

کاربردهایی از آنالیز تابعی

نویسنده

عادل مروی



انتشارات آریان قلم

سرشناسه : گروهی، عادل، ۱۳۶۴-

عنوان و نام پدیدآور : کاربردهایی از آنالیز تابعی / عادل گروهی.

مشخصات نشر : تهران : آریان قلم، ۱۳۹۲

مشخصات ظاهری : ۱۲۲ ص.

شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۷۳۴۶-۰۶-۸

وضعیت فهرست نویسی : فیبا

موضوع : کتابنامه : ص. ۱۱۵.

نوع : آنالیز تابعی

رده بندی کنگره : ۱۳۹۲ ۵۴۲/۳۲ QA

رده بندی ریکی : ۵۱۵

شماره ثبت کتابخانه ملی : ۳۴۰۹۸۴۲



کاربردهایی از آنالیز تابعی

سر : عادل گروهی

مؤلف : عادل گروهی

ناظر کیفی : نخستین پایگاه مشاوره پژوهشی (نیکان)

ناظر فنی : محمد سعید زین

چاپ متن : چاپ مهارت

صحافی : رئوف

نوبت چاپ : اول

تاریخ انتشار : ۱۳۹۲

تیراژ : ۱۰۰۰

شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۷۳۴۶-۰۶-۸

قیمت : ۱۲۰۰۰۰ ریال

تهران، خیابان انقلاب، خیابان فخر رازی، خیابان شهدای ژاندارمری، پلاک ۶۳ واحد ۲

تلفن : ۰۹۱۲۱۲۰۱۸۶۹-۶۶۶۲۶۶۸۱

سخن مولف.....	۷
چکیده.....	۹
فصل اول: تعریف و قضایای مقدماتی.....	۲۱
فصل دوم: قضیه میسرتون نیومن.....	۳۳
فصل سوم: قضیه ان-ناخ-لاگرانژ و قضیه مینماکس فن (Fan) (یک قضیه مینماکس در فضاهای بینهایت بعدی).....	۴۵
فصل چهارم: قضایای مینماکس عمیق.....	۶۳
فصل پنجم: قضیه دوگانی فنچل در فضای مولفاً مدیه.....	۷۳
فصل ششم: نقاط فنچل - مورثو.....	۸۱
فصل هفتم: قضیه دوگانی فنچل در فضاهای نرم‌دار.....	۸۹
فصل هشتم: مزدوج یک مجموع.....	۱۰۱
فصل نهم: نتیجه فویتی برای وجود ضرایب لاگرانژ.....	۱۱۱
واژه نامه فارسی به انگلیسی.....	۱۲۱
واژه نامه انگلیسی به فارسی.....	۱۲۳
مراجع.....	۱۲۵

سخن مولف

بسمه تعالی

حمد و سپاس بی‌پایان خداوند تبارک و تعالی را است که به انسان علم آموخت و با انزال کتب آسمانی توسط پیامبران خود و به خصوص قرآن کریم توسط خاتم النبیین (ص) راه سعادت را برای نوع بشر مکتوب فرمود. در این کتاب ضمن معرفی اصول و تعاریف، جنبه‌های کاربردی و مباحث مختلف این علم مورد توجه قرار می‌گیرد. ریاضیات، عالی‌ترین دستاورد اندیشه و اصیل‌ترین راه به سوی آدمی است. موسیقی روح را آرامش می‌دهد، نقاشی چشم را می‌نوازد، شعر موجب برانگیختن عاطفه می‌شود، فلسفه ذهن را قانع می‌کند و مهندسی زندگی را بهبود می‌بخشد، ولی ریاضیات دارای مجموعه‌ای از ارزش‌هاست. من نیز به سهم خود قدمی هر چند کوچک در جهت رشد و شکوفایی استعدادهای کم‌نظر فرزندان ایران اسلامی بردارم و حاصل تجربه و آموخته‌های خود را در نگارش این کتاب به گونه‌ای به کار ببریم که در نهایت امر یادگیری و به کارگیری مفاهیم و روش‌های ریاضی برای فراگیر آسان‌تر شود. مجموعه‌ای که پیش روی شماست جایگزین کتاب درسی نیست بلکه کتابی است که در مسیر فهم و یادگیری مفاهیم و موضوعات کتابی درسی و در نهایت ارتقاء و توسعه آن تالیف شده است. باتوجه به اهمیت ویژه‌ی

دانشجویان ریاضی در طول دوران تحصیلی هر دانشجوی هدفمند، مطالعه و بهره‌گیری از کتاب‌هایی که در ابعاد مختلف نیازهای او را بر طرف کند بسیار ضروری به نظر می‌رسد.

فکر نوشتن چنین کتابی را مدیون دانشجویان درس آنالیز گروه ریاضی دانشگاه کرمان در هفت سال گذشته هستم. این دانشجویان با استقبال از این درس مشوق واقعی من بوده‌اند. از همکاران و دوستانم آقایان دکتر وحید مومنائی، حمزه مقبلی به سبب تبادل نظرهای سودمندی که با آنها داشتم صمیمانه سپاسگزارم.

www.ketab.ir

مقدمه

مینیماکس (کمینه بیشینه) یک قانون تصمیم سازی است که در نظریه تصمیم، نظریه بازی ها، آمار و فلسفه برای کمینه کردن (مینیم کردن) ختم، شکست و ضرر در بدترین حالت (بیشترین احتمال ضرر) از آن استفاده می شود. به طور مشابه، کمینه کردن سود کمینه (ماکسمین) را نیز بیشینه کمینه می نامیم. اساساً برای بازی های دو نفره مجموع صفر، در نظریه بازی ها فرمول بندی شده است که هم حرکت های جایگزین (چند انتخابی) بازیکن ها و هم حرکات هم زمان انتخاب کردن بازیکن ها را پوشش می دهد. این مفهوم را می توانیم به بازی های پیچیده تر و تصمیم بازی های غیر قطعی بسط دهیم.

نظریه بازی ها

در نظریه بازی های هم زمان، استراتژی کمینه یک استراتژی مرکب است که قریب به حتمی بازی با مجموعه صفر می باشد. در بازی های مجموعه صفر حل کمینه (مینیماکس) مشابه عادل نش (نام دانشمند) است.

تئوری کمینه بیشینه (مینیماکس)

حالت‌های قضیه مینیماکس (کمینه بیشینه)

برای هر دو نفر، بازی مجموعه صفر با استراتژی‌های متناهی بسیاری وجود دارد، یک مقدار V و استراتژی آمیخته برای هر بازیکن وجود دارد که:

(الف) استراتژی در پیش گرفته شده توسط بازیکن دوم بهترین پرداخت ممکن برای بازیکن ۱، V است.

(ب) برای استراتژی در پیش گرفته شده توسط بازیکن اول بهترین پرداخت ممکن برای بازیکن ۲، $-V$ است. معادلا استراتژی انحصاری برای یک سودمندی (پرداخت V) بدون در نظر گرفتن استراتژی بازیکن دوم تضمین می‌کند. بطور مشابه بازیکن ۲ می‌تواند سودمندی $-V$ را برای خودش تضمین کند.

نام مینیماکس از جایی می‌آید که هر بازیکن سعی در کمینه کردن پرداخت محتمل برای طرف مقابل را کمینه کند. چون بازی مجموعه صفر است او هم‌زمان ماکزیمم ضرر خود را کمینه می‌کند. (برای مثال مقدار کمینه پرداختش را بیشینه می‌کند).

این قضیه اولین بار توسط جان ون نیومن در سال ۱۹۲۸ انتشار یافت، که از او نقل قول شده است: «تا جایی که می‌بینم هیچ قضیه‌ای از بازی‌ها بدون این قضیه نخواهد بود من فکر می‌کردم هیچ قضیه با ارزشی انتشار نیافته تا زمانی که قضیه مینیماکس (کمینه بیشینه) اثبات شد». برای تعمیم می‌توانید قضیه مینیماکس سیون (نام دانشمند) قضیه پارتاساراتی را ببینید. همچنین می‌توانید مثالی از یک بازی بدون متغیر ببینید.

مثال پیش رو بازی مجموعه صفر است که A و B حرکات همزمان انجام می‌دهند و راه حل مینیماکس را نشان می‌دهد. فرض کنید هر بازیکن ۳ انتخاب دارد و ماتریس پرداخت برای A در سمت راست

نمایش داده شد است. ماتریس پرداخت B را هم مانند ماتریس پرداخت A با علامت معکوس در نظر بگیرید. (برای مثال اگر انتخاب بازیکن A ۱ و B ۱ باشد، B باید ۳ تا به A بپردازد.) سپس انتخاب کمینه بیشینه برای A، $2A^*$ است زیرا در بین بدترین‌ها بهترین انتخاب این است که باید ۱ بپردازد. در حالی که انتخاب کمینه بیشینه برای B، $2B^*$ است زیرا در بهترین حالت که کمترین ضرر را می‌کند این است که چیزی نپردازد. با این وجود این راه حل پایدار نیست زیرا اگر B بداند که $2A^*$ را انتخاب می‌کند، پس $2B^*$ را انتخاب می‌کند تا ۱ سود کند. هم چنین اگر A باور داشته باشد که $2B^*$ را انتخاب می‌کند او هم A ۱ را انتخاب می‌کند تا ۳ واحد سود ببرد. اما پس از آن $2B^*$ را انتخاب می‌کند و به همین ترتیب هر بازیکن سختی تصمیم‌گیری را می‌فهمند. به همین دلیل به استراتژی پایدارتری نیاز است.

بعضی انتخاب‌ها توسط دیگر انتخاب‌ها دلبوب می‌شوند و می‌توانند حذف شوند: $3A$ ، A را انتخاب نخواهد کرد. زیرا انتخاب هر کدام از $1A$ و $2A$ نتیجه بهتری خواهد داشت بدون اینکه انتخاب B اهمیت داشته باشد. همچنین $2B^*$ را انتخاب نخواهد کرد زیرا ترکیباتی از $2B$ و $1B$ صرف نظر از اینکه A چه انتخابی دارد، نتیجه بهتری خواهد داشت.

A با انتخاب $1A$ با احتمال $1/6$ و $2A$ با احتمال $5/6$ از پرداخت مورد انتظار بیش از $1/3$ جلوگیری خواهد کرد. پرداخت مورد انتظار برای A، $3 \cdot (1/6) - (5/6) = -1/6$ خواهد بود برای زمانی که $2B^*$ را انتخاب می‌کند و $2 \cdot (1/6) + (5/6) = 2/3$ خواهد بود برای زمانی که $1B^*$ را انتخاب می‌کند. مشابه زمانی که B استراتژی $1B$ را با احتمال $1/3$ و استراتژی $2B$ با احتمال $2/3$ بدون در نظر گرفتن انتخاب A انتخاب می‌کند، می‌تواند مطمئن باشد که حداقل دارای سود مورد انتظار $1/3$ خواهد بود. این استراتژی مرکب پایدار دارد و اثبات شدنی نیست.

بیشینه کمینه (ماکسمین)

متعاقباً در نظریه بازی‌ها کمینه بیشینه (مینیماکس) از بیشینه کمینه (ماکسمین) متمایز است. مینیماکس در بازی‌های مجموعه صفر استفاده می‌شود و مینیم کردن پرداخت ماکسیمم حریف را نشان می‌دهد که در بازی‌های مجموعه صفر معادل با مینیم نمودن ماکزیمم ضرر خودش و ماکسیمم کردن مینیمم سود خودش باشد.

ماکسمین رتبیست که عموماً برای بازی‌های با مجموعه غیر صفر برای توصیف استراتژی که ماکسیمم می‌کند پرداخت مینیمم خودش را استفاده می‌شود. در بازی‌های با مجموع غیر صفر عموماً مشابه مینیمم کردن ماکسیمم سود حریف و مشابه استراتژی تعادل نش نیست.

نظریه بازی‌های ترکیبیاتی

در نظریه بازی‌های ترکیبیاتی الگوریتم می‌تواند مسیری را برای حل‌های بازی وجود دارد. یک نسخه ساده از الگوریتم مینیماکس که در زیر توضیح داده می‌شود بازی‌هایی شبیه تیک تاک توی (بازی شبیه دوز) سرو کار دارد که هر بازیکن می‌تواند ببرد، ببازد یا مساوی کند. اگر بازیکن A در یک حرکت بتواند ببرد این بهترین حرکت او خواهد بود. اگر بازیکن B بماند که حرکت می‌تواند بازی را به موقعیتی ببرد که بازیکن A را در شرایطی قرار دهد که در یک حرکت ببرد، در حالی که حرکتی دیگر می‌تواند بازیکن A را در موقعیتی قرار دهد که در بهترین حالت با B مساوی کند پس بازیکن B حرکت دوم بهترین خواهد بود. به آسانی میشه بهترین حرکت را پیدا کرد. الگوریتم مینیماکس حرکت عقب‌گرد از آخر بازی به پیدا کردن بهترین حرکت کمک می‌کند. در هر مرحله فرض میشه بازیکن A سعی دارد شانس پیروزی خود را ماکزیمم کند در حالی که در نوبت بعدی بازیکن B سعی دارد شانس پیروزی A را مینیمم کند (یعنی بازیکن B شانس پیروزی خودش را ماکسیمم می‌کند).

الگوریتم مینیماکس با حرکت‌های جایگزینی

یک الگوریتم مینیماکس یک الگوریتم بازگشتی برای انتخاب حرکت بعدی در یک بازی Π نفری است که معمولاً بازی‌ها دو نفره است. هر مقدار، به هر موقعیت یا مکان از بازی وابسته است. این مقدار بوسیله تابع ارزیابی موقعیت محاسبه می‌شود و مطلوبیت رسیدن به آن موقعیت را برای یک بازیکن نشان می‌دهد. سپس بازیکن مینیمم مقدارهای نتایج موقعیت‌های احتمالی حاصل، از حرکت‌های پیش روی حریف بازیکنان را می‌گزیند. اگر نوبت حرکت A باشد A به هر حرکت مجاز در آن موقعیت یک مقدار می‌دهد.

یک روش تخصیص ممکن شامل اختصاص دادن یک برد مشخص برای A مانند ۱ و برای B مانند -۱ می‌باشد. این منتهی می‌شود. نتایج بازی‌های ترکیباتی که بوسیله جان هورتون کانوی توسعه داده شده. یک جایگزینی از قانون استفاده می‌کند که اگر نتیجه یک حرکت یک برد فوری برای A باشد یک مقدار متناهی مثبت را به متغیر جایگزینی اختصاص می‌دهد و اگر یک برد فوری برای B باشد یک مقدار متناهی منفی را اختصاص می‌دهد. مقدار A از هر حرکت دیگری، مینیمم مقداری که از هر پاسخ محتمل B نتیجه شده می‌باشد. به این دلیل که بازیکن حداکثری و B را بازیکن حداقلی می‌نامند. بنابراین نام این الگوریتم مینیماکس است. در الگوریتم بالا یک مقدار مثبت یا منفی متناهی به هر کدام از موقعیت‌ها اختصاص داده خواهد شد. به همین خاطر مقدار موقعیت مقدار موقعیت پیروزی یا شکست نهایی خواهد بود. اغلب این تنها احتمالی است که در انتهای بازی پیچیده مثل شطرنج رخ می‌دهد. زیرا به صورت محاسباتی، عملی نیست که تا انتهای بازی در پس‌پس مگر به سمت انتهای بازی و به موقعیت‌های به جای آن مقدارهای متناهی داده می‌شود که تخمین زده می‌شود که کدام بازیکن می‌برد.

این می‌تواند توسعه داده شود، اگر بتوانیم یک تابع ارزیابی اکتشافی نگه داریم که مقدارهایی را به حالت‌های غیر نهایی بازی بدون در نظر گرفتن دنباله کامل احتمالی می‌دهد. سپس می‌توانیم الگوریتم

مینیماکس را محدود کنیم تا فقط به یکسری حرکات مشخص پیش رو نگاه کنیم. به این عدد، عدد پیش بینی می‌گویند که با "تا" (پایلز) اندازه‌گیری می‌شود.

این الگوریتم می‌تواند به عنوان جستجوی راس‌های یک درخت بازی در نظر گرفته شود. ضریب انشعاب مفید برای درخت، میانگین بچه‌های هر راس است (برای مثال میانگین حرکات مجاز در یک موقعیت). تعداد راس‌هایی که می‌توان جستجو کرد معمولاً به صورت نمایی با عدد پای افزایش میابد. (اگر حرکت اجباری یا موقعیت‌های تکراری ارزیابی شود، این کمتر از نمایی است) تعداد راس‌هایی که برای حل یک بازی جستجو می‌شود حدوداً ضریب انشعاب است که به سمت قدرت تعداد پای‌ها افزایش میابد. این امر به طوری است که بازی مانند شطرنج را به طور کامل با الگوریتم مینیماکس تحلیل کنیم. کارایی الگوریتم مینیماکس احتمالاً به طور چشمگیری بدون تاثیر روی نتیجه با استفاده از هرس آلفا بتا پیشرفت می‌کند. هرس آلفا بتا دیگر هم می‌تواند استفاده شود اما تضمینی وجود ندارد که همه آنها نتیجه‌ای مشابه جستجوی غیر هرسی (un-pruned) دهد.

یک الگوریتم مینیماکس ساده می‌تواند به واسطه اصلاح شود تا علاوه بر نمره مینیماکس، کل تنوع اصلی را هم برگرداند.

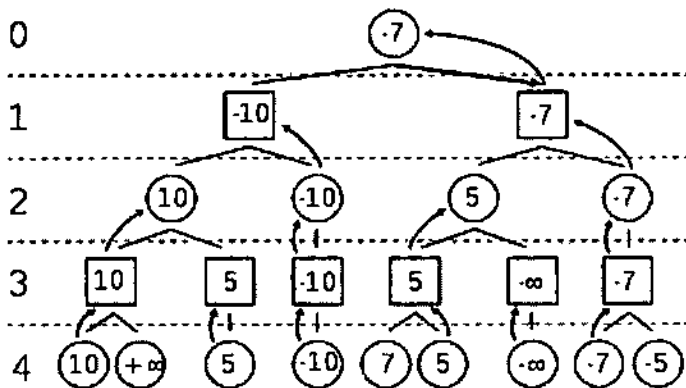
```
function minimax(node, depth, maximizingPlayer)
if depth = 0 or node is a terminal node
return the heuristic value of node
if maximizingPlayer
bestValue := -∞
for each child of node
val := minimax(child, depth - 1, FALSE)
bestValue := max(bestValue, val);
return bestValue
else
bestValue := +∞
for each child of node
val := minimax(child, depth - 1, TRUE)
bestValue := min(bestValue, val);
return bestValue
(* Initial call for maximizing player *)
minimax(origin, depth, TRUE)
```

شبه کدی برای الگوریتم مینیماکس با عمق محدود در زیر آورده شده.

```
function minimax(node, depth, maximizingPlayer)
if depth = 0 or node is a terminal node
return the heuristic value of node
if maximizingPlayer
bestValue := -∞
for each child of node
val := minimax(child, depth - 1, FALSE)
bestValue := max(bestValue, val);
return bestValue
else
bestValue := +∞
for each child of node
val := minimax(child, depth - 1, TRUE)
bestValue := min(bestValue, val);
return bestValue
(* Initial call for maximizing player *)
minimax(origin, depth, TRUE)
```

مینیماکس به طور جداگانه با هر کدام از بازیکن در یک حرکت برخورد می‌کند. با توجه به اینکه، مینیماکس به الگوریتم نگاماکس ساده می‌شود.

فرض کنید در یک بازی، در هر نوبت، هر بازیکن حداکثر ۴ حرکت برای حرکت بعدی خود پیش رو داشته باشد. الگوریتم ارائه شده درختی را مانند شکل زیر تولید می‌کند که در آن دایره‌ها نمایانگر حرکت‌های بازیکنی است که الگوریتم را اجرا می‌کند (بازیکن حداکثر ۴ حرکت را برای بازیکنانگر حرکت‌های بازیکن مقابل (بازیکن حداکثری) می‌باشد. همان طور که توضیح داده شد، دلیل محدودیت منابع محاسباتی، درخت در هر مرحله فقط ۴ حرکت را پیش‌بینی می‌کند.



درخت از یک تابعی مسافت استفاده می‌کند. حرکت‌هایی که به برد بازیکن با مقدار حداکثر منجر می‌شود با مثبت بی‌نهایت مشخص شده‌اند و حرکت‌هایی که باعث برد بازیکن با مقدار حداقل می‌شود با منفی بی‌نهایت نشان داده شده‌اند. برای مثال در سطر ۳ مقدار هر گره برابر مینیمم مقادیر فرزندان آن گره خواهد بود. برای مثال سمت چپ ترس گره در سطر سوم باید مینیمم بین ۱۰ و مثبت بی‌نهایت را به عنوان مقدار خود انتخاب کند بنابراین مقدار آن گره ۱۰ خواهد شد.

مرحله بعدی بدست آوردن مقادیر گره‌های سطوح بالاتر است که در این مرحله هر گره مقداری برابر با ماکسیمم مقادیر فرزندان خود خواهد داشت. به همین صورت این الگوریتم کار خود را ادامه می‌دهد و به صورت یک در میان ماکسیمم مقادیر فرزندان و مینیمم آن‌ها را به گره اختصاص می‌دهد تا این که به ریشه درخت برسیم که در این مرحله باید ماکسیمم مقادیر فرزندان را به گره اختصاص دهیم (که در شکل با فلش آبی رنگ مشخص شده است) و این همان حرکتی است که بازیکن به منظور به حداقل رساندن انتخاب‌های حداکثری طرف مقابل باید انجام دهد.

مینیماکس و عدم قطعیت

زمانی که بازیکن دیگری وجود نداشته باشد، نظریه مینیماکس تصمیم‌گیری را هم در بر می‌گیرد ولی در این حالت دنباله تصمیم‌گیری‌ها بر اساس حقایق و اتفاقات ناشناخته و نامعلوم می‌باشند. برای مثال

تصمیم‌گیری برای اکتشاف یک معدن مستلزم صرف هزینه‌ای است که در صورتی که مواد معدنی موجود نباشند این هزینه هدر رفته است ولی در صورت وجود این مواد این هزینه کاملاً به‌صرفه است و موجب سودآوری می‌گردد. یک راه برای رویارویی با این مسئله این است که به آن به عنوان یک بازی با طبیعت نگاه کنیم و با ایده‌ای شبیه به چیزی که در قانون مورفی وجود دارد جلو برویم و از همان تکنیک‌هایی استفاده کنیم که در بازی "دو نفر با مجموع صفر" استفاده می‌کردیم.

مینیمکس و نظریه تصمیم آماری

در نظریه تصمیم آماری (ریاضیک) یک برآورد θ داریم که برای تخمین پارامتر θ از آن استفاده می‌کنیم. همچنین تابع ریسک $R(\theta)$ را معمولاً به عنوان انتگرال تابع شکست در نظر می‌گیریم و محاسبه می‌کنیم در صورتی که برای θ برآورده شود که $R(\theta)$ را مینیمکس می‌نامیم:

نظریه تصمیم‌گیری غیراحتمالی

یکی از ویژگی‌های اصلی تصمیم‌گیری مینیمکس غیراحتمالی بودن آن است که در آن برخلاف تصمیم‌گیری‌هایی که بر اساس مقادیر قابل انتظار و سودهای قابل پیش‌بینی انجام می‌شود، هیچ پیش‌فرضی راجع به احتمال وقوع پیشامدهای مختلف نداریم و صرفاً به تحلیل از پیشامدهای ممکن را در نظر می‌گیریم و از آن استفاده می‌کنیم بنابراین در این روش در مقایسه با سایر تکنیک‌های تصمیم‌گیری می‌توانیم راحت‌تر فرضیاتمان را تغییر دهیم.

کاربردهای زیادی از این روش غیراحتمالی وجود دارد که از جمله مهم‌ترین آنها می‌توان به تاسف مینیمکس و نظریه تصمیم‌گیری شکاف اطلاعات اشاره کرد.

علاوه بر این مینیمکس تنها به اندازه‌گیری‌های ترتیبی (که در آن نتایج بتوانند با یکدیگر مقایسه شوند)

احتیاج دارد و در آن هیچ احتیاجی به اندازه‌گیری‌های فاصله‌ای نیست (که در آن نتایج شامل این هستند که این روش تا چه میزان بهتر یا بدتر از روش‌های دیگر است) و در نهایت یک داده ترتیبی را به عنوان خروجی می‌دهد.

نتیجه‌ای که از یک تحلیل مینیماکس به دست می‌آید به ما می‌گوید که آیا استراتژی مورد بحث مینیماکس است یا خیر، بدترین حالت و نتیجه آن چیست و این که در بین بدترین نتایج کدام یک نسبت به بقیه بهتر است که در مقایسه با تحلیل‌هایی که بر اساس مقادیر قابل انتظار انجام می‌شود که در آن‌ها نتیجه این صورت است که به ما می‌گوید که استراتژی مورد بحث به $E(x)=n$ منجر می‌شود روش مینیماکس نسبت به آن و از آن می‌توانیم برای داده‌های ترتیبی استفاده کنیم.