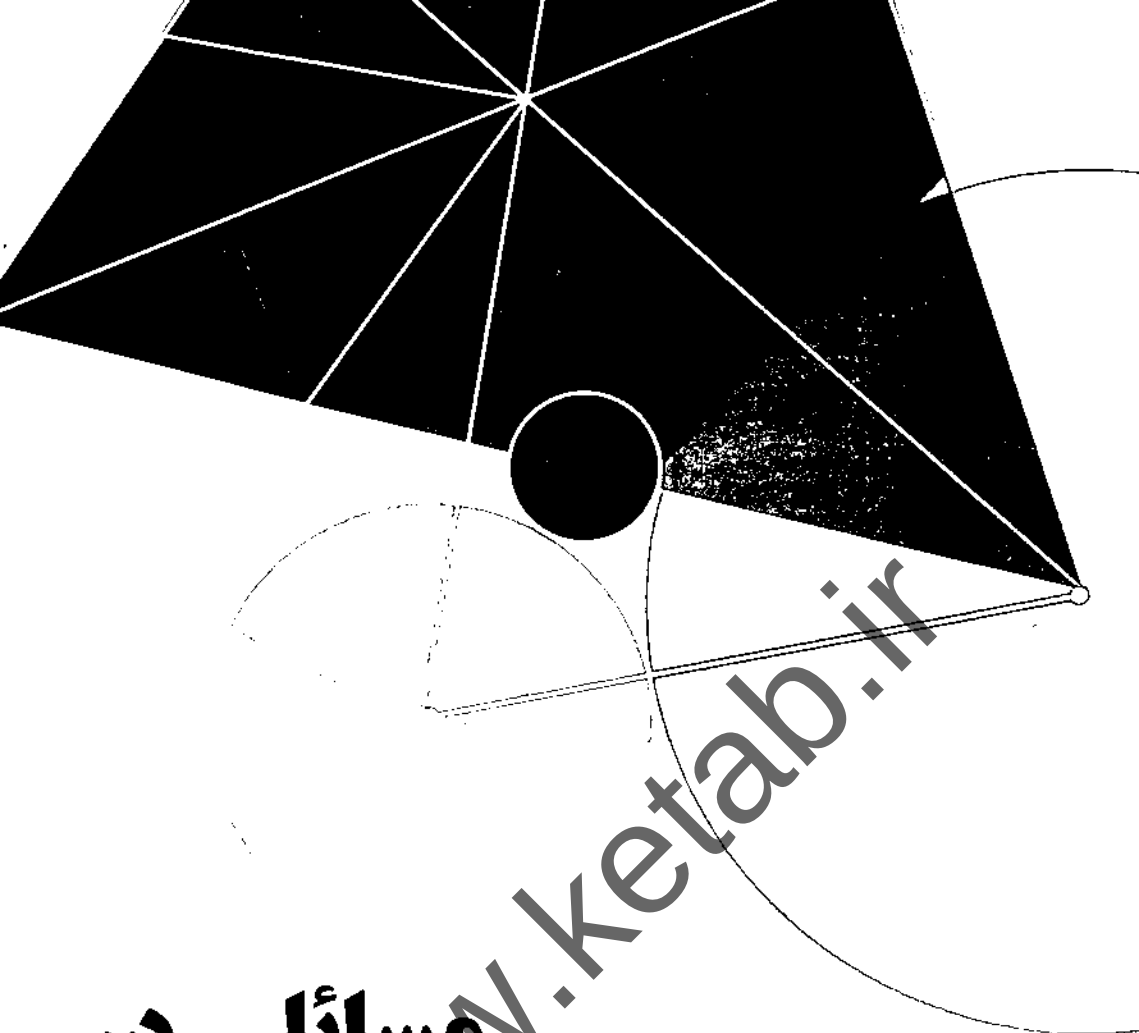




# مسائلی در هندسه مسطحه

جعفر نیوشا

مدیر تولید: فرید مصلحی

مسئول واحد حروفچینی: زهره امینی

حروفچینی و صفحه‌بندی: اعظم توکلی

نمونه‌خوانی: شکوفه صراف

طراحی جلد: علیرضا طاهرنجمی

رسمی تصاویر: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: یسنا

چاپ و صحافی: خاشع

## مسائلی در هندسه‌ی مسطحه

مؤلف: جعفر نیوشا

ناشر: انتشارات فاطمی

چاپ اول، ۱۳۹۰

شمارگان: ۲۰۰۰ نسخه

قیمت: ۳۸۰۰ تومان

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۳۱۸-۶۵۲-۴

ISBN 978-964-318-652-4

■ کلیه‌ی حقوق این اثر برای انتشارات فاطمی محفوظ است. تکثیر، انتشار و ذخیره‌سازی تمام یا بخشی از این اثر به هر شکل (چاپی، الکترونیکی و ...) و با هر هدف بدون مجوز از ناشر غیرقانونی و قابل پیگرد است.

انتشارات فاطمی تهران، میدان دکتر فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی،

شماره‌ی ۱۴، کدپستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱، تلفن: ۸۸۹۴۵۵۴۵ (خط ۲۰)

www.fatemi.ir • info@fatemi.ir



نیوشا، جعفر

مسائلی در هندسه‌ی مسطحه/ مؤلف جعفر نیوشا. — تهران: فاطمی، ۱۳۹۰.

هجده، ۱۱۰ ص.، مصور، نمودار.

ISBN 978-964-318-652-4

فیبا.

۱. هندسه‌ی مسطحه — راهنمای آموزشی (متوسطه).

۵۱۶/۲۲۰۷

۹۴۵۵/۵۹۵

۱۳۹۰

کتابخانه‌ی ملی ایران

۲۳۱۹۲۳۶

## فهرست

|       |                                  |
|-------|----------------------------------|
| پنج   | درباره‌ی ناب                     |
| هفت   | سخن ناشر                         |
| نه    | پیش‌گفتار مؤلف                   |
| یازده | خلاصه‌ی مطالب درسی               |
| ۱     | بخش اول: مسئله‌ها                |
| ۳     | فصل ۱. مسائل مقدماتی             |
| ۱۱    | فصل ۲. مسائل محاسبه‌ای           |
| ۱۸    | فصل ۳. مسائل مرتبط با مکان هندسی |
| ۲۳    | فصل ۴. مسائل ترسیمی              |
| ۲۶    | فصل ۵. مسائل گوناگون             |
| ۲۹    | بخش دوم: حل مسئله‌ها             |
| ۳۱    | فصل ۱. مسائل مقدماتی             |
| ۵۵    | فصل ۲. مسائل محاسبه‌ای           |
| ۸۰    | فصل ۳. مسائل مرتبط با مکان هندسی |
| ۹۰    | فصل ۴. مسائل ترسیمی              |
| ۱۰۲   | فصل ۵. مسائل گوناگون             |

## درباره‌ی ناب

ناب بخشی است در مؤسسه فرهنگی فاطمی که وظیفه‌ی تأمین منابع آموزشی مفید برای نخبگان جوان و استعدادهای برتر کشور را برعهده دارد. رشد خلاقیت، افزایش توان رقابت، و ارتقای علمی دانش‌پژوهان علاقه‌مند به مسابقات علمی، به‌ویژه المیادهای علمی داخلی و بین‌المللی، مورد توجه این بخش است. کتاب‌ها و منابع آموزشی ناب در همین چارچوب با همکاری کارشناسان و صاحب‌نظران باتجربه با شیوه‌ی نوآورانه، و دقت بالای علمی تألیف و منتشر می‌شود.

کتاب‌های ناب علاوه بر آنکه برای دانش‌آموزان مشتاق به حضور در مسابقات و المیادهای علمی مفید است، برای کلیه‌ی دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به فراگیری عمیق مطالب علمی در سطحی فراتر از برنامه‌های عادی مدارس هستند نیز سودمند خواهند بود. دانشجویان و دبیران محترم نیز می‌توانند از «کتاب‌های ناب» به‌عنوان مرجعی قابل اعتماد استفاده کنند.



## سخن ناشر

از رویدادهای نویدبخش سال‌های اخیر، توجه وزارت آموزش و پرورش و استقبال دانش‌آموزان ممتاز دوره‌ی دبیرستان از المپیادهای علمی است. بسیاری از دانش‌آموزان مستعد برای عضویت در تیم‌های ملی المپیاد و حضور در مسابقات علمی در سطح جهان تلاش می‌کنند. بی‌شک موفقیت در این عرصه مستلزم پشتکار، وسعت و عمق معلومات، مهارت در حل مسئله، خلاقیت و نوآوری است. اما از سوی دیگر وجود منابع آموزشی سودمند و قابل اعتماد نیز برای کسب موفقیت‌ها ضروری و حتمی است. مجموعه‌ی منابع آموزشی برای مرحله‌ی اول المپیادهای علمی شامل بیش از ۴۰ عنوان کتاب درسی و کتاب تمرین و مسائل است که بر اساس برنامه‌های درسی المپیادهای داخلی کشور در رشته‌های ریاضی، کامپیوتر، فیزیک، نجوم، شیمی، زیست‌شناسی و ادبیات فارسی طراحی شده است. این مجموعه را جمعی از مؤلفان باتجربه که در تدریس کلاس‌های المپیاد سابقه‌ی ممتاز دارند و استادانی که تجربه‌ی سرپرستی تیم‌های المپیاد جهانی را برعهده داشته‌اند تألیف و ویرایش کرده‌اند. در طراحی و تألیف کتاب‌ها تلاش شده است تا آنجا که ممکن است تمام مرفصل‌های برنامه‌ی درسی المپیاد پوشش داده شود. بنابراین، این مجموعه می‌تواند به‌عنوان یک منبع درسی قابل اعتماد در کلیه‌ی مدارس کشور که دانش‌آموزان را برای رقابت در مسابقات علمی کشور آماده می‌کنند مورد استفاده قرار گیرد. از طرف دیگر روش نگارش کتاب‌ها و وجود مثال‌های حل‌شده‌ی فراوان این امکان را نیز فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان علاقه‌مند در اقصای نقاط کشور بتوانند، حتی بدون نیاز به معلم، با مطالعه‌ی آنها خود را برای رقابت در المپیادهای علمی آماده کنند.

برای پشتیبانی علمی از کتاب‌های این مجموعه و تعامل با دانش‌آموزان و مدرسان، وبگاه مخصوصی پیش‌بینی شده است که به‌زودی راه‌اندازی می‌شود.

## پیش‌گفتار مؤلف

هندسه نظریه‌ای است که به مطالعه‌ی خصوصیات شکل‌ها و حجم‌هایی که آنها را شکل‌ها و حجم‌های هندسی می‌نامیم می‌پردازد. هندسه در واقع همان واژه‌ی «اندازه» در فارسی است و مفهوم اندازه‌گیری زمین را به ذهن متبادر می‌سازد. هندسه، مقدماتی جایگاهی منحصر به فرد در آموزش متوسطه دارد. به دست آوردن مهارت در استدلال و ایجاد فرصت برای تفکر خلاق در زمره‌ی نتایج مفید آن است. هندسه، مقدماتی همچنین ماهیت و قدرت شیوه‌های نظری را به ناب‌ترین وجه تداعی می‌کند، به همین دلیل هندسه در مسابقات ریاضی دوره‌ی متوسطه و خصوصاً در المپیاد بین‌المللی ریاضی نقشی بی‌بدیل ایفا می‌کند.

کتاب حاضر در درجه‌ی نخست برای دانش‌آموزان ممتاز و علاقه‌مند سال‌های آغازین دبیرستان که قصد شرکت در مسابقات ریاضی و خصوصاً المپیاد ریاضی را دارند تألیف شده است. کتاب شامل دو بخش است. ابتدا خلاصه‌ی مطالب درسی شامل قضایا و نکات مهم آورده شده است و سپس بخش مسائل آمده است. مسائل را به پنج گروه مقدماتی، محاسبه‌ای، مربوط به مکان هندسی، ترسیمی و گوناگون دسته‌بندی کرده‌ام. در بخش دوم، راهنمایی و اثبات و حل مسائل آمده است. در میان مسائل نمونه‌هایی را می‌توان یافت که ممکن است با توان دانش‌آموزان متناسب نباشد و حل آن نیازمند معلومات بالاتری باشد. به این دلیل اصراری بر حل تک‌تک مسئله‌ها به وسیله‌ی دانش‌آموزان نیست، اما توصیه می‌کنم که دانش‌آموزان عزیز بکوشند اطلاعات هندسی خود را تقویت کنند و به تدریج دانش و مهارت لازم را برای حل نهایی مسئله‌ها به دست آورند. کوشیده شده است مسائل متنوع باشند و تمامی مباحث هندسه‌ی مسطحه را پوشش دهند تا دانش‌آموزان را در راهی که در پیش گرفته‌اند راهنمایی کنند و سطح معلوماتشان را ارتقا بخشند.

بی‌تردید نظرات و پیشنهادهای خوانندگان ما را به ادامه‌ی کار و گسترش فعالیت‌های علمی تشویق خواهد کرد. در پایان از تمامی دست‌اندرکاران و دوستانی که مرا یاری کردند تا این اثر را به جامعه‌ی فرهنگی کشور تقدیم کنم خصوصاً دکتر یحیی تابش و آقای حسین میرزایی، سپاسگزاری می‌کنم.

جعفر نیوشا

www.ketab.ir

# خلاصه‌ی مطالب درسی

## مقدمه

هندسه‌ی مسطحه با خط راست، نقطه، زاویه، صفحه، چندضلعی‌های مسطح، دایره و دیگر مقاطع مخروطی سروکار دارد و ویژگی آنها را مورد بررسی قرار می‌دهد. قضایای هندسی بیان ویژگی‌هایی است که صحت آنها با تکیه بر اصول موضوع اولیه به اثبات رسیده است. مثلث ساده‌ترین شکل هندسی است و از همین روی، بیشترین قضایای اثبات‌شده درباره‌ی ویژگی‌های آن است. در این بخش قضایا، تعاریف، و روابط مهمی که اطلاع از آنها برای حل مسائل هندسه ضروری است به اختصار بیان می‌شود. فرض بر این است که خوانندگان گرامی از معانی صحیح اصطلاحاتی نظیر دایره، مثلث، ارتفاع، میانه، نیمساز، عمودمنصف، شعاع، قطر، قطاع، قطعه، دایره‌ی محیطی، دایره‌ی محاطی، گرانیگاه، زاویه‌ی قائمه، نسبت همساز، محیط، مساحت، توابع مثلثاتی یک کمان، خطوط موازی، مربع، مستطیل، لوزی، متوازی‌الاضلاع، دوزنقه، بردار انتقال، زاویه‌ی ظلی، زاویه‌ی محاطی و تجانس آگاه‌اند.

## تعاریف و قضایای مهم

◀ در هر مثلث

- الف) سه عمودمنصف اضلاع هم‌مس‌اند. نقطه‌ی هم‌رسی آنها مرکز دایره‌ی محیطی مثلث است.
- ب) سه میانه هم‌مس‌اند. نقطه‌ی هم‌رسی آنها گرانیگاه (مرکز ثقل) مثلث است. گذشته از این، نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌ها هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.
- ج) سه نیمساز درونی هم‌مس‌اند. نقطه‌ی هم‌رسی آنها مرکز دایره‌ی محاطی درونی است.



(د) دو نیمساز بیرونی و نیمساز درونی زاویه‌ی سوم هم‌رس‌اند. نقطه‌ی هم‌رسی آنها مرکز دایره‌ی محاطی بیرونی است.

(ه) سه ارتفاع مثلث هم‌رس‌اند.

◁ پای نیمساز درونی هر زاویه‌ی مثلث ضلع روبه‌روی آن زاویه را به‌نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند. نیمساز بیرونی نیز همین ویژگی را داراست.

◁ پای نیمسازهای درونی و بیرونی هر زاویه‌ی مثلث ضلع روبه‌روی آن زاویه را به‌نسبت همساز (توافقی) تقسیم می‌کند.

◁ اگر اندازه‌ی اضلاع  $AB$ ،  $AC$ ،  $BC$  مثلث به‌ترتیب  $c$ ،  $b$  و  $a$  و اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی مثلث  $R$  باشد روابط زیر همواره برقرار است:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \quad (\text{الف})$$

(این رابطه به رابطه‌ی سینوس‌ها موسوم است.)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad (\text{ب})$$

(این رابطه به رابطه‌ی کسینوس‌ها موسوم است.)

رابطه‌ی کسینوس‌ها برای اضلاع دیگر نیز برقرار است.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad (\text{ج})$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \hat{C} \quad (\text{د})$$

◁ اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  اندازه‌ی اعضای مثلث،  $p$  نصف محیط مثلث،  $r$  شعاع دایره‌ی محاطی درونی و  $r_a$  شعاع دایره‌ی محاطی بیرونی زاویه‌ی  $A$  باشد، مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{الف})$$

$$S = p \cdot r \quad (\text{ب})$$

$$S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c \quad (\text{ج})$$

$$S = \frac{abc}{2R} \quad (\text{د})$$