

---

این کتاب ترجمه‌ای است از کتاب:

A First Course in

**ABSTRACT  
ALGEBRA**

Sixth Edition

---

**JOHN B. FRALEIGH**

University of Rhode Island

ADDISON - WESLEY, Inc.

---



نخستین درس در

# جبر مجرد

ویرایش ششم

نوشته

جان بی. فرالی

ترجمه

دکتر علی اکبر عالمزاده

فرالی، جان  
Frleigh, John B.  
نخستین درس در جبر مجرد / نوشته جان بی. فرالی؛ ترجمه علی اکبر  
عالمزاده. - تهران: علمی و فنی، ۱۳۸۳.  
جلد ۱، ۶۷۸ ص.

ISBN 964-6215-23-8 : ۴۹۰۰۰ ریال

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیا  
عنوان اصلی:

A First course in abstract algebra, 6th ed, C 1999.

این کتاب در سالهای مختلف توسط ناشرین متفاوت منتشر گردیده  
است.

واژه نامه.

کتابنامه: ص. ۶۱۱ - ۶۱۴.

نمایه.

۱. جبر مجرد. الف. عالمزاده، علی اکبر، ۱۳۲۲-، مترجم. ب. عنوان.

۵۱۲/۰۲

QA۱۶۲/۴۵۳

۱۳۸۳

۸۳ - ۳۰۲۸۴

کتابخانه ملی ایران

## نخستین درس در جبر مجرد (ویرایش ششم)

نوشته جان ب. فرالی

ترجمه دکتر علی اکبر عالمزاده

چاپ اول: زمستان ۱۳۸۳

۶۹۶ صفحه و زیری در ۲۰۰۰ نسخه، چاپ پژوهاک اندیشه

ویرایش، گرافیک و حروفچینی: آتلیه انتشارات علمی و فنی

ویراستار: جمشید مظاهری نیا

کمک ویراستار و سرپرست تولید: آرش بهرام پور

مقابلہ: محمد ازوج

طراح روی جلد: امیرحسین مظاهری نیا

گرافیکست حروفچینی: عماد عزیزی

لیتوگرافی: نگارگران

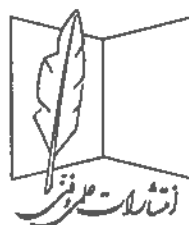
شابک جلد: ۸ - ۲۳ - ۶۲۱۵ - ۹۶۶

تهران: صندوق پستی شماره ۱۸۸ / ۱۴۴۵۵

تلفن: ۸۷۲۹۱۹۸ - ۸۵۵۴۸۴۹، فکس و پیامگیر: ۸۵۵۵۹۳۲

پست الکترونیکی: elmi\_fanni@yahoo.com

قیمت: ۴۹۰۰۰ ریال



## پیشگفتار مترجم

جهان بر مبنای ریاضیات خلق گردیده و به زبان ریاضی نگاشته شده است. لذا، برای درک آن باید این زبان را بیاموزیم. مطالعه ریاضیات، دستگاه ذهن را وسعت بخشیده و فعال می‌سازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است، زیرا درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است. بدین منظور است که ما بسیار به ریاضیات می‌پردازیم و نیز احکام آن را به خاطر توان و زیبایی معنوی‌شان تحسین می‌کنیم، چرا که اگر این شور و هیجان خاموش شود، ما دیگر ریاضیات را نمی‌فهمیم، مفاهیم آن از هم می‌پاشند، برهانها استحکام خود را از دست می‌دهند، ریاضیات بی‌معنی می‌شود و در انبوهی از مکرر گوییهای پوچ فرو می‌رود.

صفت ممتاز ریاضی کمال زیبایی است، نوعی زیبایی سرد که شامل زیب و زیورهای پر ابهت نقاشی و موسیقی نیست، بلکه حاوی صفا و خلوص رفیعی است که امکان هر نوع اصلاح و تکمیل اساسی را بدان می‌بخشد، چنان کمال مطلق که فقط عالترین نوع هنر قادر به ایجاد آن است.

ریاضیات که تار و پود آن به وسیله هزاران ریاضیدان بافته شده وسیع و پیچیده است، اما افکار اصلی محیط بر آن بسیار ساده‌اند. کتاب حاضر که معروفترین و مطرحترین کتاب جبر دانشگاهی است، این وسعت، پیچیدگی و سادگی افکار اصلی جبر را که شاخه‌ای از ریاضیات است، به شایسته‌ترین وجه ممکن نشان می‌دهد.

دکتر علی اکبر عالم‌زاده

## پیشگفتار مؤلف

این کتاب مقدمه‌ای است بر جبر مجرد. حدس می‌زنیم که دانشجویان، حساب دیفرانسیل و انتگرال و احتمالاً جبر خطی را مطالعه کرده‌اند. به هر حال، اینها عمدتاً پیشنیازهای ریاضی هستند؛ حساب دیفرانسیل و انتگرال و جبر خطی اغلب در مثالهای توصیفی و تمرینها ظاهر می‌شوند.

هدف من، مانند ویرایشهای قبل، آموختن هرچه بیشتر گروهها، حلقه‌ها و میدانها در نخستین درس به دانشجو است. جبر مجرد، برای بسیاری از دانشجویان، اولین برخورد مشروح به یک بحث اصل موضوعی در ریاضیات است. با تشخیص این امر، راجع به آنچه می‌خواهیم انجام دهیم، طرز اجرای آنها و دلیل انتخاب این روشها، توضیح بسیار داده‌ام. تسلط بر این کتاب پایه محکمی برای کارهای تخصصی‌تر در جبر است و ضمناً تجربه با ارزشی را برای مطالعه بیشتر اصل موضوعی در ریاضیات فراهم می‌کند.

## تغییرات در ویرایش پنجم بحث اولیه و مشروح یکرختی

مفهوم گروههای یکرخت در همه ویرایشهای قبل، به مجرد تعریف گروهها به صورت غیر صوری و بدون تعریف دقیق معرفی شده‌است. من در کلاسهای خود بر این مفهوم شهودی که نشانگر توجه ما به ساختار جبر است، تأکید کرده‌ام. وقتی دانشجویان من با تعریف دقیق که پس از تعریف همریختی در فصل ۲ می‌آید، مواجه می‌شوند، با مفهوم آن آشنا بوده و تعریفها به نظرشان طبیعی خواهد رسید.

بعضی از خوانندگان خاطر نشان کرده‌اند که از غیر صوری بودن این بحث اولیه ناخشنوداند. در این ویرایش تصمیم گرفتم که مفهوم ساختارهای دوتایی یکرخت را، درست بعد از آنکه اعمال دوتایی معرفی شد و به وسیله اصول موضوع ساختاری نظم یافتند، در بخش جدید ۲.۱ بیاورم. گروهها در بخش ۳.۱ معرفی شده‌اند که در آن می‌توان راجع به گروههای یکرخت با مبنای محکم سخن گفت. من این کار را یک اصلاح آموزشی بزرگ می‌دانم و مطمئنم که همه خوانندگان کارکرد آن را بخوبی در خواهند یافت. با آنکه

یکریختی حالت خاصی از همریختی است، مفهوم یکریختی انگیزش آسانتری دارد و از مفهوم همریختی بسیار شهودی‌تر است. این مفهوم از ایده‌ای که می‌خواهیم ساختار در جبر را مطالعه کنیم بطور طبیعی ظاهر می‌شود و ما را با عناصر خاصی که عملاً وجود دارند درگیر نمی‌کند. معرفی اولیه آن برای این وجهه ساختاری بررسی ما تأکید آنی دارد.

### تاکید بیشتر بر تعریفها

در همه ویرایشهای قبل براهمیت تعریفها تأکید شده و این کار از همان بخش اول کتاب آغاز شده و در بعضی از تمرینهای درست - نادرست بطور ضمنی ادامه یافته است. مهم آن است که دانشجویان بتوانند تعریفهای دقیق به دست دهند. آنها تمرین کمی در این زمینه داشته‌اند. اگر می‌خواستیم در تمرینهایی از دانشجویان بخواهیم که اصطلاحات را تعریف کنند، دانشجویان می‌توانستند به عقب برگشته و تعریفهای کتاب را کپی کنند. یک ویژگی جدید این ویرایش آن است که یک «تعریف» را ذکر کرده و از دانشجو خواسته‌ام که آن را ارزیابی کند و در صورت لزوم آن را اصلاح نموده و به شکلی مناسب برای چاپ بنویسد. اغلب مجموعه تمرینات کتاب شامل دو تا چهار سوال از این نوع تحت عنوان «مفهومها» هستند. بعضی از «تعریفهای» من در این تمرینها، اشتباهات نسبتاً ظریفی دارند، بعضی از آنها درست‌اند ولی متفاوت با متن بیان شده‌اند و محدودی از آنها بی‌معنی هستند. به این سؤالات پاسخ داده نشده است، از دانشجویان می‌خواهم که راجع به آنها فکر نمایند.

### مطالب جدید

بخش جدید ۸.۵ به حلقه‌ها و میدانهای مرتب می‌پردازد. این مبحث جالب به‌ما فرصت بیشتری برای کار با حلقه‌ها و میدانها با استفاده از مفاهیم آشنای مثبت بودن و نامساوی را خواهد داد. می‌دانیم که میدان اعداد حقیقی فقط ترتیب متعارف را می‌پذیرد، ولی یک زیرمیدان ممکن است ترتیبی بیابد که آشنا نباشد. در این بخش، حلقه‌های سری توانی صوری و نیز میدانهای سری توانی (لوران) معرفی شده‌اند.

بخش جدید ۳.۶ مقدمه‌ای است بر پایه‌های گروبر برای ایده‌آلها در حلقه‌های چندجمله‌ایها با ضرایب در یک میدان. کامپیوتر این امر را به‌صورت یک مبحث جالب برای دانشجویان فیزیک و علوم کامپیوتر درآورده است. این بخش رابطه بین ایده‌آلها و وارته‌های جبری را به‌دست داده و نشان می‌دهد که ایده‌آلها برای چیزی غیر از تشکیل حلقه‌های عاملی سودمندند. دانشجویانی که کمی جبرخطی خوانده‌اند خواهند دید که محاسبه یک پایه گروبر تعمیمی طبیعی از تحویل یک دستگاه خطی به‌دستگاهی است که ماتریس ضرایب به‌شکل سطری پلکانی است.

بخش ۲.۰ بحث نظریه مجموعه‌ای کوتاهی از روابط و تابعها را مطرح می‌کند و این برای افرادی است که نمی‌خواهند تابع را یک قاعده بدانند. همچنین، بحث کوتاهی از اصلیت را خواهیم داشت. ثابت شده است

که  $\mathbb{Z}$  و  $\mathbb{Q}$  اصلیت یکسانی دارند، اما اصلیت  $\mathbb{R}$  متفاوت است. این نتیجه لازم است چرا که دانشجویان می‌توانند با آسانی ببینند که  $\mathbb{Q}$  و  $\mathbb{R}$  تحت جمع گروه‌های یکریخت نیستند.

## تجدید سازمان

در سازمان کتاب چند تغییر کوچک داده شده است. بحث گروه‌های عاملی را ساده کرده‌ام. قضیه کیلی در بخش ۱.۲ و بلافاصله پس از معرفی گروه‌های متقارن به جای فصل ۳ ظاهر می‌شود و کار لازم روی یکریختی شده است.

در شماره گذاری تعریفها، مثالها، لمها، قضایا، نتایج، جدولها و شکلها تغییرات زیادی داده شده است. همه آنها را در یک بخش مثلاً ۴.۲ یک کاسه کرده و به صورت ۱.۴.۲، ۲.۴.۲ و... به ترتیب ظهورشان شماره گذاری کرده‌ایم. در ویرایشهای قبل، قضایا در تمام فصل شماره گذاری شده بودند. اگر به دنبال قضیه ۲۱.۳ برای مراجعه می‌گشتید و به صفحه‌ای در فصل ۳ که شامل تعریف ۱۲.۳ بود می‌رفتید، نمی‌دانستید به کدام راه بروید. من شماره گذاری سه تایی را زیبا نمی‌بینم، ولی یافتن مرجعها را آسان می‌سازد.

## ویژگیهای مهم حفظ شده‌اند

شیوه کتاب غیر صوری است، ولی توضیحات و برهانها با تفصیل زیاد بیان شده‌اند. مطالب مقدماتی در فصل ۰ بیان شده‌اند و مدرس می‌تواند بسته به شرایط کلاس، هر قدر بخواهد از آنها اختیار نماید. بسیاری از دانشگاهها، درسی شامل این مواد به عنوان پیشنیاز جبر مجرد دارند. کلاس من چنین نیست، با این حال من نخستین تدریس کامل خود را به بخش ۲.۰ و مقداری کافی از بخش ۴.۰ اختصاص می‌دهم؛ در نتیجه دانشجویان از نمایش قطبی اعداد مختلط و ریشه‌های واحد اطلاع دارند. من بخش ۱.۰ را به عنوان خواندن و تعدادی مسأله در بخشهای ۱.۰، ۲.۰ و ۴.۰ را تکلیف شب گرفته و در درس دوم خود به بخش ۱.۱ می‌روم. احساس می‌کنم که صرف وقت اضافی در مقدمات از توجه به درس می‌کاهد و من از دریغ داشتن وقت در مورد جبر بیزارم. اگر بعدها به مطلبی از فصل ۰ نیاز داشته باشم، در همان لحظه از آن استفاده می‌کنم. فصل ۰ با توجه به این امر طراحی شده است.

مجموعه‌های تمرینات یا محاسبات معمولی شروع شده و انتقال دانشجو از درس معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال را آسان می‌سازند. در اغلب مجموعه‌های مسائل، یک تمرین ۱۰ قسمتی درست - نادرست ظاهر می‌شود. این تمرینها برای تأکید بر تعریفها، منطق و مفاهیم طراحی شده‌اند. همچنین، تمرینی خواهند بود در اینکه بگوئیم یک حکم ریاضی درست است یا خیر، در مقابل تمرینهایی که می‌گویند «ثابت کنید...».

جواب تمرینها با شماره‌های فرد، جز در مورد آنهایی که برایشان برهان یا تعریف خواسته شده، در آخر کتاب آمده است. احساس می‌کنم که داشتن یک برهان آماده تمرینی را که برایش برهان خواسته شده است،

تقریباً بی ارزش می کند.

یادداشتهای تاریخی ویکتور کاتس (Victor Katz) تنها حقایق و حکایت راجع به شرکت کنندگان در این مبحث نیستند؛ او در واقع انگیزه گسترش این مبحث را توضیح داده است. این امر کار سختی است زیرا ترتیب مطالب در کتاب تقریباً عکس ترتیب پیدایش تاریخی آنهاست. مثلاً، انگیزه برای نظریه گروهها که ابتدا در کتاب مطرح شده است، مطالعه صفرهای چند جمله ایهاست که در آخر مطرح شده است.

## راهنمای حل برای مدرس

مدرس می تواند کتاب راهنما شامل جوابهای کامل تمام تمرینات به انضمام آلهایی که برایشان برهان خواسته شده است را از ناشر مربوطه دریافت نماید.

## تشکر و قدردانی

در تهیه این ویرایش، به خصوص مدیون جرج ام. برگمن (George M. Bergman) هستم که اخیراً از ویرایش قبل استفاده کرده و غلطهای چاپی و سایر خطاها را گوشزد نموده است. وی این غلطها را همراه با انتقادات و پیشنهادات اصلاحی برای من فرستاده است. من واقعاً از این ویرایش داوطلبانه که برایم بسیار با ارزش بوده و باید وقت زیادی صرف آن شده باشد سپاسگزارم.

مایلم مراتب قدردانی خود را از ویراستاران ادیسون - ولسلی (Addisson - Wesley) در تهیه این ویرایش ابراز دارم که از آن جمله عبارتند از ویلیام آدامز (William Adams)، دانشگاه مریلند؛ رابرت دین (Robert Dean)، استنف اف. آستین (Stephen F. Austin)، دانشگاه ایالتی؛ دی ج. هارتفیل (D.J. Hartfiel)، دانشگاه A & M تگزاس، مایکل اولری (Michael O'Leary)، دانشگاه کلرادو؛ و تی. شولت (T. Schulte)، دانشگاه ایالتی کالیفرنیا، ساکرامنتو.

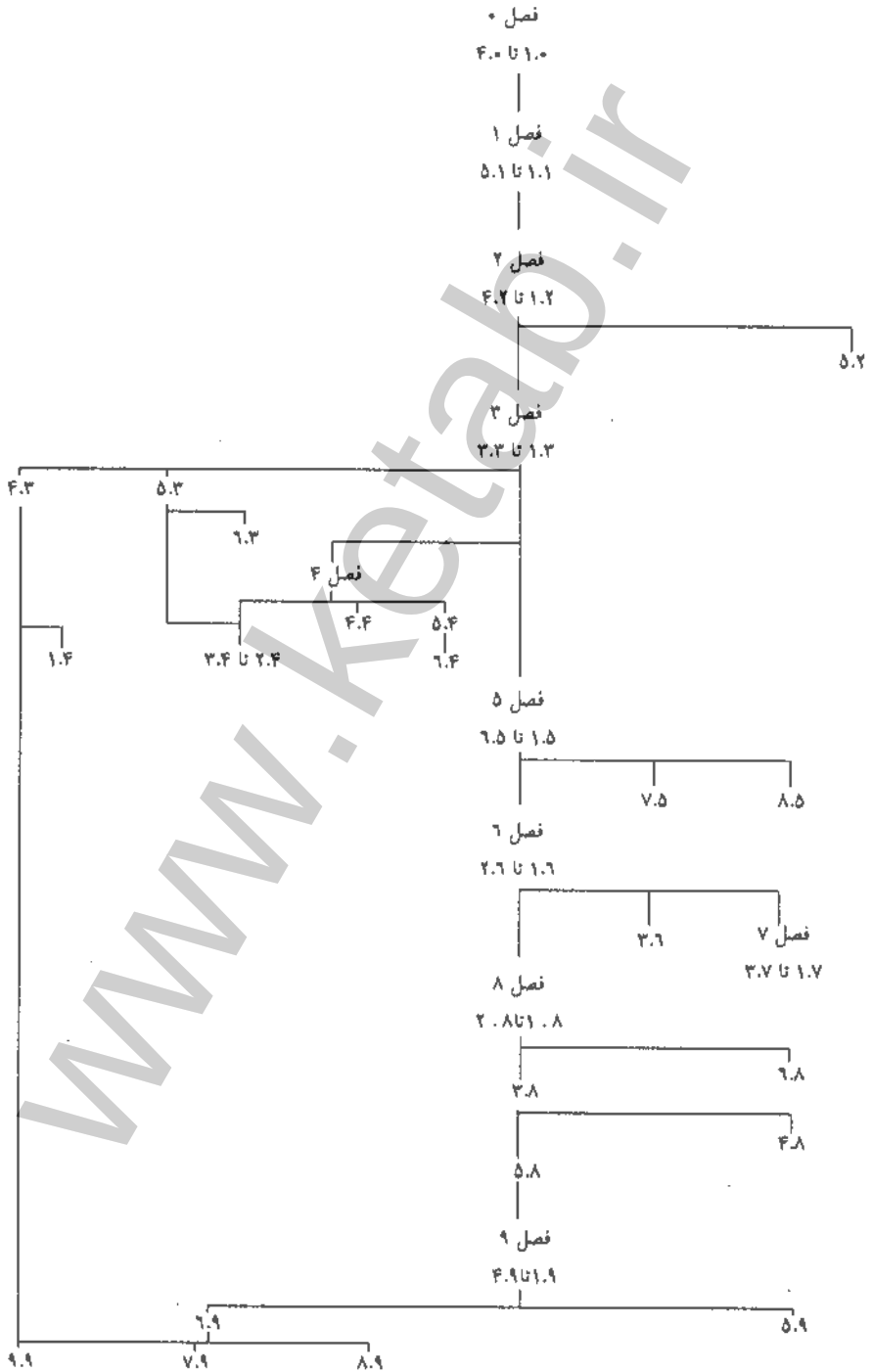
از ویکتور کاتس به خاطر تهیه یادداشتهای تاریخی عالی بسیار ممنونم. همچنین از کارولین لی (Carolyn Lee) و کارکنان ادیسون - ولسلی به خاطر کمک آنها در تدوین این ویرایش سپاسگزاری می نمایم.

Kingston, RI

John B. Fraleigh

جان ب. فرالی

## نقشه ارتباط مطالب



## فهرست مطالب

### فصل ۰ مقدمات ..... ۱

- ۱ ..... ۱.۰ ریاضیات و برهانها  
 ۹ ..... ۲.۰ مجموعه‌ها و رابطه‌ها، مفهوم مجموعه  
 ۲۰ ..... ۳.۰ استقرای ریاضی  
 ۲۶ ..... ۴.۰ جبر مختلط و ماتریسی

### فصل ۱ گروه‌ها و زیرگروه‌ها ..... ۳۷

- ۳۷ ..... ۱.۱ اعمال دوتایی  
 ۴۹ ..... \* ماشینها با وضعیت متناهی (خودکارها)  
 ۵۲ ..... ۲.۱ ساختارهای دوتایی یکریخت  
 ۶۲ ..... ۳.۱ گروه‌ها  
 ۷۹ ..... ۴.۱ زیرگروه‌ها  
 ۹۲ ..... ۵.۱ گروه‌های دوری و مولدها  
 ۱۰۷ ..... دیگر افنهای کیلی

### فصل ۲ مطالب بیشتر راجع به گروه‌ها و هم مجموعه‌ها ..... ۱۱۱

- ۱۱۱ ..... ۱.۲ گروه‌های جایگشتها  
 ۱۲۷ ..... خودکارها

|     |                                                        |
|-----|--------------------------------------------------------|
| ۱۲۹ | ۲.۲ مدارها، دورها و گروههای متناوب                     |
| ۱۴۱ | یکمتریهای مسطح                                         |
| ۱۴۴ | ۳.۲ هم مجموعه‌ها و قضیه لاگرانژ                        |
| ۱۵۵ | ۴.۲ حاصل ضربهای مستقیم و گروههای آبدلی با تولید متناهی |
| ۱۶۸ | توابع متناوب                                           |
| ۱۷۰ | یکمتریهای مسطح                                         |
| ۱۷۸ | ۵.۲+ رمزهای خطی دویی                                   |

### فصل ۳ همریختیها و گروههای عاملی

|     |                                          |
|-----|------------------------------------------|
| ۱۹۳ | ۱.۳ همریختیها                            |
| ۲۰۶ | ۲.۳ گروههای عاملی                        |
| ۲۱۶ | ۳.۳ محاسبات در گروه عاملی و گروههای ساده |
| ۲۲۹ | ۴.۳ سری گروهها                           |
| ۲۳۷ | ۵.۳+ عمل گروهی بر یک مجموعه              |
| ۲۴۷ | ۶.۳++ کاربردهای $G$ - مجموعه‌ها در شمارش |

### + فصل ۴ نظریه گروههای پیشرفته

|     |                                              |
|-----|----------------------------------------------|
| ۲۵۳ | ۱.۴ فضایای یکریختی: برهان قضیه ژردان - هولدر |
| ۲۶۴ | ۲.۴ فضایای سیلو                              |
| ۲۷۳ | ۳.۴ کاربردهای نظریه سیلو                     |
| ۲۸۱ | ۴.۴ گروههای آبدلی آزاد                       |
| ۲۹۱ | ۵.۴ گروههای آزاد                             |
| ۲۹۹ | ۶.۴ نمایشهای گروه                            |

### فصل ۵ آشنایی با حلقه‌ها و میدانها

|     |                       |
|-----|-----------------------|
| ۳۰۹ | ۱.۵ حلقه‌ها و میدانها |
| ۳۲۲ | ۲.۵ قلمروهای صحیح     |

+ . این بخش فقط برای بخشهای ۶.۳ و ۲.۴ لازم است.

+ . تا پایان کتاب نیازی به آن نیست.

+ . تا پایان کتاب نیازی به آن نیست.

|     |                                          |
|-----|------------------------------------------|
| ۳۳۱ | ۳.۵ قضایای فرما و اوایلر                 |
| ۳۳۹ | ۴.۵ میدان خارج قسمتهای یک قلمرو صحیح     |
| ۳۴۸ | ۵.۵ حلقه‌های چندجمله‌ای                  |
| ۳۶۲ | ۶.۵ تجزیه چندجمله‌ایها روی یک میدان      |
| ۳۷۶ | ۷.۵ <sup>+</sup> چند مثال تعویض ناپذیر   |
| ۳۸۶ | ۸.۵ <sup>+</sup> حلقه‌ها و میدانهای مرتب |

## فصل ۶ حلقه‌های عاملی و ایده‌آلها

|     |                                    |
|-----|------------------------------------|
| ۳۹۷ | ۱.۶ هم‌ریختیها و حلقه‌های عاملی    |
| ۴۰۹ | ۲.۶ ایده‌آلهای اول و ماکزیمال      |
| ۴۲۱ | ۳.۶ پایه‌های گروبنر برای ایده‌آلها |

## + فصل ۷ تجزیه

|     |                              |
|-----|------------------------------|
| ۴۳۵ | ۱.۷ قلمروهای یکتایی تجزیه    |
| ۴۵۲ | ۲.۷ قلمروهای اقلیدسی         |
| ۴۶۱ | ۳.۷ اعداد صحیح گاوسی و نرمها |

## فصل ۸ توسیع میدانها

|     |                                      |
|-----|--------------------------------------|
| ۴۷۲ | ۱.۸ آشنایی با توسیع میدانها          |
| ۴۸۳ | ۲.۸ فضاهاى بردارى                    |
| ۴۹۵ | ۳.۸ توسیماهای جبری                   |
| ۵۰۹ | ۴.۸ ترسیمات هندسی                    |
| ۵۱۷ | ۵.۸ میدانهای منتهای                  |
| ۵۲۳ | ۶.۸ <sup>+</sup> ساختارهای جبری دیگر |

## فصل ۹ خود ریختیها و نظریه گالوا

|     |                         |
|-----|-------------------------|
| ۵۳۱ | ۱.۹ خودریختیهای میدانها |
| ۵۴۴ | ۲.۹ قضیه توسیع یکریختی  |

|     |                                                       |
|-----|-------------------------------------------------------|
| ۵۵۳ | ۳.۹ میدانهای تجزیه گر                                 |
| ۵۵۹ | ۴.۹ توسعه‌های جدایی‌پذیر                              |
| ۵۷۰ | ۵.۹ توسعه‌های کلاً جدایی‌ناپذیر                       |
| ۵۷۴ | ۶.۹ نظریه گالوا                                       |
| ۵۸۶ | ۷.۹ مثالهایی در نظریه گالوا                           |
| ۵۹۵ | ۸.۹ توسعه‌های دایره‌بر                                |
| ۶۰۳ | ۹.۹ حل‌ناپذیری درجه پنج                               |
| ۶۱۱ | کتابنامه                                              |
| ۶۱۵ | نمادگذاری                                             |
| ۶۱۹ | جواب تمرینهای فرد که به تعریفها و برهانها نیاز ندارند |
| ۶۴۹ | واژه‌نامه فارسی به انگلیسی                            |
| ۶۵۷ | واژه‌نامه انگلیسی به فارسی                            |
| ۶۶۹ | فهرست راهنما                                          |