

معادلات دیفرانسیل

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

تألیف: سید احمد حسن پور

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_n y = X$$



علوم رایانہ

حسن پور، سید احمد، ۱۳۲۵ -

معادلات دیفرانسیل / مؤلف : سید احمد حسن پور. - بابل : نشر علوم رایانه ، ۱۳۸۵ .

۳۲۰ ص . : مصور ، جدول.

ISBN : 964-8996-10-5

کتابنامه : ص ۳۱۸

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیفا (فهرست نویسی پیش از انتشار).

۱. معادله های دیفرانسیل . الف. عنوان

۵۱۵/۳۵

م ۵ ج ۶ / ۵۸۳۷۱



www.olomrayaneh.net

تلفن ۰۱۱۱-۳۲۶۰۷۷۲

بابل، صندوق پستی ۸۹۱-۴۷۱۳۵

علوم رایانه

معادلات دیفرانسیل

مؤلف : سید احمد حسن پور

ناشر : علوم رایانه

چاپ اول : تابستان ۱۳۸۵

جلد ۲۰۰۰

شابک : ۹۶۴-۸۹۹۶-۱۰-۵

قیمت : ۳۵۰۰ تومان

حروفچینی و صفحه آرایی : علوم رایانه

فهرست مطالب

فصل ۱- معادلات دیفرانسیل ۹

- ۱-۱. معادلات دیفرانسیل ۹
- ۱-۲. مرتبه و درجه معادله دیفرانسیل ۹
- ۱-۳. تشکیل معادله دیفرانسیل ۱۰
- ۱-۴. جواب معادله دیفرانسیل ۱۱
- ۱-۵. تمرین ۱۲

فصل ۲- معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۱۵

- ۲-۱. حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول ۱۵
- ۲-۲. معادلات دیفرانسیل که متغیرها تفکیک پذیر هستند ۱۵
- ۲-۳. تمرین ۱۶
- ۲-۴. معادلات دیفرانسیل که با انتخاب تغییر متغیر حل می شوند ۱۷
- ۲-۵. معادلات دیفرانسیل همگن ۱۹
- ۲-۶. تمرین ۲۰
- ۲-۷. حل معادلات دیفرانسیل به صورت $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ ۲۱
- ۲-۸. تمرین ۲۳
- ۲-۹. معادله دیفرانسیل کامل ۲۴
- ۲-۱۰. تمرین ۲۶

فصل ۳- عامل انتگرال ساز و حل معادلات خطی ۲۷

- ۳-۱. عامل انتگرال ساز (فاکتور انتگراند) ۲۷
- ۳-۲. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول ۲۸
- ۳-۳. حل معادله خطی مرتبه اول به صورت $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ ۳۱
- ۳-۴. عامل انتگرال ساز منحصر به فرد نیست ۳۳
- ۳-۵. عامل انتگرال ساز به صورت $y^m \cdot x^a$ ۳۷
- ۳-۶. عامل انتگرال ساز برای معادلات دیفرانسیل ۳۹
- ۳-۷. تمرین ۴۰
- ۳-۸. روش تغییر متغیر برای حل معادلات خطی مرتبه اول ۴۰

فصل ۴- معادلات دیفرانسیل برنولی، ریکاتی و کلو ۴۵

- ۴-۱. معادله دیفرانسیل برنولی ۴۵
- ۴-۲. تمرین ۴۷
- ۴-۳. معادله ریکاتی ۴۸

۵۱	۴-۴. تمرین.....
۵۲	۴-۵. معادله دیفرانسیل کلرو.....
۵۳	۴-۶. تعمیم معادله کلرو توسط لاگرانژ.....
۵۴	۴-۷. معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر.....
۵۴	۴-۸. معادله دیفرانسیل کامل.....
۵۵	۴-۹. فاکتور انتگرال.....
۵۵	۴-۱۰. معادله دیفرانسیل خطی.....
۵۶	۴-۱۱. معادله دیفرانسیل همگن.....
۵۶	۴-۱۲. معادله برنولی.....
۵۶	۴-۱۳. معادلات دیفرانسیل که بر حسب y قابل حل اند.....
۵۶	۴-۱۴. معادلات کلرو.....
۵۷	۴-۱۵. تمرین.....

فصل ۵: کاربرد معادلات دیفرانسیل..... ۵۹

۵۹	۵-۱. مسیرهای قائم.....
۶۱	۵-۲. تمرین.....
۶۸	۵-۳. تمرین.....
۶۹	۵-۵. موارد استعمال معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول.....
۶۹	۵-۵-۱. قانون رشد و زوال.....
۶۹	۵-۵-۲. پیدا کردن انحنای شعاع انحنای یک تابع.....
۶۹	۵-۵-۳. حرکت نوسانی ساده.....
۷۰	۵-۵-۴. رقیق کردن یک محلول.....
۷۰	۵-۵-۵. قانون سرد شدن نیوتن.....
۷۱	۵-۵-۶. سرعت فعل و انفعال شمای.....
۷۱	۵-۵-۷. اختلاف پتانسیل الکتریکی.....
۷۳	۵-۵-۸. پوش دسته منحنی.....
۷۳	۵-۵-۹. تعریف پوش منحنی.....
۷۶	۵-۵-۱۰. پوش قائم بر یک منحنی.....
۷۶	۵-۵-۱۱. مرکز انحنای یک منحنی.....

فصل ۶: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر با ضرایب حقیقی..... ۷۹

۷۹	۶-۱. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم.....
۷۹	۶-۱-۱. معادله دیفرانسیل $y'' = f(x)$
۸۰	۶-۱-۲. معادله دیفرانسیل $f(x, y', y'') = 0$
۸۱	۶-۱-۳. معادله دیفرانسیل $f(y, y', y'') = 0$
۸۲	۶-۱-۴. معادله دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$
۸۲	۶-۱-۵. معادله دیفرانسیل $f(x, y, y', y'') = 0$
۸۳	۶-۲. تمرین.....
۸۴	۶-۳. حل معادله دیفرانسیل مرتبه های بالاتر.....

۴-۶ تمرین.....	۸۵
۵-۶ مستقل بودن جواب‌ها.....	۸۶
۶-۶ حل معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$	۸۷
۶-۷ تمرین.....	۸۹
۸-۶ حل معادله دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = 0$	۸۹
۶-۹ تمرین.....	۹۳
۱۰-۶ حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با طرف ثانی.....	۹۴
۱۱-۶ تعیین جواب طرف ثانی به کمک اپراتور D	۹۷
۱۲-۶ اگر $F(x)$ تابع نمایی باشد $F(x) = Ae^{mx}$	۱۰۰
۱۳-۶ اگر تابع طرف دوم $\sin mx$ یا $\cos mx$ باشد.....	۱۰۲
۱۴-۶ تمرین.....	۱۰۴

فصل ۷: معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر..... ۱۰۵

۷-۱ حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرایب متغیر.....	۱۰۵
۷-۲ روش کشی - اوایلر در حل معادلات.....	۱۰۷
۷-۳ تمرین.....	۱۰۹
۷-۴ تمرین.....	۱۱۲
۷-۵ حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با طرف ثانی به روش تغییر عدد ثابت.....	۱۱۲
۷-۶ تمرین.....	۱۱۴
۷-۷ معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر (کشی - اوایلر).....	۱۱۵
۷-۸ تمرین.....	۱۱۷
۷-۹ روش کاهش مرتبه.....	۱۱۷
۷-۱۰ روش عمومی برای حل معادلات خطی غیر همگن.....	۱۲۱
۷-۱۱ تمرین.....	۱۲۲

فصل ۸: حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی..... ۱۲۳

۸-۱ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی.....	۱۲۳
۸-۲ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت.....	۱۲۶
۸-۳ تمرین.....	۱۳۶

فصل ۹: حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌ها..... ۱۳۹

۹-۱ حل معادلات به روش سری توانی.....	۱۳۹
۹-۱-۱ سری توانی.....	۱۳۹
۹-۱-۲ همگرایی سری توانی.....	۱۴۰
۹-۱-۳ فاصله همگرایی و شعاع همگرایی.....	۱۴۰
۹-۲ تمرین.....	۱۴۲
۹-۳ حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول و دوم به روش سری توانی.....	۱۴۳
۹-۴ تمرین.....	۱۴۶
۹-۵ تمرین.....	۱۵۰

۱۵۲	۹-۶. بعضی تعاریف مهم
۱۵۲	۹-۷. معادله لژاندر
۱۵۷	۹-۸. حل معادله لژاندر به کمک سری با توان نزولی X
۱۶۲	۹-۹. خواص چندجمله‌ای لژاندر
۱۶۲	۹-۱۰. فرمول‌های بازگشت لژاندر
۱۶۵	۹-۱۱. معادله هرمیت
۱۶۷	۹-۱۲. معادله چیشف
۱۶۹	۹-۱۳. معادله بسل
۱۷۲	۹-۱۴. روش توسعه یافته سری توانی (فروبنیوس)

فصل ۱۰-۱: تبدیل لاپلاس

۱۷۹	۱۰-۱. تبدیل لاپلاس
۱۸۰	۱۰-۲. تبدیل لاپلاس توابع مهم
۱۸۳	۱۰-۳. تبدیل معکوس لاپلاس
۱۸۲	۱۰-۴. تمرین
۱۸۳	۱۰-۵. قضیه مشتق در تبدیل لاپلاس
۱۸۶	۱۰-۶. تمرین
۱۸۶	۱۰-۷. قضیه انتگرال‌گیری
۱۸۷	۱۰-۸. تابع گاما
۱۹۰	۱۰-۹. قضیه انتقال ۱ (انتقال بر محور s)
۱۹۰	۱۰-۱۰. قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس
۱۹۲	۱۰-۱۱. تمرین
۱۹۳	۱۰-۱۲. انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس
۱۹۴	۱۰-۱۳. تابع هم‌مرتب‌ه نمایی
۱۹۹	۱۰-۱۴. تمرین
۱۹۹	۱۰-۱۵. دومین قضیه جابه‌جایی
۲۰۰	۱۰-۱۶. تمرین
۲۰۱	۱۰-۱۷. تابع پله‌ای واحد (تک پله‌ای) یا تابع هیوی ساید
۲۰۶	۱۰-۱۸. تبدیل لاپلاس تابع متناوب
۲۰۷	۱۰-۱۹. تمرین
۲۰۷	۱۰-۲۰. کانولوشن (پیچش)
۲۰۹	۱۰-۲۱. تمرین

پیوست ۱: خلاصه درس ۲۱۵

پیوست ۲: مسایل متنوع حل شده ۲۲۳

پیوست ۳: پرسش‌های چهارگزینه‌ای کارشناسی ارشد ۲۵۹

منابع ۳۱۸

بسم الله الرحمن الرحيم

یکی از پایه‌های توسعه فرهنگی و رشد و شکوفایی استعدادها، مقوله کتاب و کتابخوانی است. نیاز به کتاب به سرعت در حال رشد است و انتشار نتیجه مطالعات پژوهشگران و اندیشمندان پاسخگوی این نیاز خواهد بود. جهت تحقق این امر و گام برداشتن به سمت خودکفایی، چاپ کتب علمی، به خصوص در زمینه تکنولوژی جدید، یعنی کامپیوتر، که توسعه سایر فناوری‌ها نیز به آن وابسته است، ضروری است.

عین‌اله جعفرنژاد قمی
انتشارات علوم رایانه

مقدمه

به نام او که همه علم از اوست

افزون بر سی سال است که آموزش ریاضی را در مقاطع مختلف تجربه کرده‌ام. طی این مدت متوجه شدم که دانش‌آموزان و دانشجویان، مطالعه جزوه اساتید را بر کتاب‌های ارزشمند قدیمی ترجیح می‌دهند.

تحقیقات علمی و آماری انجام شده روی گروه‌های متعدد از دانشجویان دانشگاه‌های مختلف، دقیقاً نشان می‌دهد که تغییر ادبیات انتقال مفاهیم و نوع نگارش کتاب‌های آموزشی اجتناب‌ناپذیر است تا کتب یاد شده به‌عنوان مرجع مورد استفاده قرار گیرد. روی این اصل، بر آن شدم تا تمام سرفصل درس معادلات دیفرانسیل را با بیان ساده و مثال‌های حل شده در متن کتاب به همراه مسئله‌های متنوع امتحانات گذشته با حل آن به صورت تشریحی و تستی در یک کتاب جمع‌آوری نمایم.

وظیفه خود می‌دانم از جناب آقای مهندس جعفر نژاد قمی استاد گرانقدر که بی‌دریغ محبت می‌فرمایند صمیمانه تشکر نمایم، همچنین از سرکار خانم لیلا اعتصامی‌راد که با حوصله و دقت منحصر بفرد خودشان اشکالات نگارشی را گوشزد نمودند، سپاسگزاری کنم.

در پایان از خوانندگان ارجمند تقاضا دارم اشکالات احتمالی را حتماً تذکر دهند.

سید احمد حسن پور

تأبستان ۸۵