

بهینه‌سازی پویا، کنترل بهینه
و کاربردهای آن

محمد حسین پور کاظمی

مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی

۵۱۸



بهینه‌سازی پویا، کنترل بهینه و کاربردهای آن

دکتر محمدحسین پورکاظمی

ویراستهٔ اکرم کیانی

طراح جلد: آرمان خرمک

حروف‌نگار و صفحه‌آرا: فریبا باباخانی

ناظر چاپ: صفر ممیزاد

چاپ اول: ۱۳۹۳

شمارگان: ۱۰۰۰

قیمت: ۲۰۰۰۰۰ ریال

ناشر: مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی

کلیه حقوق تا پنج سال برای دانشگاه شهید بهشتی محفوظ است.

پورکاظمی، محمدحسین

بهینه‌سازی پویا، کنترل بهینه و کاربردهای آن / تألیف محمدحسین پورکاظمی. - تهران: دانشگاه شهید بهشتی،

مرکز چاپ و انتشارات، ۱۳۹۳.

هجده، ۴۹۲ ص: مصور. - (انتشارات دانشگاه شهید بهشتی: ۵۱۸).

ISBN: 9789644572616

واژه نامه:

کتابنامه:

۱. بهگزینی ریاضی. ۲. نظریه کنترل. الف. دانشگاه شهید بهشتی. مرکز چاپ و انتشارات. ب. عنوان.

۵۱۹

۱۳۹۳ ۹ ب ۸ پ ۴۰۲:۳ QA

۱۶

ب ۷۲۸ پ

۱۳۹۳

کتابخانه مرکزی و مرکز اسناد دانشگاه شهید بهشتی

کد ناشر ۱۰۰۱۷۳۴

www.sbu.ac.ir

unipress@mail.sbu.ac.ir

فهرست مطالب

پیشگفتار.....سیزده

بخش اول: آشنایی با مسئله کنترل بهینه ۱

فصل ۱: آشنایی با مسئله کنترل بهینه.....	۳
مقدمه.....	۳
۱. آشنایی با بهینه‌سازی پویا.....	۳
۱.۲. تابعی.....	۱۱
۱.۳. انتگرال در بهینه‌سازی پویا.....	۱۷
۱.۳.۱. تعریف انتگرال ریمان.....	۱۷
۱.۳.۲. محاسبه طول کمان.....	۲۲
۱.۳.۳. مشتق انتگرال، فرمول لایب نیتز.....	۲۶
۱.۴. بیان صوری مسئله.....	۲۸
۱.۵. تاریخچه مسئله کنترل.....	۳۳
۱.۶. روش‌های حل مسئله کنترل.....	۳۷
۱.۷. اقسام مسائل کنترل.....	۳۹
۱.۸. تمرین.....	۴۱

بخش دوم: حساب تغییرات ۴۵

فصل ۲: شرط لازم در حساب تغییرات.....	۴۷
مقدمه.....	۴۷

۴۷	۱. ۲. مسئله کنترل لاگراتژ.....
۶۳	۲. ۲. صورت‌های دیگر معادله اولر.....
۶۴	۲. ۲. ۱. حالات خاص.....
۷۰	۲. ۳. دو تعمیم از مسئله حساب تغییرات.....
۷۰	۲. ۳. ۱. مشتقات مراتب بالاتر.....
۷۴	۲. ۳. ۲. چند متغیر وضعیت.....
۷۷	پیوست فصل دوم.....
۷۷	۲. ۴. پیوست معادلات دیفرانسیل معمولی.....
۷۹	حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم.....
۸۸	۲. ۵. تمرین.....
۹۲	پاسخ برخی تمرین‌ها.....
۹۵	فصل ۳: شرایط مختلف در حساب تغییرات.....
۹۵	مقدمه.....
۹۶	۳. ۱. تعیین نوع مسیر بهینه به کمک آزمون درمیان.....
۱۰۴	۳. ۱. ۱. تعیین مسیر بهینه به کمک مقادیر خاص.....
۱۰۶	۳. ۱. ۲. شرط لازم لژاندر.....
۱۰۹	۳. ۱. ۳. شرط کفایت معادله اولر.....
۱۱۴	۳. ۱. ۴. تغییرات مرتبه اول و دوم.....
۱۱۶	۳. ۱. ۵. پس‌انداز بهینه اجتماعی.....
۱۱۹	۳. ۱. ۶. تمرین.....
۱۲۳	۳. ۲. شرایط تقاطع.....
۱۳۳	۳. ۲. ۱. نقطه ابتدایی متغیر.....
۱۳۵	۳. ۲. ۲. شرایط تقاطع برای چند متغیر وضعیت.....
۱۴۰	۳. ۳. حذف تابع انتهایی.....
۱۴۳	۳. ۳. ۱. تقاضای کار و هزینه‌های تعدیل ساختار.....
۱۴۷	۳. ۴. تمرین.....

۱۴۹	۳. ۵. برنامه‌ریزی در زمان نامحدود
۱۵۱	۳. ۵. ۱. چند قضیه در انتگرال‌های تاسره
۱۵۳	۳. ۵. ۲. شرایط تقاطع در حالت زمان نامحدود
۱۵۶	۳. ۵. ۳. نظریه ریاضی پس‌انداز
۱۶۸	۳. ۵. ۴. مدل آیزنر - استراتز
۱۷۴	۳. ۶. تمرین
۱۷۷	فصل ۴: مسئله‌های مقید در حساب تغییرات
۱۷۷	مقدمه
۱۷۸	۴. ۱. قیود معادله‌ای
۱۸۵	۴. ۲. قیود نامعادله‌ای
۱۸۷	۴. ۳. قیود انتگرالی یا محیط ثابت
۱۹۶	۴. ۴. شرایط تقاطع در مسائل مقید
۲۰۱	۴. ۵. شرایط مرتبه دوم در حالت مقید
۲۰۴	۴. ۶. برخی از کاربردهای اقتصادی
۲۰۴	۴. ۶. ۱. استخراج بهینه اجتماعی
۲۰۸	۴. ۷. تمرین
۲۱۱	فصل ۵: مباحث پیشرفته در حساب تغییرات
۲۱۱	مقدمه
۲۱۱	۵. ۱. گوشه‌ها
۲۱۷	۵. ۲. محدودیت نامساوی به صورت (f, x)
۲۲۴	۵. ۳. شرایط تقاطع و تابع نهایی
۲۲۹	۵. ۴. مسائل خودگردان و افق نامحدود
۲۳۱	۵. ۵. سریع‌ترین مسیرهای نزدیک شونده
۲۳۶	۵. ۵. ۱. اثبات بهینگی (MRAP)
۲۳۸	۵. ۶. تمرین

بخش سوم: مسئله کنترل بهینه ۲۴۱

فصل ۶: نظریه کنترل بهینه ۲۴۳

..... ۲۴۳ مقدمه

..... ۲۴۴ ۱. معرفی مسئله کنترل بهینه

..... ۲۴۸ ۲. اصل ماکزیمم پونتری آگین

..... ۲۴۹ ۱. ۲. ۱. قضیه شرط لازم اصل ماکزیمم

..... ۲۶۰ ۲. ۲. ۲. روش دوم اثبات اصل ماکزیمم

..... ۲۶۶ ۳. ۱. شرط کافی در مسئله کنترل

..... ۲۶۶ ۱. ۳. ۱. شرط کافی، روش اول

..... ۲۶۸ شرط کافی - روش دوم: قضیه او - ال منگازرین

..... ۲۷۱ ۲. ۳. ۲. شرط کافی آرو

..... ۲۷۲ ۴. اصل ماکزیمم و معادله اولر

..... ۲۷۸ ۵. کاربرد کنترل بهینه در اقتصاد

..... ۲۷۸ ۱. ۵. ۱. تفسیر اقتصادی اصل ماکزیمم

..... ۲۸۱ ۲. ۵. ۲. مصرف بهینه

..... ۲۸۶ ۳. ۵. ۳. استفاده از انرژی و کیفیت محیط زیست

..... ۲۸۹ ۴. ۵. ۴. فروش کالای جدید

..... ۲۹۲ ۵. ۵. ۵. رشد اقتصادی

..... ۲۹۷ ۶. ۶. ۶. تمرین

فصل ۷: مباحث پیشرفته در مسئله کنترل ۳۰۵

..... ۳۰۵ مقدمه

..... ۳۰۶ ۱. چند متغیر کنترل و وضعیت

..... ۳۱۷ ۲. ۷. ۲. حالت‌های خاصی از تابع هامیلتون

..... ۳۱۷ ۱. ۲. ۷. مقدار جاری تابع هامیلتون

..... ۳۲۳ ۲. ۲. ۷. مسائل خودگردان

۳۲۶	۳.۷. مسئله افق نامحدود
۳۲۷	۳.۷. ۱. مسئله نقض هالکین
۳۳۰	الگوی آتکینسون
۳۳۵	۳.۷. ۲. مسائل افق نامحدود در اقتصاد
۳۴۳	۳.۷. ۴. مسائل کنترل مقید
۳۴۴	۳.۷. ۴. ۱. قیود معادله‌ای و نامعادله‌ای
۳۴۶	۳.۷. ۴. ۲. شرایط کافی
۳۵۰	۳.۷. ۴. ۳. مسائل هم محیطی
۳۵۴	۳.۷. ۴. ۴. شرط کافی
۳۵۵	۳.۷. ۴. ۵. قیود نامعادله‌ای با متغیر وضعیت
۳۶۵	مثال اقتصادی؛ مسئله استفاده از موجودی انبار
۳۶۷	۳.۷. ۵. تمرین
۳۷۳	فصل ۸: برنامه‌ریزی پویا
۳۷۳	مقدمه
۳۷۴	۸. ۱. معادله بلمن
۳۷۹	۸. ۲. مسئله حساب تغییرات و برنامه‌ریزی پویا
۳۸۲	۸. ۳. اصل ماکزیمم و برنامه‌ریزی پویا
۳۹۰	۸. ۴. مسئله خودگردان افق نامحدود
۳۹۲	۸. ۵. تمرین

بخش چهارم: حل تقریبی مسئله کنترل و استفاده از نرم‌افزار ۳۹۵

۳۹۷	فصل ۹: بهینه‌سازی پویای زمانی جدا
۳۹۷	مقدمه
۳۹۸	۹. ۱. مسئله حساب تغییرات و کنترل بهینه
۴۱۱	۹. ۲. مسئله برنامه‌ریزی پویا
۴۱۷	۹. ۳. حل مسئله کنترل زمان پیوسته با استفاده از اکسل

۴۲۰	۹. ۳. ۱. به کارگیری روش رونگه - کاتا برای حل مسائل کنترل بهینه
۴۲۵	۹. ۴. تمرین
۴۲۷	پیوست: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۴۲۹	مقدمه
۴۲۹	ب. ۱. تعاریف
۴۳۱	ب. ۲. تشکیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و جواب‌های آن
۴۳۵	ب. ۲. ۱. جواب‌های یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۴۳۷	ب. ۲. ۲. قضیه جواب کامل
۴۳۹	ب. ۳. حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه اول
۴۴۲	ب. ۴. تمرین
۴۴۵	ب. ۵. معادله با مشتقات جزئی غیر خطی مرتبه اول و جواب‌های آن
۴۴۵	ب. ۵. ۱. جواب‌های کامل
۴۴۶	ب. ۵. ۲. حل معادلات با مشتقات جزئی در حالت‌های خاص
۴۵۳	ب. ۶. روش کلی شاریت
۴۵۸	ب. ۷. تمرین
۴۶۱	منابع
۴۶۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۴۷۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۴۸۱	نمایه

پیشگفتار

در سال ۱۳۶۵ با کتاب بهینه‌سازی ریاضی نوشته میشل دی. ایتربلیگیتور^۱ آشنا شدم و با ترجمه بخش ریاضی و چاپ آن در انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، این مقوله مهم را که شامل برنامه‌ریزی ایستا، مسئله کنترل و بهینه‌سازی پویا بود به دانشجویان و علاقه‌مندان تقدیم کردم. سال‌ها در دانشگاه‌های شهید بهشتی، تهران، امام صادق(ع)، تربیت مدرس، علامه طباطبائی مفید و سیستان و بلوچستان برای دانشجویان دوره دکتری، درس ریاضیات برای اقتصاد را تدریس می‌کردم. در این درس با استفاده از برنامه دانشگاه‌های بزرگ دنیا مطالبی از کنترل بهینه یا برنامه‌ریزی پویا را که در آن دانشگاه‌ها تدریس می‌شد برای دانشجویان ارائه می‌دادم.

در سال ۱۳۷۵، برخی از استادان محترم دانشگاه تهران، که مدیریت گروه اقتصاد و مسئولیت پژوهشی دانشگاه امام صادق(ع) را عهده‌دار بودند، خواستار تدوین گرایش اقتصاد ریاضی دوره دکتری شدند. دروس گرایش اقتصاد ریاضی دوره دکتری را که بخشی از آن بهینه‌سازی پویا بود، تدوین و پس از تصویب وزارت علوم، نخستین بار آن را در دانشگاه امام صادق تدریس کردم. سال‌ها بعد دروس این گرایش را در دانشگاه تهران، علامه طباطبائی، دانشگاه پیام نور و شهید بهشتی تدریس کردم. در این سال‌ها علاوه بر کتاب بهینه‌سازی ریاضی، از کتاب ارزشمند اصول بهینه‌سازی آلفا سی. چیانگ^۲ استفاده و آن را ترجمه کردم و در اختیار دانشجویان قرار دادم.

خوشبختانه این کتاب به‌طور کامل در سال ۱۳۸۷ توسط آقایان دکتر عباس شاکری و دکتر فریدون اهرابی ترجمه و چاپ شد. این جانب پس از سال‌ها تدریس مسئله کنترل و

1. Michel D. Interiligator

2. Alpha C. Chiang

بهینه‌سازی برآن شدم که کتابی در این زمینه تألیف کنم. از طرفی، بهینه‌یابی پویا با متغیرهای تصادفی^۱ امروزه در اقتصاد مالی کاربرد ویژه‌ای دارد. هر چند این کتاب تنها در زمینه بهینه‌یابی پویا با متغیرهای متعین^۲ است، ولی برای ورود به مقوله بهینه‌یابی با متغیرهای تصادفی، مقوله اول به عنوان پایه به‌شمار می‌آید. بخش‌هایی از این کتاب به‌عنوان درس اقتصاد ریاضی و در دوره دکتری گرایش اقتصاد ریاضی برای دانشجویان دانشگاه‌های مختلف تدریس شد. اکنون خوشحالم این کتاب به چاپ رسیده است.

مسئله کنترل و بهینه‌سازی پویا دارای تاریخچه طولانی است و این موضوع ابتدا با حساب تغییرات^۳ شروع شد. این بخش در سال‌های پایانی قرن هفدهم با مسئله هم‌محیطی در ریاضی شروع شد. مسئله از این قرار بود مساحتی را که با طنابی، در دو نقطه ثابت، محصور شده است در نظر می‌گیریم. شکل طناب چگونه باید باشد تا مساحت ماکزیمم شود؟ توجه داریم طول طناب ثابت و با تغییر شکل طناب، مساحت تغییر می‌کند. هم‌زمان در فیزیک مسئله‌ای مطرح شد، در این مسئله نقطه‌ای به جرم m بر روی صفحه‌ای قائم و تحت تأثیر وزن خود می‌خواهد از نقطه A بر روی سیمی بدون اصطکاک بلغزد تا به نقطه B برسد، سؤال این است که شکل سیم چگونه باشد، تا این جسم در کمترین زمان از نقطه A به B برسد. این مسئله موسوم به مسئله بروخیستوچورن^۴ است. این مسائل توسط ریاضی‌دانان به بحث گذاشته شد و شاخه‌ای از ریاضیات به‌نام حساب تغییرات شکل گرفت که توسط ریاضی‌دانان بزرگی مانند اولر، لژاندر و در نهایت لاگرانژ کامل شد. در رشته اقتصاد، نخستین بار در فوریه ۱۹۲۴، جی. سی. اونس در مقاله‌ای با عنوان پویایی یک انحصارگر ماهنامه ریاضی آمریکا^۵ از حساب تغییرات در اقتصاد استفاده کرد. چهار سال بعد در دسامبر ۱۹۲۸ فرانک رمزی^۶ در مقاله معروف خود به‌نام "یک نظریه ریاضی از پس‌انداز"، از حساب تغییرات استفاده کرد. این مقاله که می‌توان آن را مبنای جدید رشد

1. stochastic variable

2. deterministic variable

3. Calculus variation

4. Brochisto chorne

5. G.C.Evance, "The Dynamic of Monopoly", *American Mathematical Monthly*, February 1924, pp. 77-83.

6. Frank P. Ramsey, "A mathematical theory of saving", *Economic Journal*, Dec. 1928, pp. 543-559.

اقتصادی دانست در دههٔ شصت مورد توجه قرار گرفت و از پایه‌های نظریهٔ رشد مبتنی بر کنترل بهینه است. در سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۵ تحولی عمیق در مسئلهٔ بهینه‌یابی پویا پیش آمد. ریاضی‌دان نابینای روس، ال اس پونتری آگین^۱ و همکاران او، روش اصل ماکزیم را بنیاد نهادند. کتاب او در سال ۱۹۶۲ به زبان انگلیسی در امریکا ترجمه شد. مسئلهٔ کنترل بهینه از سال ۱۹۶۰ در همهٔ رشته‌ها از جمله مهندسی، فیزیک، ریاضی، اقتصاد و مدیریت مورد توجه قرار گرفت و روز به روز استفاده از آن گسترش یافت.

سابقهٔ تدریس درس کنترل به عنوان یک درس در رشتهٔ اقتصاد جالب است. کندریک^۲ در مقالهٔ معروف "کنترل تصادفی برای مدل‌های اقتصاد" گذشته، حال و مسیر آینده^۳ اشاره خوبی به اولین درس کنترل در دانشگاه‌ها دارد. او می‌گوید:

پروفسور برسون^۴ در سال ۱۹۶۶ دوره‌ای از درس تئوری کنترل را ارائه داد که مورد توجه گروه کوچکی از دانشجویان کارشناسی ارشد اقتصاد و اعضای جوان دانشگاه هاروارد قرار گرفت. برسون استاد بزرگی بود که قادر بود حتی مفاهیم مشکل را به سادگی بیان کند؛ با این حال، در ابتدا دوره برای اقتصاددانان مشکل بود. علایم و مفاهیم ناآشنا بودند و مثال‌ها همگی در مورد هواپیما و راکت‌ها بودند. با وجود این دابل^۵، لاند^۶، ترنوسکی^۷، دوگارتی^۸، تیلور^۹ و من ادامه دادیم و طولی نکشید که خودم را در بحث‌های پرشوری با هم‌کلاسی‌هایم دیدم.

کتاب حاضر کامل‌ترین کتاب در بهینه‌سازی پویا و کنترل بهینه به زبان فارسی است، روش برنامه‌ریزی پویا که مبتنی بر اصل بلمن است در کتاب "بهینه‌سازی آلفا سی چیانگ"

۱. Lev Semenovich Pontryagin (1908-1988)، ریاضی‌دان روس که در شانزده سالگی در اثر انفجار چراغ

نفت نابینا شد.

2. A. Kendrick, "David Stochastic control for economic models: past, present and the paths ahead", *Journal of Economic Dynamics & Control* 29 (2005) 3-30.

3. Bryson

6. Rod Dobell

5. Hayne Leland

8. Stephen Turnovsky

7. Chris Dougherty

2. Lance Taylor

وجود ندارد و اصولاً فصل‌های پنجم، هشتم و نهم که در این کتاب بحث شده است تنها منبع فارسی می‌باشد. این کتاب دارای چهار بخش می‌باشد که در نه فصل تدوین شده است. بخش اول مربوط به مقدمه می‌باشد که در فصل اول با عنوان، آشنایی با مسئله کنترل بهینه، آمده است. در این فصل ابتدا به معرفی مسئله کنترل و ریشه‌های آن خواهیم پرداخت. سه نوع مسئله کنترل لاگرانژ، مسئله کنترل بولزا و مسئله کنترل مایر وجود دارد. برای حل آن، روش‌های حل مسئله کنترل، روش حساب تغییرات، روش اصل ماکزیمم و روش برنامه‌ریزی پویا معرفی می‌شود.

بخش دوم شامل چهار فصل است. در فصل دوم به حل مسئله کنترل لاگرانژ با استفاده از روش حساب تغییرات پرداخته‌ایم؛ ابتدا شرط لازم برای وجود مسیر بهینه برای مسئله برنامه‌ریزی پویا بیان شده و رابطه اولر را به دست می‌آوریم، سپس به نمونه‌هایی کاربردی از مسائل ریاضی، فیزیک، اقتصاد و مدیریت می‌پردازیم و در حل مسئله بهینه‌سازی پویا، استفاده از معادلات دیفرانسیل در مرتبه دوم، ضروری است. در پیوست فصل دوم به اختصار حل معادله دیفرانسیل معمولی ارائه شده است.

در فصل سوم به شرط‌های مختلف مسئله بهینه‌سازی لاگرانژ می‌پردازیم؛ ابتدا در مورد شرط لازم برای تعیین مسیر بهینه بیشینه و کمینه بحث شده است. مسیر بهینه در انتهای برنامه زمانی اهمیت ویژه‌ای دارد، این موضوع موسوم به شرایط تقاطع یا تراگردی است که در این فصل به آن می‌پردازیم. مسئله برنامه‌ریزی در افق نامحدود اهمیت ویژه‌ای دارد. در این فصل راجع به این موضوع نیز بحث شده است و در زمینه‌های مختلف مسائل کاربردی ارائه شده است.

در فصل چهارم به مسائل مقید در برنامه‌ریزی پویا پرداخته‌ایم؛ همان‌طور که در برنامه‌ریزی ایستا از مسائل مقید استفاده شده است، در برنامه‌ریزی پویا نیز مسائل مقید به‌طور گسترده‌تری وجود دارد. قیود به صورت معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل، نامعادلات دیفرانسیل و قیود انتگرالی می‌باشد. در این فصل، شرایط کافی و شرایط تقاطع برای مسائل مقید مورد بررسی قرار می‌گیرد و در انتها نیز به مدل‌های کاربردی می‌پردازیم.

در فصل پنجم مطالب بیشتری در حساب تغییرات مورد بحث قرار گرفته است. در فصل‌های گذشته، فرض بر این بود که مسیر بهینه، پیوسته و دارای مشتق باشد. در این فصل مسیرهایی که دارای نقاط گوشه‌ای و تیز می‌باشد ارائه شده است و شرایط گوشه‌ای وایرشراس-اردمان را معرفی می‌کنیم. مسئله قیودی که در آن‌ها تنها (x, t) وجود دارد موضوعی متفاوت از مسائل مقید قبلی است که در این فصل، در مورد آن بحث می‌شود. مسائل افق نامحدود خودگردان نیز در این فصل بحث شده است.

بخش سوم شامل سه فصل می‌باشد. در فصل ششم به مسئله کنترل و اصل ماکزیمم پونتری‌اگین و روش‌های مختلف اثبات آن پرداخته‌ایم. شرط کافی منگازرین و آرو در این فصل بیان شده است. مسئله کنترل در زمینه‌های مختلف محیط زیست، منابع زیرزمینی، اقتصادی و مدیریت کاربردهای فراوانی دارد که در این فصل به مقاله‌هایی از این موارد می‌پردازیم.

در فصل هفتم مباحث پیشرفته در زمینه مسئله کنترل بهینه مورد بحث قرار گرفته است؛ از جمله تابع هامیلتون جاری، مسائل خودگردان، مسئله کنترل افق نامحدود و مسائل نقض آن مورد بررسی قرار گرفته است. سپس به مسائل مقید کنترل پرداخته‌ایم. قیود به صورت معادله‌ای، نامعادله‌ای انتگرالی و قیودی که تنها شامل متغیر وضعیت و زمان می‌باشد ارائه شده است.

در فصل هشتم به روش حل مسئله کنترل با استفاده از برنامه‌ریزی پویا و اصل بلمن پرداخته‌ایم که در سال ۱۹۵۰ توسط ریچارد بلمن ارائه شد. استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا در مقایسه با روش حساب تغییرات و روش اصل ماکزیمم روش مشکل‌تری می‌باشد. در روش‌های حساب تغییرات و اصل ماکزیمم از معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده می‌شود ولی در معادله بلمن از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می‌شود به همین جهت در انتهای کتاب (به صورت پیوست) مختصری به معادلات با مشتقات جزئی پرداخته‌ایم. اهمیت روش برنامه‌ریزی پویا، استفاده از آن در حالتی است که متغیر تصادفی در مسئله وجود دارد.

بخش چهارم که شامل یک فصل است، دربارهٔ حالت گسسته و استفاده از نرم‌افزار بحث شده است. در مسائل برنامه‌ریزی پویا ممکن است متغیر زمان به صورت گسسته باشد. در فصل نهم به حل مسئله برنامه‌ریزی پویای گسسته پرداخته‌ایم. در این فصل دو روش مختلف برای حل مسئله ارائه شده است. از طرفی در حل مسئله برنامه‌ریزی پویا می‌توان از نرم‌افزارهای Excel، Games، Matlab استفاده کرد. استفاده از Excel ساده‌تر است، به همین جهت در این فصل به تشریح حل مسئله برنامه‌ریزی پویا با استفاده از نرم‌افزار Excel بحث شده است. در سراسر کتاب مقاله‌های گوناگونی در زمینه‌های اقتصادی و مدیریت در اقتصاد خرد، کلان، انرژی، محیط زیست، منابع تمام شدنی و رشد ارائه شده است. در انتهای هر فصل مسائلی برای حل، همراه با پاسخ برخی از آن‌ها نیز ارائه شده است.

مطالعهٔ این کتاب برای دانشجویان، به‌ویژه در دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری و اساتید محترم رشته‌های مهندسی، اقتصاد و مدیریت توصیه می‌شود. از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه، جناب آقای دکتر رضا مسعودی و مدیر محترم انتشارات، جناب آقای دکتر رائد فریدزاده و به‌خصوص سرکار خانم آذرمه سنجری و خانم اکرم کیانی ویراستار فنی کتاب و حروفچین و صفحه‌آرا خانم فریبا باباخانی و عزیزانی که در آماده‌سازی و چاپ این اثر زحمت کشیده‌اند صمیمانه قدردانی می‌کنم. در پایان خداوند بزرگ را سپاسگزارم که توفیق تألیف این کتاب را به من عطا فرمود. توفیق از خداوند بزرگ است و به او توکل می‌کنم.

محمدحسین پورکاظمی

دانشیار دانشکدهٔ علوم اقتصادی و سیاسی

بهار ۱۳۹۳