

هندسه‌های اقلیدسی و ناقلیدسی و بسط آن

ماروین جی. گرینبرگ

ترجمه محمدهادی شفیعیها

مرکز نشر دانشگاهی



Euclidean and Non-Euclidean Geometries Development and History

Third Edition

Marvin Jay Greenberg

W.H. Freeman and Company, 1994

هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی و بسط آن

تألیف ماروین جی. گرینبرگ

ترجمه محمدهادی شفیعیها

نسخه پرداز: فاطمه پیوندی
طراح جلد: بهرام کاووسی راد
حروفچین و صفحه‌آرا: منیژه دیاروند
ناظر چاپ: جواد خسروی
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۸۹
تعداد ۱۰۰۰
لینوگرافی، چاپ و صحافی: توس
۱۰۸۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، رویه‌روی سینما سیده، پاساژ خیبری، تلفن: ۶۶۴۰۸۸۹۱، ۶۶۴۱۰۶۸۶

فروش اینترنتی: www.bookiup.ir

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است.
فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

مترجم: گرینبرگ، ماروین جی، ۱۹۳۵ - م. J. Greenberg.

عنوان و نام پدیدآور: هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی و بسط آن / ماروین جی. گرینبرگ؛ ترجمه محمدهادی شفیعیها.

وضعیت ویراست: [ویراست ۳].

مشخصات نشر: تهران مرکز نشر دانشگاهی ۱۳۸۹.

مشخصات ظاهری: ۵۱۴ ص. مصور، جدول.

فروست: مرکز نشر دانشگاهی: ۱۳۹۷. ریاضی. آمار، و رایانه: ۱۶۷

شابک: 978-964-01-1397-4

وضعیت فهرست‌نویسی: فیا

یادداشت: عنوان اصلی: Euclidean and non-euclidean geometries.

یادداشت: نمایه.

موضوع: هندسه

موضوع: هندسه غیراقلیدسی

شناسه افزوده: شفیعیها، محمدهادی، ۱۳۹۸ - ۱۳۸۵، مترجم

شناسه افزوده: مرکز نشر دانشگاهی

رده‌بندی کنگره: QA ۴۴۵ / گ۴ ا ۹ ۱۳۸۹

رده‌بندی دبویی: ۵۱۶

شماره کتابشناسی ملی: ۲۱۷۲۷۹۶

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
نه	پیشگفتار مترجم
۱	دیباچه
۷	مقدمه
۱۳	۱ هندسه اقلیدسی
۱۳	منشأ هندسه
۱۷	روش بنداشتی
۱۸	اصطلاحات تعریف‌نشده
۲۱	چهار اصل اول اقلیدس
۲۶	اصل توازی
۲۸	تلاش برای اثبات اصل توازی
۳۰	خطر نمودارها
۳۲	قدرت نمودارها
۳۳	خودآزمایی
۳۴	تمرین
۳۹	تمرینهای اصلی

پروژه

۴۳

۲ منطق و هندسه وقوع

۴۵

منطق غیرصوری

۴۵

قضیه و برهان

۴۷

برهان خلف

۴۹

نقیض

۵۱

سور

۵۳

استلزام

۵۵

قانون طرد شق ثالث و برهان موردی

۵۶

هندسه وقوع

۵۷

مدل

۵۸

یکریختی مدلها

۶۳

صفحه تصویری و الین

۶۴

خودآزمایی

۶۸

تمرین

۶۹

تمرینهای اصلی

۷۲

پروژه

۷۵

۳ بنداشتهای هیلبرت

۷۷

نقایض کار اقلیدس

۷۷

بنداشتهای میان بود

۷۹

بنداشتهای قابلیت انطباق

۹۰

بنداشتهای پیوستگی

۱۰۱

بنداشت توازی

۱۱۰

خودآزمایی

۱۱۱

تمرینهای میان بود

۱۱۲

تمرینهای قابلیت انطباق

۱۱۶

تمرینهای اصلی

۱۲۰

پروژه

۱۲۳

۴	هندسه نتاری	۱۲۵
	هندسه‌ای بدون بنداشت توازی	۱۲۵
	قضیه زاویه متبادل درونی	۱۲۷
	قضیه زاویه بیرونی مثلث	۱۲۹
	اندازه زاویه و پاره خط	۱۳۲
	قضیه ساکری-لژاندر	۱۳۵
	هم‌ارزی اصلهای توازی	۱۳۸
	مجموع زوایای مثلث	۱۴۰
	خودآزمایی	۱۴۴
	تمرین	۱۴۶
	تمرینهای اصلی	۱۵۵
	پروژه	۱۵۸
۵	تاریخچه اصل توازی	۱۶۰
	پروکلوس	۱۶۱
	والیس	۱۶۴
	ساکری	۱۶۶
	کلرو	۱۶۸
	لژاندر	۱۶۹
	لامبرت و تاورینوس	۱۷۱
	فارکاش بویویی	۱۷۳
	خودآزمایی	۱۷۵
	تمرین	۱۷۶
	تمرینهای اصلی	۱۸۶
	پروژه	۱۸۸
۶	کشف هندسه نااقلیدسی	۱۹۰
	یانوش بویویی	۱۹۰
	گاوس	۱۹۳
	لِباچفسکی	۱۹۶
	بسطهای بعدی	۱۹۸

۱۹۹	هندسه هذلولوی
۲۰۱	مجموع زوایا (دوباره)
۲۰۲	مثلثهای متشابه
۲۰۳	موازیهایی که عمود مشترک می‌پذیرند
۲۰۷	نیم خطهای موازی حادی
۲۱۰	طبقه‌بندی موازیها
۲۱۲	دنیای تازه شگفت‌انگیز
۲۱۳	خودآزمایی
۲۱۵	تمرین
۲۲۲	تمرینهای اصلی
۲۳۵	بروزه
۲۳۷	۷ استقلال اصل توازی
۲۳۷	سازگاری هندسه هذلولوی
۲۴۱	مدل بلترامی-کلاین
۲۴۵	مدلهای یوانکاره
۲۵۱	تعامد در مدل بلترامی-کلاین
۲۵۴	یک مدل از صفحه هذلولوی در فیزیک
۲۵۶	انعکاس نسبت به دایره
۲۷۱	ماهیت تصویری مدل بلترامی-کلاین
۲۸۳	خودآزمایی
۲۸۵	تمرینهای ک
۲۹۳	تمرینهای پ
۳۰۱	تمرینهای ت
۳۰۵	۸ استازمهای فلسفی
۳۰۵	هندسه فضای فیزیکی چیست؟
۳۰۸	ریاضیات از چه سخن می‌گوید؟
۳۱۰	آرای مختلف درباره مبانی ریاضیات
۳۱۴	اشفتگی
۳۱۶	خودآزمایی

۳۱۷	چند موضوع برای تهیه مقاله
۳۲۴	۹ تبدیلهای هندسی
۳۲۴	برنامه‌ای اِرلاتنگرِ کلاین
۳۲۶	گروه
۳۲۹	کاربرد تبدیل در مسائل هندسی
۳۳۵	حرکت و تشابه
۳۳۸	قرینه‌یابی
۳۴۱	دوران
۳۴۴	انتقال
۳۴۷	نیم‌دور
۳۴۹	نقاط آرمانی در صفحه هذلولوی
۳۵۱	تغییر مکانهای موازی
۳۵۳	لغزه
۳۵۴	طبقه‌بندی حرکات
۳۵۷	خودریختی‌های مدل دکارتی
۳۶۳	حرکت در مدل یوانکاره
۳۷۲	بیان قابلیت انطباق با استفاده از حرکت
۳۷۷	تقارن
۳۸۴	خودآزمایی
۳۸۷	تمرین
۴۰۳	۱۰ قضایای دیگر در هندسه هذلولوی
۴۰۴	مساحت و کاستی
۴۰۸	زاویه توازی
۴۰۹	دایره
۴۱۲	شبه‌کره
۴۱۵	مثلثات هذلولوی
۴۲۴	محیط و مساحت دایره
۴۲۷	چهارضلعی‌های ساکری و لامبرت
۴۳۵	مختصات در صفحه هذلولوی

صفحه	عنوان
۴۴۰	دایره محیطی مثلث
۴۴۵	خودآزمایی
۴۴۶	تمرین
۴۵۷	پیوست الف: هندسه بیضوی و ریمانی
۴۷۳	پیوست ب: هندسه بدون پیوستگی
۴۸۰	منابعی برای مطالعه بیشتر
۴۸۲	کتاب‌شناسی
۴۸۸	فهرست بلدانشها
۴۹۱	فهرست نمادها
۴۹۳	نمایه نامها
۴۹۷	نمایه موضوعی

پیشگفتار مترجم

نهمین چاپ ترجمه اول «هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی» نزدیک به اتمام بود که ویرایش جدید آن به دست مترجم رسید. مترجم پس از مطالعه دریافت که تفاوت ماهوی زیادی بین این ویرایش و ویرایش قبلی وجود دارد، لذا در بخش آمد که خوانندگان این کتاب را با مطالب ویرایش جدید آگاه نمایند. این بود که دست به ترجمه مجدد این کتاب زد، به این امید که باشد خوانندگان عزیز از مطالعه آن به اندازه مترجم بهره گیرند. در این پیشگفتار مترجم لازم دید که قسمتی از مقدمه‌ای را که در ابتدای ترجمه اول آورده بود مجدداً بازگو کند تا خوانندگان به علت انتخاب بعضی از واژه‌های احیاناً نامأنوس از سوی مترجم پی ببرند. اینک قسمتی از آن مقدمه:

... مترجم باید اعتراف کند که ترجمه این کتاب به دلیل وجود بسیاری از واژه‌های تازه، امری بسی دشوار بوده است. لذا خواننده باید انتظار داشته باشد که با واژه‌هایی احیاناً نامأنوس برخورد نماید. با اینکه مترجم کوشش زیادی کرده است تا واژه‌هایی را که برمی‌گزیند (یا می‌سازد) به قدر کافی ساده و رسا باشند، تردید دارد که در این امر توفیق یافته باشد. به عنوان مثال، نخستین مشکلی که مترجم با آن مواجه شده انتخاب واژه‌ای مناسب برای کلمه کنگروانش (congruence) — به معنی هندسی آن — بوده است. توضیحاً باید اشاره کنم که معنی تساوی در جبر با معنی آن در هندسه کاملاً متفاوت است. در جبر، وقتی می‌نویسیم $x = y$ ، منظور این است که x همان y است و یا x نامی است برای عدد y . لیکن در هندسه چنین نیست. وقتی می‌نویسیم «در مثلث ABC ، $AB = AC$ » منظور یکی بودن ساقهای AB و AC نیست، بلکه منظور این است که این دو ساق از لحاظ طول با هم برابرند، یعنی می‌توان آن دو را چنان برهم نهاد که تمام نقاط یکی بر دیگری قرار گیرد. اقلیدس واژه تساوی (و نماد آن $=$) را به معنی اخیر آن نیز به کار برده و در اثبات قضایای مربوطه از این برهنه‌ی استفاده کرده است. از این رو هندسه‌دانان برای جلوگیری از اشتباه، همواره سعی داشته‌اند از به کار بردن کلمه تساوی در هندسه اجتناب، و به جای آن از

واژه کنگروانس استفاده کنند. واژه همنهشتی که تاکنون برای ترجمه کنگروانس به کار می رفته فقط در جبر مناسب است. بدیهی است که این معنی نمی توانسته در اینجا وافی به مقصود باشد، زیرا همنهشتی (چنانکه از ترکیب کلمه پیداست) به معنی نوعی تساوی جبری است، در حالی که می بایست واژه ای پیدا کرد که دقیقاً به معنی خود تساوی باشد.

بحثهای مفصل با اهل فن برای یافتن واژه مناسب و خوش آهنگی که بتواند جایگزین این «تساوی» در زبان فارسی شود به نتیجه ای نرسید. لذا مترجم موقتاً (تا زمانی که واژه رسایی پیدا نشده) واژه قابلیت انطباق با را برای این منظور برگزیده و در همه جا به کار برده است. در واقع مراد از واژه قابلیت انطباق با در این کتاب دقیقاً همان تساوی هندسی است، و هر زمان که خواننده با این واژه مواجه می شود باید در ذهن خود تساوی هندسی را مجسم سازد.

واژه دیگری که در این ترجمه کاراً به کار برده شده واژه بُنداشت به جای واژه آکسیوم (axiom) — البته نه به معنای اقلیدسی آن — است که از ساخته های فرهنگستان زبان است. همان گونه که می دانیم، اقلیدس گزاره هایی را که بدون دلیل می پذیرد به دو دسته پستولاه (postulates) یا اصول موضوعه (که حقایق هندسی هستند)، و آکسیوم ها یا علوم متعارفه (بدیهیات اولیه) — که حقایق کلی هستند — تقسیم می کند. ولی امروزه که این تقسیم بندی از میان رفته است، دیگر چیزی به نام علوم متعارفه وجود ندارد و آکسیوم و پستولا هر دو، به یک معنی اصل موضوع به کار برده می شوند. چون مؤلف هر دو این واژه ها را به دفعات زیاد به یک معنی به کار برده است، مترجم اصل موضوع (یا بعضی اوقات اصل) را به جای پستولا و بُنداشت را به جای آکسیوم به کار برده تا نشان دهد که مؤلف کدام واژه را در چه مقامی به کار برده است.

نکته دیگری که مورد توجه مترجم بوده رعایت سبک مؤلف در به کار بردن بعضی نمادهاست. مؤلف نماد $\triangle ABC$ را برای مثلث ABC ، نماد $\square ABCD$ را برای چهارضلعی $ABCD$ ، و نماد $\angle ABC$ را برای زاویه ABC انتخاب کرده است. ولی در بیشتر موارد نیز می نویسد: مثلث $\triangle ABC$ و چهارضلعی $\square ABCD$ ، و زاویه $\angle ABC$ ، که در واقع، اگر صحیح بخوانیم، باید اولی را مثلث مثلث ABC و دومی را چهارضلعی چهارضلعی $ABCD$ و بالاخره سومی را زاویه زاویه ABC بخوانیم که نادرستی آنها حاجت به بیان نیست. اما با شناختی که مترجم از مؤلف و آثار دیگر او داشته چنین انگاشته است که خود مؤلف واقف به این مطلب بوده و این نمادها را همراه با لفظ آنها، آگاهانه و صرفاً به منظور تأکید و جلوگیری از اشتباه احتمالی مورد استفاده قرار داده است. مترجم با اینکه این نحوه بیان را نمی پسندیده، از همین روش پیروی کرده و در پاره ای موارد از این نمادها همراه با نام آنها استفاده کرده و مثلاً نوشته است مثلث $\triangle ABC$ و ...

دیباچه

در این کتاب هندسه نااقلیدسی و تنظیم مجدد مبانی هندسه اقلیدسی پس از آن، به صورت داستانی، پرماجرا و دلکش عرضه می‌شود. این راز که چرا اصل توازی اقلیدسی را نمی‌توانستند ثابت کنند، در طی ۲۰۰۰ سال در پرده ابهام مانده بود تا اینکه هندسه نااقلیدسی کشف و مدل‌های اقلیدسی آن عدم امکان چنین اثباتی را آشکار ساختند. این کشف مفهوم سنتی هندسه را به عنوان توصیفی صحیح از فضای فیزیکی در هم ریخت. بیش از همه، تحت تأثیر مبانی هندسه^۱ داویت هیلبرت، اندیشه جدیدی پدید آمد که در آن وجود هندسه‌های یکسان سازگار بسیاری مورد قبول واقع شد، و هر کدام یک نظام منطقی صوری محض بود که می‌توانست برای مدل‌سازی واقعیت فیزیکی سودمند باشد یا نباشد. آلبرت اینشتین می‌گوید که بدون این اندیشه جدید هندسه، نمی‌توانسته است نظریه نسبیت خود را ارائه دهد. (اینشتین، ۱۹۲۱، فصل ۱). هیلبری یانتم، فیلسوف معروف، می‌گوید «واژگونی هندسه اقلیدسی مهمترین رویداد در تاریخ علم از نظر یک معرفت‌شناس است» (۱۹۹۷، ص. x). در فصل ۸ این کتاب، درباره سردرگمی فلسفی موجود تا آن زمان بحث می‌شود. کتاب حاضر برای چند گروه از دانشجویان مفید است. برای معلمان هندسه دبیرستانها و دانشکده‌ها مبانی هندسه اقلیدسی و مقدمه‌ای از هندسه هذلولوی (با اتکا به مدل‌های اقلیدسی آن) به روشی دقیق ارائه شده است. برای دانشجویان رشته‌های علوم نظری تاریخ و استلزامهای فلسفی کشف هندسه نااقلیدسی ذکر شده است (به عنوان مثال، تدریس این کتاب در دانشگاه کلگیت به عنوان جزئی از یک درس در انقلابهای علمی، موفق از آب در آمده است)، برای دانشجویان رشته ریاضی، علاوه بر آموزش مشروح هندسه تبدیلی و مثلثات هذلولوی، تمرینهای چالش برانگیز، که با کمال تأسف، بیشتر متنهای درسی ریاضی فاقد آنها هستند، با یک دید تاریخی آورده شده است.

بسط هندسه نااقلیدسی را به منظور زنده کردن مطالعه هندسه اقلیدسی انجام داده‌ام. معتقدم که این نحوه عمل، یک کتاب سنتی هندسه اقلیدسی دانشگاهی را جالبتر می‌سازد. برای مشخص کردن نقایص تلاشهایی که در اثبات اصل توازی اقلیدسی وجود داشته، مبانی بنیادینی هندسه اقلیدسی را به دقت بررسی کرده‌ام. برای اثبات سازگاری نسبی هندسه هذلولوی، ویژگیهای تبدیل در دوائر اقلیدسی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برای توجیه درستی رسم نیم‌خطهای موازی حدی مورد نظر یا نوتش بویویی از هندسه تصویری (نسبتهای ناهمساز، چهاره‌های توافقی، و ویژگیهای نگاشت منظری) استفاده شده است.

به جای اصول خط‌کش و نقاله معمولی متداول در هندسه دبیرستانی، صورتهای اصلاح‌شده بنیادینهای هیلبرت برای هندسه اقلیدسی را به کار برده‌ام. کلیه احکام مربوط به خط‌کش و نقاله در قضیه ۳.۴، فصل ۴، گنجانده شده‌اند، و از آن به بعد اندازه‌گیری پاره‌خطها و زوایا را می‌توان به روش معمولی انجام داد. در این صورت، این تغییر در عمل کمتر از آنچه در اصل است خود را نشان می‌دهد. در اینجا اصل بر این گذاشته شده است که در یک عرضه تاریخی دقیق برخاسته از مبانی هندسه، مفاهیم هندسه محض از مفاهیم عددی جدا شوند و یادآوری شود که دستگاههای عددی محض را می‌توان دوباره با استفاده از هندسه بنا کرد.

دستگاه عددی که بدین‌گونه ساخته می‌شود، ممکن است، در صورت حذف بنیادین ددکیند، با دستگاههای اعداد حقیقی تفاوت داشته باشد، ولی در عوض راه را برای هندسه‌های جدید مذکور در پیوست ب هموار می‌سازد. در واقع از براهین پیوستگی فقط در چند جا در این کتاب استفاده شده است، و برای همه، جز یکی از آنها، فرضیه‌های مقدماتی‌تر (نظیر اصل پیوستگی مقدماتی، یا اصل پیوستگی دایره، یا بنیادین ارشمیدس) کافی بوده‌اند. بنیادین ددکیند در اینجا تنها برای اثبات وجود نیم‌خطهای موازی حدی در هندسه هذلولوی (قضیه ۶.۶، فصل ۶) به کار رفته است. تحقیقات جدید من نشان داده‌اند که حتی در اینجا، اصل پیوستگی مقدماتی و بنیادین ارشمیدس کافی هستند (ولی برهان آن دشوار است). البته این بنیادین برای به دست آوردن یک دستگاه بنیادینی که جزمی باشد ضروری است، ولی بقیه بنیادینهای شبه هیلبرتی به روح هندسه اقلیدسی نزدیک‌ترند، به طوری که دانش‌آموزان تیزهوش دبیرستانی و افراد تحصیل‌کرده معمولی می‌توانند این کتاب را بهتر بفهمند.

جنبه منحصر به فرد این کتاب این است که بعضی قضایای تازه در تمرینات آورده شده‌اند، و سپس فصلهای بعد بر آنها بنا شده‌اند. تجربه تدریس من از ویراستهای قبلی این کتاب مرا متقاعد کرده است که این روش برای درک عمیق دانشجویان بسیار مفید است (دانشجویان نه تنها با انجام دادن آن را فرا می‌گیرند بلکه از نتایج جدیدی که خود به دست می‌آورند لذت می‌برند).

اگر دانشجویان تعداد کافی از تمرینات هر فصل را حل نکنند، در دنبال کردن فصلهای بعد دچار مشکل می‌شوند. در شش فصل اول دو مجموعه تمرین وجود دارد. تمرینهای «اصلی» که چالش‌برانگیزترین تمرینات هستند و همه دانشجویان باید درباره آنها فکر کنند، ولی احتمال اینکه دانشجویان رشته کارشناسی ریاضی آنها را حل کنند بیشتر است. این وجه تمایز در چهار فصل آخر حذف شده است. بیشتر تمرینهای فصلهای ۷ و ۹ و ۱۰ تمرینهای «اصلی» هستند، درحالی‌که تمرینهای فصل ۸ برای یک متن ریاضی، غیر عادی به نظر می‌رسند و محتوای تاریخی و فلسفی دارند. برای بیشتر تمرینها راهنمایی‌هایی ارائه شده است و در ضمن یک حل‌المسائل برای معلمان تهیه و در دسترس قرار داده شده است. در انتهای هر یک از شش فصل اول پروژه‌هایی نیز برای تحقیقات بیشتر کتابخانه‌ای گنجانده شده است.

افزوده‌های مهم در این ویرایش سوم به قرار زیرند. فصل اول اکنون شامل بخش هشدار در باب خطر نمودارهاست، ولی بخش جدیدی نیز درباره نیروی نمودارها در شناخت هندسی به همراه دارد، چنان‌که این مطلب با دربره‌ای از قضیه فیثاغورس نشان داده شده است. در فصل ۲، (منطق و هندسه وقوع)، بخش کوتاهی درباره صفحات تصویری و آفین اضافه کرده‌ام. همان‌گونه که از تمرین «اصلی» ۱۳، فصل ۶، و نیز دو بخش تمرینهای «ک» در فصل ۷ می‌توان دید، هندسه تصویری گذشته از جاذبیت ذاتی، برای درک بعضی از ویژگیهای هندسه هذلولوی ضروری است. در فصل ۳، بخش مربوط به بنداشتهای پیوستگی به‌صورت جدیدی نوشته شده است، بعضی از تمرینهای «اصلی» در چاپهای قبل، که حل آنها برای دانشجویان دشوار بوده است، حالا در همان بخش حل شده‌اند، و نیز، بنداشت ارسطو را به آن بخش افزوده‌ام، که جایگزین بنداشت ارسطیدس برای کسی است که می‌خواهد بی‌نهایت کوچکی را در هندسه وارد کند در فصل ۴، تمرینهای تازه زیادی را برای درک عمیقتر دانشجویان افزوده‌ام.

فصل ۵ (تاریخچه اصل توازی) با توجه به دریافتهای جدید تاریخی مقتضی از مقاله‌های جدید جرمی گری (۱۹۸۹)، ب. ا. روزنفلد (۱۹۸۸)، و روبرتو تورتی (۱۹۷۸) (کتاب‌شناسی)، بیش از همه دستخوش تغییر شده است. بنداشت کلرو بررسی شده است. تلاشهای زیاد لراندار برای اثبات اصل توازی بررسی شده است. نظرهای اجمالی ولی جالب لامبرت و تاورینوس درباره امکان وجود هندسه‌ای بر «کره‌ای یا شعاع موهومی» مورد تأکید قرار گرفته، و در یک بخش جدید از فصل ۷ (مدلی از صفحه هذلولوی از فیزیک) و نیز در فصل ۱۰ (مختصات و ایرستراس) اثبات شده است. بخش تاریخچه فصل ۶ افزایش پیدا کرده است. در فصلهای ۵، ۶ و ۷، نیز تمرینات جدیدی آورده شده است. فصل ۸ (استلزامهای فلسفی) تا اندازه‌ای تغییر یافته است، و من از توصیه‌های خوانندگان تشکر می‌کنم، زیرا افرادی که در ریاضیات کار می‌کنند چندان به فلسفه علاقه نشان

نمی‌دهند. در بقیه کتاب تغییرات جزئی صورت گرفته است، به استثنای مبحث مربوط به خمیدگی و ژئودزیکها (راه درست اندیشیدن درباره «خط راست») در پوست الف، که خیلی بیشتر شده است.

اصطلاحات و نمادگذاریها در سرتاسر کتاب استاندارد هستند. به پیروی از پرونیس و جردن (۱۹۶۵)، آن جزء از هندسه اقلیدسی را که مستقل از اصل توازی است، «هندسه نتاری» نامیده‌ام (نام سنتی آن که گمراه‌کننده است «هندسه مطلق» است و چنین می‌نمایاند که هندسه‌های دیگر به آن وابسته‌اند). برای دو نوع توازی که در هندسه هذلولوی وجود دارد نامهای «مجانبی» و «واگرا» را برگزیده‌ام. به نظر من این نامها بر اصطلاحات متعدد گمراه‌کننده‌ای که در کتابها به کار رفته‌اند برتری قاطعی دارند. قضیه‌ها و شکلها برحسب فصل شماره‌گذاری شده‌اند. مثلاً قضیه ۱.۴، قضیه ۱ از فصل ۴ است. اشاراتی از قبیل «کاکستر (۱۹۶۸)» ارجاعی است به کتاب‌شناسی آخر کتاب (کتاب‌شناسی به جای اینکه به ترتیب الفبایی مرتب شده باشد، برحسب موضوع مرتب شده است).

اینک چند توصیه برای برنامه دروس مختلف:

۱. یک درس یک ترمی برای معلمان هندسه آینده و/یا دانشجویانی که رشته اصلی آنها ریاضیات است ولی استعداد متوسطی دارند. فصلهای ۱-۶ و چهار بخش اول فصل ۷ را تدریس کنید، و اگر وقت داشتید فصل ۸ را اضافه کنید در تعیین تمرینها، تمرینهای «اصلی» (شاید به استثنای تمرینهای اصلی فصل ۱)، بخش اعظم تمرینهای مربوط به میان‌بود از فصل ۳، تمرینهای ۲۱-۳۱ از فصل ۴، و بالاخره تمرینهای ۱۳-۲۶ از فصل ۵ را حذف کنید و فقط خودآزمایی و تمرینهای ک-۱ (ک منظور مدل کلین است)، ک-۲، ک-۳، ک-۵، ک-۱۱، ک-۱۲، ک-۱۷، و ک-۱۸ از فصل ۷ را تعیین کنید.

۲. یک درس یک ترمی برای معلمان هندسه آینده و/یا انانی که ریاضیات رشته اصلی آنهاست و بهتر از دانشجویان با استعداد متوسط هستند. قضیه فصل ۷ و بسیاری از تمرینهای را که در (۱) حذف کرده‌اید به برنامه (۱) اضافه کنید.

۳. یک درس یک ترمی برای آموزش عمومی و/یا دانشجویان علوم مقدماتی. محور اصلی این درس فصلهای ۱، ۲، ۵، و سه بخش اول فصلهای ۶ و ۷ و همه فصل ۸ خواهد بود. به علاوه معلم باید مواد فصلهای ۳ تا ۶ (نظیر بنداشتهای هیلبرت، قضیه ساگری-لژاندر، و برخی از قضایای هندسه هذلولوی) را به طور انتخابی مورد بحث قرار دهد، ولی نباید براهین خیلی زیاد از این دانشجویان بخواهد. مطالب آسان فصل ۸، به ویژه برای چنین درسی خیلی مناسب است.

۴. یک درس دو ترمی برای دانشجویانی که رشته آنها ریاضیات است. اگر وقت دارید تمام کتاب را تدریس کنید.

از این رو این کتاب منبعی است برای طیف وسیعی از دانشجویان از ضعیف گرفته تا قوی، از غیر ریاضی‌خوانان ولی تحصیل‌کرده‌ها گرفته تا نابغه‌های ریاضی.

مرحوم بیشاپ، اسقف معروف، وقتی که به تدریس یک درس مقدماتی در منطق مشغول بود، به ماهیت چون و چرادر منطق کلاسیک پی‌برد و کتابی مؤثر در تحلیل ریاضی نوشت. کتاب خود من، از یک درس مقدماتی در هندسه که در دانشگاه کالیفرنیا، در سانتاکروز در سالهای ۱۹۷۰ تدریس می‌کردم، وقتی که محیط دانشگاه از یک آرمانگرایی شادی‌بخش و تجربه‌آکنده بود نشأت گرفته است. آه چه روزهای خوب فراموش نشدنی بود، دوست من! (متأسفانه محیط دانشگاهی امروز حال و هوای آن روزهای خود را از دست داده است — جز چند چراغ روشنی‌بخش نظیر دوستان من رالف ابراهام، دوراندیش و پدیدآورنده سری کتابهای عالی در ریاضیات بصری و بررسی چندشاخه‌ای خائوس، الهه عشق و زمین؛ و شیمیدان نوآور و مبتکر، فرانک اندروز، معلم خلاق حل مسائل و مؤلف «هم و تمرین دوست داشتن»^۱، کس دیگری نمانده است.) خوشحالم از اینکه ویراستهای پیشین این کتاب، با ترکیبی استثنایی از دقت و تاریخچه، با استقبال گرم خوانندگان مواجه شده است. این امر از یک نیاز واقعی برای «تلطیف» متنها و درسهای ریاضی حکایت دارد. به عنوان مثال، اخیراً که در یک کلاس پردازشجو درس حسابان می‌دادم، شگفت‌زده شدم وقتی دیدم دانشجویان (به‌ویژه دانشجویان غیرریاضی) پس از تحقیق و نوشتن مقاله در تاریخ حسابان (عده زیادی مجذوب شخصیت نیوتن شده بودند)، در میزان ارتباط حسابان با رشته خود، و درباره ترس خود از این موضوع وحشت‌آور، چه اندازه به هیجان آمده بودند. این‌گونه مقالات تمرین خوبی برای پیشرفت مهارتهای نویسندگی نیز هستند که بسیاری از دانشجویان به آن نیازمندند. معلمان می‌توانند مقالاتی از پروژه‌های انتهای فصلهای ۱ تا ۶ و مباحث فصل ۸ را برای آنان تعیین کنند.

تاریخ کشف هندسه ناقلیدسی یک مطالعه موردی ارزنده و در دسترس درباره مشکل بزرگ ما آدمیان در پرداختن به فرضیه‌های ریشه‌دار و پذیرش مدل‌های جدید است. مشاهده اشتباهات افراد خیلی کارداران هنگام رویارویی با پیشامدهای ناآشنای جدیدی که خودشان یا فرهنگ آنان آنها را نمی‌پذیرفته‌اند به راستی آموزنده و دلنشین است — ساکری در هندسه جدید به جوابی دست می‌یابد ولی آن را نمی‌پذیرد زیرا به نظر او «تهوع‌آور» می‌آمده است؛ لژاندر براهینی استادانه ولی غلط، یکی پس از دیگری از اصل توازی اقلیدس ارائه داده است؛ لامبرت به یک هندسه ممکن «برکراهی به شعاع موهومی» می‌اندیشیده است؛ فارکاش بویویی برهان نادرستی از اصل توازی اقلیدس منتشر می‌کند پس از اینکه پسرش قبلاً یک هندسه ناقلیدسی را منتشر کرده بود؛ گاوس،

نگران از انتشار کشفیاتش نمی‌دانسته که رویه‌های با خمیدگی منفی ثابت او ابزاری برای اثبات سازگاری هندسه ناقلیدسی فراهم کرده است؛ یا چارلز داجسن (با نام مستعار لوئیس کارول) از اقلیدس در مقابل «رقیب تازه‌اش» دفاع می‌کرده است. نکته الهام‌بخش این است که ما شاهد موردی بودیم که یانوش بویوی و لباچسکی این ایده جدید را قبل از آنکه فرهنگ محیط آن را درک کند عرضه کردند، و جای بسی تأسف است که می‌بینیم آنان در دوران حیات خود چقدر کم مورد تحسین قرار گرفتند.

رئیس ارهارت، پایه‌گذار «مؤسسه تربیتی مشورتی ارهارت»^۱، که نزدیک به یک میلیون نفر از تعلیمات او بهره برده‌اند، پیام غیرتخصصی این کتاب را دریافت و مکاتبه بویوی با پدرش در فصلهای ۵ تا ۶ را در حضور هزاران تن از طرفداران این مؤسسه در سان‌فرانسیسکو برای حاضران قرائت کرد. خوشحالم که بدین وسیله سپاس و قدردانی خود را به او و دانشجویانم در سانتاکروز ابراز می‌دارم که با شور و شوق خودشان برای توجه به این درس به من روحیه بخشیده‌اند (به‌ویژه از رابرت کورتیس که متعاقباً مقاله‌ای در مجله هندسه^۲ درباره ساختمانهای هندسه هذلولوی منتشر کرده است سپاسگزارم). توصیه‌های خوانندگان در طی سالهای گذشته نیز کمک مؤثری در بهبود این کتاب کرده است که ضمن تشکر از آنان، آنها را به کار بسته‌ام. همچنین از دوستان عزیزم در شرکت فری‌من، از جمله جان استایر ففید، تشکر می‌نمایم که بدون ارائه ابتکارات آنان، این کتاب فراهم نمی‌آمد.

ماروین ج. گرینبرگ

سان‌فرانسیسکو، کالیفرنیا

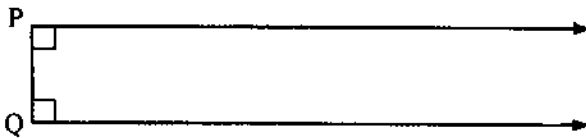
مقدمه

کسی که هندسه نمی‌داند از این در داخل نشود.
کتیبه سردر ورودی آکادمی افلاطون

بیشتر مردم نمی‌دانند که در حدود یک سده و نیم پیش انقلابی در زمینه هندسه روی داد که از لحاظ علمی به عمق انقلاب کپرنیکی در نجوم، و از جنبه نتایج فلسفی به اهمیت نظریه تکامل داروین بود. کاکستر هندسه‌دان کانادایی می‌نویسد: «تأثیر کشف هندسه هذلولوی در تصویری که از حقیقت و واقعیت داریم آنچنان عمیق بوده است که به دشواری می‌توانیم تصور کنیم که امکان وجود هندسه‌ای غیر از هندسه اقلیدسی تا چه اندازه در سال ۱۸۲۰ تکان‌دهنده جلوه کرده است.» اما همه ما امروزه نام هندسه فضا-زمان را در نظریه نسبیت اینشتین شنیده‌ایم. «در واقع، هندسه پیوستار فضا-زمان به حدی به هندسه‌های نااقلیدسی وابسته است که قدری آگاهی از این هندسه‌ها شرط لازم برای درک کامل جهان‌شناسی نسبیتی است.»

هندسه اقلیدسی، هندسه‌ای که شما در دبیرستان خوانده‌اید، هندسه‌ای است که بیشتر برای تجسم جهان فیزیکی به کار می‌بریم. این هندسه از کتابی به نام اصول به دست ما رسیده که اقلیدس، ریاضیدان یونانی، در حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد مسیح نگاشته است. تصویری که ما بر اساس این هندسه از جهان فیزیکی پیدا کرده‌ایم تا حد زیادی توسط آیزاک نیوتن در اواخر سده هفدهم ترسیم شده است.

هندسه‌هایی که اقلیدسی نیستند از مطالعه عمیق‌تر اصل تواری پیدا شده‌اند. دو نیم‌خط موازی عمود بر پاره خط PQ در نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:



در هندسه اقلیدسی، هنگامی که به سمت راست حرکت می‌کنیم، فاصله بین این دو نیم‌خط همواره مساوی با فاصله P تا Q باقی می‌ماند. با وجود این در اوایل سده نوزدهم دو هندسه دیگر مطرح شد. یکی هندسه هذلولوی (از کلمه، یونانی هایپر بالین^۱ به معنی «افزایش یافتن») که در آن فاصله میان نیم‌خطها افزایش می‌یابد، و دیگری هندسه بیضوی (از کلمه یونانی الیپس^۲ «کوتاه شدن») که در آن این فاصله رفته‌رفته کم می‌شود و سرانجام نیم‌خطها همدیگر را می‌برند. این هندسه‌های ناقلیدسی را بعدها ک. ف. گاوس و گ. ف. ب. ریمان در قالب هندسه‌های کلی‌تری بسط دادند (همین هندسه کلی‌تر است که در نظریه نسبیت عام اینشتین مورد استفاده قرار گرفته است).^۳

در این کتاب ما به هندسه‌های اقلیدسی و هذلولوی خواهیم پرداخت. هندسه هذلولوی تنها به تغییر یکی از بندهای اقلیدس نیاز دارد، و به همان آسانی هندسه دایره‌ستانی قابل درک است. از سوی دیگر، هندسه بیضوی شامل مفهوم توپولوژیک تازه «سوناپذیری» است، زیرا همه نقاط صفحه بیضوی که بر یک خط نیستند در یک طرف آن خط قرار می‌گیرند. از این هندسه نمی‌توان به همان سهولت هندسه اقلیدسی صحبت کرد. بنابراین بحث مختصر درباره هندسه بیضوی را در متن کتاب انجام داده‌ام و در پیوست الف اشارات بیشتری آورده‌ام. (اشتباه نشود! منظور من این نیست که ارزش هندسه بیضوی کمتر از ارزش هندسه هذلولوی است.) فهم هندسه بیضوی مستلزم درک کامل محاسبات دیفرانسیل و انتگرال بوده، و لذا بیرون از ظرفیت این کتاب است (در پیوست الف مختصری راجع به آن بحث شده است).

فصل ۱ با تاریخچه مختصری در باب هندسه در دوران قدیم آغاز می‌شود و به بیان اهمیت بسط روش بندهای توسط یونانیان ادامه می‌یابد. همچنین پنج اصل اقلیدس معرفی و به یکی از تلاشهای لژاندر برای اثبات اصل پنجم پرداخته می‌شود. برای پیدا کردن نقص برهانهای لژاندر (و برهانهای دیگر)، لازم است که مبانی هندسه دوباره دقیقاً مورد بررسی قرار

1. hyperballein 2. ellipsein

۳. نظریه نسبیت خاص اینشتین که برای مطالعه ذرات زیراتمی لازم است، بر اساس هندسه ساده‌تر فضا-زمان که واضح آن ه. مینکوسکی است نهاده شده است. نامهای «هندسه هذلولوی» و «هندسه بیضوی» را ف. کلاین برگزیده است. بعضی از مؤلفان این هندسه‌ها را به ترتیب «هندسه لیاچفسکی» و «هندسه ریمانی» می‌نامند که اصطلاحاتی گمراه‌کننده‌اند.

گیرد. ولی، پیش از آنکه بتوانیم اساساً هندسه‌ای بنا کنیم، باید به بعضی از اصول بنیادی منطق آگاهی داشته باشیم. این اصول در فصل ۲ به‌گونه‌ای غیررسمی دوباره بررسی شده‌اند. در این فصل عناصر متشکله یک برهان دقیق را از نظر می‌گذرانیم و به‌ویژه به روش اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف تکیه می‌کنیم. در فصل ۲ به مفهوم بسیار مهم مدل برای یک دستگاه بنداشت می‌پردازیم که با مدل‌های متناهی برای بنداشتهای وقوع و نیز مدل‌های حقیقی تصویری و آفین تبیین می‌شود.

فصل ۳ را با بحثی از برخی نقایص در نحوه ارائه هندسه توسط اقلیدس آغاز، و این نقایص را با ارائه کامل بنداشتهای داویت هیلبرت (با اندکی تغییر) و نتایج مقدماتی آنها بر طرف کرده‌ایم. ممکن است هنگام اثبات قضایایی که خودبه‌خود بدیهی به نظر می‌رسند بی‌حاصله شوید. اما، اگر بخواهید با اطمینان در فضای ناقلیدسی پیش بروید باید به این کار اساسی تن در دهید.

مطالعه نتایج بنداشتهای هیلبرت، به‌جز اصل توازی را در فصل ۴ ادامه داده‌ایم. موضوع این مطالعه را هندسه نتاری نامیده‌ایم. بعضی از قضیه‌های اقلیدسی (مثل قضیه زاویه بیرونی) را که شما با آنها آشنایی دارید، با روشی غیر از روشهایی که توسط اقلیدس به‌کار رفته‌اند اثبات خواهیم کرد، که این تغییر به علت شکافهای منطقی موجود در برهانهای اقلیدس لازم بوده است. همچنین برخی قضایا را که اقلیدس نمی‌توانست بر آنها واقف باشد (مانند قضیه ساکری-لژاندر) ثابت خواهیم کرد.

با اتکا به پایه‌های محکمی که در فصول مقدم بر فصل ۵ گذاشته شده‌اند، آمادگی خواهیم داشت که در فصل ۵ چند تلاش مهم را که برای اصل توازی صورت گرفته‌اند مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم (در تمرینات مجال خواهید داشت که نقایصی را در نمونه‌های دیگر پیدا کنید). بر اثر این مطالعات، شیوه تفکر اقلیدسی شما چنان متزلزل می‌شود که می‌توانیم در فصل ۶ «دنیای تازه شگفت‌انگیز» را کشف کنیم، دنیایی را که در آن مجموع زوایای مثلثها متفاوت است، مستطیل وجود ندارد، خطوط موازی ممکن است به‌طور مجانبی واگرا یا همگرا باشند. در ضمن این کار، داستان هیجان‌انگیز تاریخی اکتشاف تقریباً همزمان هندسه هذلولوی توسط گاوس، بویوی، و لباچفسکی در اوایل سده نوزدهم را ورق خواهیم زد.

این هندسه با اینکه ناآشناست، به همان سازگاری هندسه اقلیدسی است. این نکته را در فصل ۷، هنگام بررسی سه مدل اقلیدسی که در تجسم هندسه هذلولوی نیز ما را یاری می‌کنند ثابت خواهیم کرد. مدل‌های یوانکاره‌ای این برتری را دارند که در آنها زوایا به روش اقلیدسی اندازه گرفته می‌شوند، برتری مدل بلترامی-کلااین در نمایش خطوط توسط پاره‌خطهای اقلیدسی است. همچنین

در فصل ۷ از مطالبی از هندسه اقلیدسی بحث خواهیم کرد که در کتابهای دبیرستانی ذکری از آنها نشده است.

فصل ۸ به طریقی کلی برخی از استلزامهای فلسفی هندسه‌های نااقلیدسی را دربرمی‌گیرد. این عرضه تعمداً به‌گونه‌ای جدلی صورت گرفته است، و منظور از مباحث مقاله مانند، برانگیختن خواننده و تشویق او به تفکر و مطالعه بیشتر است.

در فصل ۹ شناخت تازه‌ای از هندسه را که توسط روش تبدیل («برنامه ارلانگر» فلیکس کلاین) به دست می‌آوریم عرضه می‌کنیم. همه حرکت‌های صفحات اقلیدسی و هذلولوی را رده‌بندی می‌کنیم، از آنها برای حل مسائل استفاده کرده و آنها را به صورت تحلیلی در مدل‌های دکارتی و یوانکارهای دیکال می‌کنیم، گروه‌های تبدیلاتی را که با بنداشتهای قابل انطباق ما سازگارند مشخص می‌سازیم، و مبحث جذاب تقارن را با تعیین همه گروه‌های متقارن متاهی (که اساساً لئوناردو داوینچی بر آن واقف بوده) معرفی می‌کنیم.

فصل ۱۰ عمدتاً به مثلثات صفحه هذلولوی، با اشاره به نظریه مساحت و رویه‌های با خمیدگی ثابت منفی اختصاص داده شده است. از بین سایر نتایج، مشابه هذلولوی قضیه فیثاغورسی را ثابت می‌کنیم، و برای محیط و مساحت دایره، برای روابط بین مثلث‌های قائم‌الزاویه و چهارضلعی‌های لامبرت، و برای دایره محیطی مثلث دستورهایی به دست می‌آوریم. دستگاه‌های مختصات مختلف قابل استفاده برای هندسه تحلیلی در صفحه هذلولوی را تعریف می‌کنیم. در پیوست الف مطالب بیشتری از هندسه بیضوی که در سراسر کتاب ذکر شده می‌آوریم. سپس هندسه دیفرانسیل را با شرح مختصری از بینش‌های عالی گاوس و ریمان معرفی می‌کنیم.

بسیار حائز اهمیت است که شما تا می‌توانید تمرینات را حل کنید، زیرا نتایج تازه‌ای از حل آنها حاصل می‌شود که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با حل همه تمرینات، ممکن است شما هم به جایی برسید که از هندسه به اندازه من لذت ببرید.

هندسه هذلولوی معمولاً به‌عنوان یک کنج‌کاو تاریخی تلقی می‌شده است. بعضی از دانشجویان که فکر عملی دارند از من می‌پرسند این هندسه به چه درد می‌خورد. به پیروی از تمثیل اقلیدس^۱، می‌توانم به آنها یک سکه بدهم (زیرا غلامی ندارم که این کار را برایم انجام دهد) و بگویم که شما دارید از این راه پول درمی‌آورید. گاهی من از آنها می‌پرسم موسیقی و هنر عالی به چه درد می‌خورند، یا آنها را به موضوعات ۵ و ۸ برای تهیه مقاله در فصل ۸ ارجاع می‌دهم. اگر باز هم سماجت نشان دهند، آنها را به تحقیقات لونه‌بورک درباره قدرت دید در فضای مرنی (فصل ۸)، به مکانیک کلاسیک، به تحقیقات جاری در توپولوژی، به نظریه ارگودیک

۱. تمثیل اقلیدس در صفحه ۱۶ آمده است. م.

و نظریه توابع خودریخت ارجاع می‌دهم (+فصل «منابعی برای مطالعه بیشتر»، ص ۴۸۰). این کتاب و درسی که آن ارائه می‌دهد برای افرادی که اهل عمل هستند فرصتی به دست می‌دهد تا فکر خود را به کار اندازند. همان‌گونه که ژاک آدامار، ریاضیدان بزرگ فرانسوی، می‌گوید «کاربرد عملی زمانی پیدا می‌شود که در جستجوی آن نباشیم و می‌توان گفت که پیشرفت تمدن تماماً بر این اصل استوار است». حتی خیالپروان بی‌دست و پا دوهزار سال برای اثبات اصل توازی اقلیدسی صرف کردند، و اگر این کار را نمی‌کردند، امروزه هیچ فضاییمایی برای کشف کهکشانشما وجود نداشت.