

**Б. М. МАКАРОВ , М. Г. ГОЛУЗИНА  
А. А. ЛОДКИН , А .Н. ПОДКОРЫТОВ**

---

# **ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО ВЕЩЕСТВЕННОМУ АНАЛИЗУ**

**«ЧАСТЬ I»**

**ПЕРЕВОД С РУССКОГО НА ПЕРСИДСКИЙ :**

**М. А. ГЕЙРАТМАНД**



**ИЗДАТЕЛЬСТВО «ШАБАХАНГ»**

**ТЕГЕРАН 2005**

بوريس ميخائيلوويچ ماکاروف ، ماريا گناديیونا گلوژينا ،  
آندري آلکساندروويچ لودکين ، آنا تولى ناوموويچ پودگریتف

---

# منتخب مسائل آنالیز حقیقی

«قسمت اول»

منتخب مسائل آنالیز حقیقی  
بوریس میخائیلوویچ ماکاروف ... [و دیگران] / مترجم محمد علی غیرتمند. - تهران:  
شبه‌هنگ، ۱۳۸۲.  
۲۲۲ ص.

ISBN 964-6127-69-X (ج. ۱)

فهرست نویسی براساس اطلاعات قیفا.  
عنوان اصلی: Izbrannye zadachi po veshchestvennomu analizu  
selected problems in real analysis.

کتاب حاضر ترجمه منتخب مسائل آنالیز حقیقی قسمت اول کتاب اصلی می‌باشد.  
۱. توابع متغیر حقیقی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره. ۲. آنالیز ریاضی -- مسائل، تمرین‌ها  
و غیره. الف. ماکاروف، بوریس میخائیلوویچ، Makarov, Boris Mikhailovich.  
ب. غیرتمند، محمد علی، ۱۳۳۳ - مترجم.

۵۱۵/۸۰۷۶

QAT31/5/م۸

۲۵۹۲۹-۸۲م

محل نگهداری: کتابخانه ملی ایران



انتشارات شبه‌هنگ

## منتخب مسائل آنالیز حقیقی

بوریس میخائیلوویچ ماکاروف و ...

ترجمه: محمد علی غیرتمند

حروف‌نگاری مهدی فواصی

زمره کوهنورد

لینوگرافی صدف

چاپخانه گل‌رنگ یکتا

صحافی پیوند

چاپ اول ۱۳۸۲

شمارگان ۱۵۰۰ جلد

شماره استاندارد بین‌المللی کتاب (شابک) X - ۶۹ - ۶۱۲۷ - ۹۶۴

International Standard Book Number (ISBN) 964 - 6127 - 69 - X

حق چاپ محفوظ است

مرکز پختن: انتشارات گزیده

خیابان انقلاب، خیابان شهدای زاندارمری، پلاک ۲۴۰، طبقه چهارم تلفن ۶۶۹۶۰۶۵۱-۶۶۹۶۰۶۵۱ فاکس ۶۶۹۶۰۶۵۱

## فهرست مطالب

|                 |    |
|-----------------|----|
| پیشگفتار مترجم  | ۹  |
| پیشگفتار مؤلفان | ۱۳ |
| فهرست علائم     | ۱۵ |

### فصل I. مقدمه

|               |    |
|---------------|----|
| §۱. مجموعه ها | ۱۹ |
| §۲. نامساویها | ۲۶ |
| §۳. گنگی      | ۳۴ |

### فصل II. دنباله ها

|                       |    |
|-----------------------|----|
| §۱. محاسبه حدود       | ۳۹ |
| §۲. میانگین دنباله ها | ۴۲ |
| §۳. دنباله های برگشتی | ۴۶ |

### فصل III. توابع

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| §۱. پیوستگی و ناپیوستگی توابع | ۴۹ |
| §۲. توابع نیم پیوسته          | ۵۳ |
| §۳. توابع پیوسته و مشتق پذیر  | ۵۵ |
| §۴. نگاشت های پیوسته          | ۵۹ |
| §۵. معادلات تابعی             | ۶۱ |

## فصل IV. سریها

- §۱. همگرایی ..... ۶۵
- §۲. خواص سریهای عددی مربوط به یکنوایی ..... ۶۶
- §۳. گزاره های مختلف درباره سریها ..... ۷۰
- §۴. محاسبه مجموع سریها ..... ۷۴
- §۵. سریهای تابعی ..... ۷۶
- §۶. سریهای مثلثاتی ..... ۷۹

## فصل V. انتگرال

- §۱. انتگرالهای ناسره توابع یک متغیره ..... ۸۵
- §۲. محاسبه انتگرالهای چندگانه ..... ۸۸

## فصل VI. رفتار مجانبی

- §۱. رفتار مجانبی انتگرالها ..... ۹۳
- §۲. روش لاپلاس ..... ۹۷
- §۳. رفتار مجانبی مجموع ها ..... ۱۰۲
- §۴. رفتار مجانبی توابع غیرصریح و دنباله های برگشتی ..... ۱۰۹

## فصل VII. توابع (ادامه)

- §۱. تحدب ..... ۱۱۳
- §۲. توابع هموار ..... ۱۲۲
- §۳. چند جمله ایهای برنشتین ..... ۱۲۸
- §۴. توابع و دنباله های تقریباً پریودیک ..... ۱۳۳

## فصل VIII. اندازه و انتگرال لبگ

- §۱. اندازه لبگ ..... ۱۴۱
- §۲. توابع اندازه پذیر ..... ۱۴۵
- §۳. توابع جمع پذیر ..... ۱۴۸
- §۴. انتگرال استیلیس ..... ۱۵۸
- §۵. ε - آنتروپی و اندازه هاسدورف ..... ۱۶۰
- §۶. رفتار مجانبی انتگرال های مکرر با چند گانگی زیاد ..... ۱۶۷

## فصل IX. دنباله های توابع اندازه پذیر

- §۱. همگرایی در اندازه و تقریباً همه جا ..... ۱۷۵
- §۲. همگرایی در میانگین و قانون اعداد بزرگ ..... ۱۷۹
- §۳. توابع راده ماخر. نامساوی خینچین ..... ۱۸۴
- §۴. سری و تبدیل فوریه ..... ۱۹۲

## فصل X. تکرارهای تبدیل فاصله

- §۱. دینامیک توپولوژیکی ..... ۱۹۹
- §۲. نگاشت های حافظ اندازه ..... ۲۱۰

## پیشگفتار مترجم

یکی از اهداف اصلی مؤلفان کتاب حاضر مطرح نمودن مسائلی بوده است، که بیشتر آنها حاوی چنان نکاتی باشند، که حل شان نیاز به تفکر، دقت، مهارت، جستجو، حوصله و تلاش پیگیرانه، صرف وقت و آموزشی عمیق از مفاهیم آنالیز ریاضی و روابط منطقی بین این مفاهیم داشته باشد.

این کتاب که متن اصلی آن در سال ۱۹۹۲ میلادی به زبان روسی چاپ و منتشر شده است، و ملاک انتخاب موضوعات آن برنامه دوره آنالیز ریاضی دانشگاه لنین گراد بوده است، در مباحث آنالیز ریاضی ۱ و ۲ و آنالیز حقیقی (تنوری اندازه و انتگرال) حاوی مسائل جالب و آموزنده ای است، که می تواند مورد استفاده دانشجویان سالهای مختلف رشته های علوم و مهندسی و دیگر علاقه مندان به مسائل ریاضی، از جمله، کسانی که می خواهند خود را برای شرکت در المپیادهای ریاضی دانشجویی یا کنکورهای دوره های بعد از لیسانس آماده کنند، قرار گرفته، و به تعمیق دانش ریاضی آنها یاری رساند.

در کشور ما واژه آنالیز حقیقی هم به معنی دروس آنالیز ریاضی ۱ و ۲ به کار گرفته شده است، و هم به عنوان درسی که پایه های آن را تنوری اندازه و انتگرال و فضاهای خطی نرم دار تشکیل می دهد، به همین دلیل، و به دلیل اختلاف سلیقه هایی که در نامگذاری و انتخاب موضوعات آنالیز ریاضی ۱، ۲ و ۳ و آنالیز حقیقی ۱ و ۲، و نحوه ارائه آنها در بین استادان دانشگاه های مختلف کشور ما وجود دارد، نام این کتاب نباید باعث سردرگمی دانشجویان شود. در این رابطه، فهرست مطالب کتاب و مسائل فصل های مختلف آن می تواند راهنمای خوبی برای انتخاب موضوعات مورد علاقه دانشجویان باشد.

تفاوت های کیفی آشکاری که در حال حاضر بین روشهای آموزش ریاضی در کشور ما و بسیاری از کشورهای پیشرفته دنیا وجود دارد، باعث شده است، بسیاری از موضوعات اساسی آنالیز ریاضی که در این کتاب مطرح شده اند و دانستن آنها برای دانشجویان رشته های علوم و مهندسی ضروری است، نه تنها در دوره کارشناسی، بلکه حتی در دوره کارشناسی ارشد دانشگاه های کشور ما نیز تدریس نشوند. به جز مطالب کلاسیک آنالیز ریاضی، بخش عمده مطالبی که دانستن آنها می تواند به عنوان پیش نیاز لازم در حل مسائل این کتاب مفید واقع شود، در کتاب:

درسهائی در تکمیل سرفصل های آنالیز ریاضی

تألیف: ولادیمیر ایوانوویچ سوبولف

ترجمه: محمد علی غیرتمند

مورد بررسی قرار گرفته است.<sup>\*</sup> این کتاب حاصل تصحیح و تکمیل درسهائی بوده است، که توسط ریاضی دان برجسته روسی، استاد سابق دانشگاه ورونژسکی<sup>\*\*</sup>، ولادیمیر ایوانوویچ سوبولف برای دانشجویان سال سوم رشته ریاضی این دانشگاه ارائه شده است، و حاوی

<sup>\*</sup> کتاب فوق در بهار سال ۱۳۸۴ از طرف انتشارات شباهنگ چاپ و منتشر شده است.

<sup>\*\*</sup> دانشگاه ورونژسکی (Воронежский университет) که به زبان فارسی بهتر است آن را دانشگاه ورونژسک بنامیم، دانشگاهی است واقع در شهر ورونژسک روسیه.

موضوعاتی است که بخوبی می‌تواند مورد استفاده دانشجویان کشور ما نیز قرار گیرد. همچنین، مباحثی که به تئوری انتگرال و اندازه مربوط می‌شود، به شکلی عمیق‌تر و گسترده‌تر از کتاب ولادیمیر ایوانوویچ سویولف در کتاب:

دوره مختصر تئوری توابع با متغیر حقیقی

تألیف: بوریس زاخارویچ وولیک

ترجمه: محمدعلی غیرتمند

مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.<sup>\*</sup> مؤلف این کتاب ب. ز. وولیک، رئیس سابق کرسی آنالیز ریاضی دانشگاه لنین‌گراد، ریاضی‌دانی است، که هم به خاطر تحقیقات اساسی در موضوعات آنالیز تابعی و هم به خاطر روشهای پداگوژیکیش، شهرت جهانی کسب کرده، و از آثارش به عنوان مراجعی مناسب در موضوعات مربوط به آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی استفاده می‌شود.

از زمانی که متن روسی قسمت اول کتاب:

منتخب مسائل آنالیز حقیقی

تألیف: بوریس میخائیلوویچ ماگارف، ماریا گنادیوونا گلوژینا

آندری الکساندروویچ لودکین، آناتولی ناوموویچ پودگرتیف

ترجمه شد، تا زمانی که شرایط و امکاناتی برای چاپ و انتشار آن فراهم گردید، مدت زمانی طولانی طی شد. هزینه بالای چاپ کتابهای علمی - تخصصی در تیراژهای معمول بالای هزار نسخه، و افزایش تصاعدی هزینه تمام شده چاپ و صحافی هر جلد کتاب در تیراژهای پائینی در حدود ۵۰۰ نسخه یا کمتر از آن، و عدم تمایل اکثر ناشران از سرمایه‌گذاری در چاپ و انتشار آن دسته از کتابهای مفید و ارزشمند علمی - تخصصی که در کشور نزدیک به هفتاد میلیون نفری ما، خوانندگان آنها، هم به دلیل مضمون تخصصی این گونه کتابها، و هم به دلیل شیوه‌های نادرست آموزشی در اکثر دانشگاه‌های کشورمان (شیوه‌هایی که کمترین انگیزه‌ای در بخش قابل توجهی از دانشجویان ایجاد نمی‌نماید، که در کنار کتابها و جزوه‌های اغلب ناقص درسی‌شان، به مطالعه کتابهایی بپردازند، که به شکلی عمیق‌تر و گسترده‌تر از جزوه‌های دستنویس‌شان مسائل را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهند)، نه اقشار وسیعی از جامعه، بلکه بخش بسیار کوچکی از دانشجویان و علاقه‌مندان به موضوعات علمی هستند که نیاز به درکی عمیق‌تر از مطالبی دارند که اغلب به صورتهائی سطحی و مبهم در کلاس‌های رسمی درس بیان می‌شوند، مشکلاتی که در تصحیح اشتباهاتی که هم به علت دو مرحله‌ای نمودن تایپ متن فارسی و لاتین کتاب، و هم به علت تغییراتی که در برنامه تایپ آن از وُرد ۹۶ به وُرد ۹۷ بخصوص در رابطه با فرمول‌های ریاضی پیش آمد، محدودیتهای ایجاد شده برای مترجم در رابطه با تصحیح اشتباهات چاپی و غیر چاپی حدود ۱۰۰ نسخه از کتاب حاضر که قبل از غلط‌گیری نهائی و تصحیح اشتباهاتی که در تایپ صورت برخی از مسائل رخ داده بود، به شکل‌های مختلفی تکثیر، و وارد بازار شده بود، روشهای سنتی کهنه و نامناسبی که هنوز در رابطه با معرفی و پخش و فروش کتابهای تازه چاپ شده در کشور ما به کار گرفته می‌شوند، و نیز تغییر محل زندگی مترجم، از جمله مسائلی بودند، که باعث شدند، شرایط و امکانات لازم برای چاپ و انتشار این کتاب تا مدهای طولانی فراهم نشود.

<sup>\*</sup> این کتاب احتمالاً در پائیز سال ۱۳۸۴ از طرف انتشارات شهابنگ چاپ و منتشر خواهد شد.

امید است، چاپ و انتشار قسمت اول این مجموعه مسائل بتواند در ارتقاء کیفی سطح آموزش ریاضی در دانشگاه های کشور ما مؤثر واقع شود، و با بهتر شدن وضعیت نامطلوب کنونی چاپ و نشر کتابهای تخصصی در کشورمان، زمینه و امکانات چاپ قسمت دوم آن نیز فراهم آید.

با اینکه کپی متن های تایپ شده ای از کتاب حاضر، قبل از چاپ، به منظور غلط گیری و تصحیح اشتباهات چاپی و غیرچاپی آن در اختیار برخی از استادان و دانشجویان بوده است، و با کمک این دوستان برخی از اشتباهات موجود در اولین نسخه تایپ شده کتاب تصحیح شده است (در اینجا لازم است اشاره شود، که در اولین نسخه تایپ شده کتاب، اشتباهاتی چاپی و غیر چاپی در رابطه با برخی از اسامی و فرمول ها و اصطلاحات ریاضی بوجود آمده بود ( مثلاً در یک مورد به جای « کپلر » به اشتباه نوشته شده بود « اوپلر » و در چند مورد به دلیل شباهت ظاهری به جای واژه « متناهی » به اشتباه از واژه « کراندار » استفاده شده بود و ... ) که سعی شد در متن نهائی آماده چاپ این گونه اشتباهات تصحیح شوند )، و با اینکه سعی شده است، که ترجمه کتاب با حداقل اشتباه و کاستی صورت پذیرد و مفاهیم به شکلی رسا و روشن بیان شوند، و با همه تلاشی که به عمل آمده است، تا کتاب فاقد اشتباه های چاپی باشد، این احتمال نیز هست، که در بیان برخی مطالب و موضوعات نارسائی ها و اشتباهاتی بوجود آمده باشد، در این رابطه، مترجم سپاسگزار همه کسانی خواهد بود که، نظرات، پیشنهادها و انتقادهایشان بتواند باعث کاهش اشکالات موجود در کتاب در چاپ های بعدی شود.

در خانم، لازم می دانم، مراتب قدردانی خود را از آقای مهدی غواصی مدیر شرکت خدمات کامپیوتری معین که به منظور تایپ درست فرمولهای ریاضی، با صرف وقت و با تلاشی پیگیرانه، در کار حروفچینی و صفحه آرایی کتاب حاضر مشارکت نموده اند، خانم زهرا کوهنورد که با دقت و حوصله برخی اشتباهات و اشکالات چاپی موجود در آخرین نسخه تایپ شده کتاب را برطرف نموده اند، آقای شاپور جلوه مشفق که بر امور مربوط به غلط گیری و صفحه آرایی آن نظارت داشته اند، آقای قاسم احمد زاده مدیر انتشارات شباهنگ که مسئولیت چاپ و انتشار کتاب را بعهده گرفته اند، و نیز از کلیه کسانی که هر یک به نحوی در چاپ، صحافی، و پخش آن کوشا بوده اند، ابراز دارم.

محمد علی غیر تمند

تهران - تابستان ۱۳۸۴

## پیشگفتار مؤلفان

این کتاب مسأله قبل از همه برای دانشجویانی در نظر گرفته شده است، که می خواهند معلومات خود را در آنالیز ریاضی عمق بخشند، و نیز برای مدرسین پیشرو سمینارهای درسی و محافل آنالیز ریاضی دانشکده ها. این کتاب در برخی از مسائل دشوار، که در بین آنها یک سری از قضایای مشهور آنالیز وجود دارد، با کتابهای معمولی مسأله تفاوت دارد، با وجود این، برای حل مسائل فصلهای I-VII و §1 فصل X آماده سازی خاصی لازم نیست و بخش قابل ملاحظه ای از مسائل برای دانشجویان ترم دوم سال اول مناسب است. همه اطلاعات لازم برای حل این مسائل در کتابهای استاندارد آنالیز ریاضی دانشگاه ها از جمله در کتابهای و.آ. زوریچ [7]، ل.د. کودیایوسف [16]، و.رودین [23]، گ.م. فیختنگولتس [29] وجود دارد. مسائل فصل های VIII و IX و §2 فصل X نیاز به آمادگی بیشتر خواننده دارد و فرض شده است، که خواننده با مفاهیم اساسی تئوری اندازه آشنا است. اطلاعات مربوطه را می توان در آخرین فصل کتاب ذکر شده و.رودین و به شکل کاملتر در کتاب های ان. کلموگوروف، س.و. فومین [14] و ب.ز. وولیک\* [4] یافت.

محتوای هفت فصل اول، که تقریباً شامل دو سوم مسائل است، از چهارچوب موضوعات کلاسیک آنالیز (توابع، مشتق، انتگرال، مجانب) بیرون نمی رود. هم در این فصل ها و هم در فصل های بعدی، ما به سوی حداکثر تعمیم شتابان حرکت نکرده ایم و در مقابل انتخاب لازم بین تعمیم بیشتر یا کمتر فرمول بندی مسأله، اغلب مورد اخیر را ترجیح داده ایم. فصل های VIII-X در کتابهای آنالیز ریاضی کمتر رایج است. به غیر از سلیقه مؤلفان، ملاک انتخاب مواد این فصل ها، برنامه دوره آنالیز ریاضی در دانشگاه لنینگراد بوده است. مسائلی خارج از این چهارچوب، که به تئوری توابع با متغیرهای حقیقی مربوط می شود (با وجود همه آئین و رسوم مشروط این تقسیم)، در این کتاب نیامده است. به این ترتیب، مثلاً، ما از مسائل بسیار جذابی که حل آنها متکی به قضیه لبگ درباره مشتق گیری از انتگرال بر حسب متغیر حد بالائی می شود، استفاده نکرده ایم. در این کتاب، همچنین مسائلی که بازتاب مسائل مربوط به آنالیز مختلط هستند، تقریباً یافت نمی شوند. ما خوانندگان علاقه مند به اینگونه مسائل را به مجموعه گسترده و مشهور گ. پولیا، گ. سگو [21] و به کتاب تیتچمارش [27] ارجاع می دهیم.

ما سعی کرده ایم، مسائلی که به موضوعات یا روشهای مختلف اختصاص یافته اند متحد کنیم. در مجموعه، در حدودی که امکان داشته است، این یا آن حلقه سؤال ها را با تمامیت کافی گام به گام به کار برده ایم. تا حدی به این خاطر ما از

\* مرجع [4] همان اثری از ب.ز. وولیک است، که در پیشگفتار مترجم به آن اشاره شده است.

مسائل نزدیک ولی از نظر درجه دشواری ناهمگون، که جاذبه یک سلسله را می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش دهد، دوری نجسته‌ایم. به این سبب بیشتر مسائل دشوار به مسائل نسبتاً ساده تبدیل شده‌اند و خواننده‌ای که نتواند مسأله‌ای را حل کند، نباید احساس یأس کند و می‌تواند در توفیق برای حل مسائل بعدی کاملاً امیدوار باشد.

در قسمت دوم کتاب حل مختصر ولی اغلب با جزئیات اکثر مسائل بیان شده است، اما، به خواننده توصیه می‌کنیم، که در استفاده از این قسمت کتاب عجله نکند، و شانس ابداع حل هائی بهتر از آنچه که در آنجا آورده شده است از دست ندهد. کتابهای آنالیز، از جمله کتابهای درسی و مجموعه‌های مسائل شامل مواد زیادی است، و ما فکر می‌کنیم، که تنها تعداد کمی از مسائل ارائه شده، می‌توانند ادعای اصل بودن داشته باشند. قبل از هر چیز ما هدف خود را در این دیده ایم، که تلاش کنیم، با طبقه‌بندی و تنظیم مسائل متداول روز به محتوای (بعضی اوقات در شکل غیر صریح) سرچشمه‌های صعب العبور (به خصوص برای دانشجویان) و نیز فولکلور ریاضی وارد شویم. به خواننده مجرب خاطر نشان می‌شود که به طور موازی مواد رایج و سنتی از «آموزش ریاضی»<sup>(۱)</sup>، «ماهنامه ریاضی آمریکا»<sup>(۲)</sup>، مجموعه‌های [19]، [22] و [26]-[24] و [38] و غیره اقتباس شده‌است. فقط در حالات استثنائی به منابع مسائل اشاره شده است.

تصحیح کلی کتاب توسط ب. م. ماکاروف صورت گرفته است. ما تشکر صمیمانه خود را از دوستان و همکارانمان آ.ب. الکساندروف، د.آ. ولادیمیروف، ی. د. گلوسکین، ی.و.گ. دوتکوویچ، و.و.ژوک، ک.پ. کوخاسیو، م.یو.لوبیچ، گ.ای. ناتانسون، آ.و. آسییوف، آ.ای. پلوتکین، آ.ای. رینف، ب.آ. ساموکیش، س.و. خروشچف و دو. یاکوبوویچ به خاطر توصیه‌های ارزنده و نظرات انتقادی‌شان، که به ما کمک زیادی کردند، ابراز می‌داریم، ما همچنین به خاطر مسائل نفیس مدیون آنها هستیم.

در کتاب سیستم شماره گذاری مسائل و منابع به شکل زیر پذیرفته شده است. در داخل یک فصل مسائل با دو عدد شماره گذاری شده‌اند، که اولی شماره پاراگراف و دومی شماره مسأله در پاراگراف را نشان می‌دهد. در ذکر مأخذ مسأله از فصل دیگر ابتدا به شماره فصل (ارقام رومی) اشاره شده است. به عنوان مثال مسأله VII.2.5 به معنی مسأله 2.5 از فصل VII می‌باشد. ما از نظرات و انتقادات همه خوانندگان سپاسگزار خواهیم بود.

مؤلفان