

مجله‌های بر

نظریه محاسبات

(ویراست سوم)

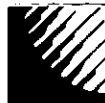
تألیف :

مایکل سیپسر

ترجمه :

دکتر جواد وحیدی (عضو هیأت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران)

سید حسین رسولی (مدرس دانشگاه)



علوم رایانه

سرشناسه	سپسر، مایکل؛ Sipser, Michael - م.
عنوان و نام پدیدآور	مقدمه‌ای بر نظریه محاسبات / تألیف مایکل سپسر؛ ترجمه جواد وحیدی، سید حسین رسولی.
مشخصات نشر	بابل: علوم رایانه، ۱۳۹۲.
مشخصات ظاهری	۳۱۲ ص.: مصور، جدول، نمودار.
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۲۰۵-۰۳۴-۲
وضعیت فهرست‌نویسی	فیبا
یادداشت	عنوان اصلی. Introduction to the Theory of Computation, 3 rd ed, 2010.
یادداشت	کتابنامه.
موضوع	نظریه ماشین
موضوع	پیچیدگی محاسباتی
شناسه افزوده	وحیدی، جواد، ۱۳۴۸ -، مترجم.
شناسه افزوده	رسولی، سید حسین، ۱۳۶۱ -، مترجم.
رده‌بندی کنگره	۳۹۲ م ۷ س ۹ / QA ۲۶۷
رده‌بندی دیویی	۵۱۱ / ۲۵
شماره کتابشناسی ملی	۳۲۸۵۰۳۲

این اثر، مشمول قانون حمایت مؤلفان و مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸ است، هرکس تمام یا قسمتی از این اثر را بدون اجازه مؤلف (ناشر) نشر یا بخش یا عرضه کند مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

www.olomrayaneh.net

بابل، صندوق پستی ۴۷۱۳۵-۸۹۱

تلفن: ۰۱۱۱ - ۳۲۶۰۷۷۲



علوم رایانه

مقدمه‌ای بر نظریه محاسبات (ویراست سوم)

تألیف: مایکل سپسر

ترجمه: دکتر جواد وحیدی (عضو هیأت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران)

سید حسین رسولی (مدرس دانشگاه)

ویراستار: ابراهیم محسنی

چاپ اول

پاییز ۱۳۹۲

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه

قیمت: ۱۸۰۰۰ تومان

چاپ و صحافی: فرنگار رنگ

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۲۰۵-۰۳۴-۲

نشانی ناشر: بابل، خیابان شریعتی، مجتمع میلاد، واحد ۱۷

حروفچینی و صفحه‌آرایی: علوم رایانه

تهران، خیابان انقلاب، خیابان اردیبهشت، نبش وحید نظری، شماره ۱۴۲ - تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ - ۶۶۴۰۰۱۴۴

فهرست مطالب

فصل صفر : مقدمه

۰-۱	آتوماتا، محاسبه پذیری و پیچیدگی	۹
۰-۲	مفاهیم و اصطلاحات ریاضی	۱۱
۰-۳	تعاریف، قضایا و اثبات ها	۲۳
۰-۴	انواع اثبات	۲۷
۰-۵	تمرین ها	۳۱
۰-۶	مسائل	۳۳

فصل اول : زبان های منظم

۱-۱	آتوماتای متناهی	۳۵
۱-۲	نامعین بودن	۵۰
۱-۳	عبارت های منظم	۶۴
۱-۴	زبان های نامنظم	۷۷
۱-۵	تمرین ها	۸۳
۱-۶	مسائل	۹۰

فصل دوم : زبان های مستقل از متن

۲-۱	گرامرهای مستقل از متن	۹۸
۲-۲	آتوماتای پشته ای	۱۰۶
۲-۳	زبان های نامستقل از متن	۱۱۸
۲-۴	زبان های مستقل از متن معین	۱۲۳
۲-۵	تمرین ها	۱۴۸
۲-۶	مسائل	۱۵۱

فصل سوم : تئوری چرچ - تورینگ

۳-۱	ماشین های تورینگ	۱۵۶
۳-۲	انواع ماشین های تورینگ	۱۶۶

۱۷۲	تعریف الگوریتم	۳-۳
۱۷۷	تمرین‌ها	۳-۴
۱۷۹	مسائل	۳-۵

فصل چهارم : تصمیم‌پذیری

۱۸۲	زبان‌های تصمیم‌پذیر	۴-۱
۱۹۰	مسأله‌ی توقف	۴-۲
۱۹۹	تمرین‌ها	۴-۳
۲۰۰	مسائل	۴-۴

فصل پنجم : کاهش‌پذیری

۲۰۴	مسائل تصمیم‌ناپذیر از نظریه‌ی زبان	۵-۱
۲۱۴	یک مسأله‌ی تصمیم‌پذیر ساده	۵-۲
۲۲۱	کاهش‌پذیری نگاشتی	۵-۳
۲۲۶	تمرین‌ها	۵-۴
۲۲۶	مسائل	۵-۵

فصل ششم : مباحث پیشرفته در نظریه‌ی محاسبه‌پذیری

۲۳۰	قضیه بازگشتی	۶-۱
۲۳۷	تصمیم‌پذیری نظریه‌های منطقی	۶-۲
۲۴۵	کاهش‌پذیری تورینگ	۶-۳
۲۴۶	تعریف اطلاعات	۶-۴
۲۵۴	تمرین‌ها	۶-۵
۲۵۵	مسائل	۶-۶

پیوست : حل مسائل برگزیده

۲۵۷	فصل صفر	
۲۵۷	فصل اول	
۲۷۰	فصل دوم	
۲۸۴	فصل سوم	
۲۹۳	فصل چهارم	
۲۹۸	فصل پنجم	
۳۰۶	فصل ششم	

بسم الله الرحمن الرحيم

یکی از پایه‌های توسعه فرهنگی و رشد و شکوفایی استعدادها، مقوله کتاب و کتابخوانی است. نیاز به کتاب به سرعت در حال رشد است و انتشار نتیجه مطالعات پژوهشگران و اندیشمندان پاسخگوی این نیاز خواهد بود. جهت تحقق این امر و گام برداشتن به سمت خودکفایی چاپ کتب علمی، به خصوص در زمینه فناوری جدید، یعنی کامپیوتر، که توسعه سایر فناوری‌ها نیز به آن وابسته است، ضروری است.

عین‌اله جعفرنژاد قمی
انتشارات علوم رایانه

پیشگفتار

هرگز به آن قدر که می‌پری قانع نباش.

هرگز نگو بیشتر از این ممکن نیست.

دائم از خودت عبور کن!

شاگردی که کمتر از معلمش بداند، دنیا را به عقب می‌راند.

شاگردی که به اندازه‌ی معلمش بداند دنیا را متوقف می‌کند.

این تویی که پیش می‌رانی...

ریشه‌های تاریخی نظریه محاسبات را می‌توان در کارهای منطق‌دان‌هایی که در دهه‌ی ۱۹۳۰ مدل‌های ریاضی برای مفهوم الگوریتم ارائه دادند، جستجو کرد. آلن تورینگ، امیل پست، و آلونزو چرچدر ۱۹۳۶ نخستین تعاریف دقیق را برای مفاهیم محاسبه و توابع محاسبه‌پذیر ارائه دادند.

یکی از اهداف مهم این پیشگامان، بررسی مسائلی مانند برنامه‌هیلبرت و قضایای گودل بود که در منطق و مبانی ریاضی مطرح شده بود. یکی از نتایجی که بلافاصله از این نظریه به دست آمد اثبات تمیزناپذیری مسأله‌ی توقف بود. یعنی الگوریتمی وجود ندارد که تشخیص دهد یک الگوریتم با یک ورودی داده شده متوقف می‌شود یا نه. به کمک این مطلب می‌توان اثباتی زیبا از قضیه‌ی اول نا تمامیت گودل به دست آورد. از دیگر نتایج قابل توجه اثبات تمیزناپذیری، منطق مرتبه اول بود که توسط چرچ اثبات شد. به زودی مشخص شد که می‌توان از این نظریه در ساخت ماشین‌های فیزیکی که محاسبه انجام دهند استفاده کرد، کاری که چند سال بعد با ساخته شدن نخستین کامپیوترها عملی شد.

امروزه نظریه‌ی محاسبه از شاخه‌های بنیادی در منطق ریاضی و علوم نظری کامپیوتر محسوب می‌شود و در مطالعه‌ی مبانی ریاضی و همچنین نظریه‌ی الگوریتم‌ها و پیچیدگی محاسبه و بسیاری از مسائل تحقیقاتی در ریاضیات و علوم کامپیوتر نقش اساسی دارد.

یکی از مشهورترین کتاب‌ها در حوزه‌ی نظریه‌ی محاسبه، کتاب "مقدمه‌ای بر نظریه محاسبات" است که توسط دانشمند مشهور این حوزه، مایکل سیپسر به رشته‌ی تحریر در آمده است که کتاب حاضر ترجمه‌ای از ویراست سوم این کتاب است.

در ترجمه‌ی این کتاب سعی شده است که با توجه به نکاتی که نویسنده در سایت شخصی خود مطرح ساخته است، تغییراتی در ترتیب برخی از مطالب کتاب ایجاد شود. به علاوه پاسخ تمرینات کلیدی کتاب نیز در اختیار خواننده قرار گیرد.

مراحل فنی چاپ کتاب بر عهده‌ی انتشارات علوم رایانه بوده است که صمیمانه از مدیریت محترم این انتشارات جناب آقای جعفر نژاد قمی به خاطر همراهی و همدلی ایشان در شکل‌گیری این اثر کمال قدردانی را داریم و از سرکار خانم لیلا اعتصامی‌راد به خاطر حروفچینی و صفحه‌آرایی و سرکار خانم مریم یارمایی به خاطر طراحی جلد تشکر ویژه داریم.

در پایان از اسانید ارجمند و دانشجویان گرامی که کتاب را مطالعه می‌فرمایند، خواهشمند است لغزش‌های احتمالی کتاب را از طریق انتشارات به مؤلفین اطلاع دهند تا در چاپ‌های بعدی تصحیح شود.

مترجمین - پاییز ۱۳۹۲

کتاب را با مروری بر مباحث نظریه‌ی محاسبات که در این درس مورد واکاوی قرار می‌گیرد آغاز می‌کنیم. بدین ترتیب، فرصتی برای یادگیری و یا مرور بعضی از مفاهیم ریاضی خواهید داشت که در ادامه به آن نیازمند خواهید بود.

۱- آتوماتا، محاسبه‌پذیری و پیچیدگی

این کتاب به صورت معمولی روی سه زمینه‌ی اصلی نظریه‌ی محاسبات متمرکز شده است: آتوماتا، محاسبه‌پذیری و پیچیدگی که با پرسش زیر به هم مرتبط شده‌اند:

قابلیت‌های پایه‌ای و محدودیت‌های کامپیوترها چه چیزهایی هستند؟

طرح این پرسش به سال ۱۹۳۰ باز می‌گردد؛ زمانی که عالمان منطق در علم ریاضی نخستین بار شروع به بررسی مفهوم محاسبات کردند. پیشرفت‌های تکنولوژی پس از آن زمان توانایی‌های ما را برای محاسبه بسیار افزایش داده است و این پرسش را از درون قلمرو نظریه به جهان ساخت عملی آورده است.

در هر یک از این زمینه‌ها، یعنی آتوماتا، محاسبه‌پذیری و پیچیدگی، این پرسش به شکل متفاوتی تفسیر می‌شود و پاسخ‌ها با توجه به تفاسیر، متفاوت است. بعد از این فصل مقدماتی، هر زمینه را در بخشی مجزا از این کتاب بررسی می‌کنیم. در این جا، این بخش‌ها را به ترتیب از انتها به ابتدا معرفی می‌کنیم چرا که با طرح موضوع از انتها، شما بهتر می‌توانید دلایل آن را درک کنید.

نظریه‌ی پیچیدگی

مسائل کامپیوتری به صورت‌های مختلفی ظاهر می‌شوند؛ بعضی‌ها ساده هستند و بعضی کمی پیچیده. برای مثال، مسأله‌ی مرتب‌سازی یک مسأله‌ی ساده است. فرض کنید لازم است که فهرستی از اعداد را به ترتیب صعودی مرتب کنید. حتی یک کامپیوتر کوچک هم می‌تواند میلیون‌ها عدد را نسبتاً سریع مرتب کند. این مسأله را با یک مسأله‌ی زمان‌بندی مقایسه کنید. فرض کنید که باید نوعی زمان‌بندی کلاس‌ها را برای یک دانشگاه مشخص کنید تا در بعضی محدودیت‌های معقول صدق کند، مانند این که هیچ دو کلاسی در یک اتاق و در یک زمان تشکیل نشود. به نظر می‌رسد که مسأله‌ی زمان‌بندی بسیار پیچیده‌تر از مسأله‌ی مرتب‌سازی باشد. اگر فقط هزار کلاس داشته باشیم، پیدا کردن بهترین زمان‌بندی حتی با یک ابر کامپیوتر، ممکن است قرن‌ها زمان لازم داشته باشد.

چه چیزی باعث می‌شود بعضی مسائل از نظر محاسباتی دشوار و بعضی دیگر ساده باشند؟

این سؤال اصلی نظریه‌ی پیچیدگی است. اگر چه به صورت چشم‌گیری در ۳۵ سال گذشته تحقیقات متمرکزی در این زمینه انجام شده است، اما پاسخ این پرسش هنوز مشخص نشده است. پیش‌تر، این سؤال جذاب و برخی از پیامدهای آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در یکی از دستاوردهای مهم نظریه‌ی پیچیدگی که تاکنون مشخص شده، محققان طرح جالبی را برای دسته‌بندی مسائل با توجه به دشواری محاسباتی آن‌ها کشف کرده‌اند. این دسته‌بندی شبیه جدول تناوبی برای دسته‌بندی عناصر با توجه به خواص شیمیایی آن‌هاست. با استفاده از این طرح، می‌توانیم روشی همراه با دلیل ارائه دهیم که نشان دهد برخی مسائل از نظر محاسباتی دشوارند، حتی اگر قادر نباشیم ثابت کنیم که آن‌ها پیچیده هستند.

وقتی با مسأله‌ای روبه‌رو می‌شوید که از نظر محاسباتی پیچیده به نظر می‌رسد، چند گزینه پیش روی‌تان وجود دارد. اول اینکه، بفهمید کدام جنبه‌ی مسأله، منشأ پیچیدگی آن است، بدین ترتیب شاید قادر باشید آن را طوری تغییر دهید که مسأله به‌سادگی قابل حل شود. دوم اینکه، شاید بتوانید خود را به جوابی نه چندان کامل هم قانع کنید. در برخی موارد پیدا کردن جواب‌هایی که فقط نزدیک به جواب کامل هستند نسبتاً آسان می‌باشد. سوم اینکه، بعضی از مسائل فقط در بدترین وضعیت‌شان پیچیده هستند، ولی در اکثر مواقع مسأله‌ای ساده‌اند. با توجه به کاربردشان، ممکن است به روشی که گاهی اوقات کند است ولی در اغلب مواقع به سرعت اجرا می‌شود راضی شوید. سرانجام، ممکن است انواع دیگری از محاسبات، مانند محاسبات تصادفی را در نظر بگیرید، که می‌تواند موجب تسریع در حل برخی از مسائل گردد.

یک زمینه‌ی کاربردی دیگر که به‌صورت مستقیم از نظریه‌ی پیچیدگی متأثر شده، زمینه‌ی قدیمی رمزگذاری است. در اکثر رشته‌ها، یک مسأله‌ی محاسباتی ساده ترجیح بیشتری نسبت به یک مسأله‌ی پیچیده دارد زیرا مسائل ساده برای حل، کم هزینه‌تر هستند. رمزگذاری امری غیرمعمول است زیرا به صورت خاص مستلزم مسائل محاسباتی خواهند بود که به جای این‌که ساده باشند پیچیده‌ترند، زیرا شکستن کدهای محرمانه بدون کلید یا رمز عبور محرمانه، امری دشوار است. نظریه‌ی پیچیدگی اشاره دارد که رمزنویس در راستای مسائل پیچیده‌ی محاسباتی موجود، کدهای جدید متحولی را طراحی می‌کند.

نظریه‌ی محاسبه‌پذیری

در بازه‌ی زمانی نیمه‌ی اول قرن بیستم، ریاضیدانانی مانند کورت گودل^۱، آلن تورینگ^۲ و آلنزو چرچ^۳ متوجه شدند که برخی مسائل پایه‌ای را نمی‌توان با استفاده از کامپیوترها حل کرد. مثالی از این پدیده، مسأله‌ی تعیین درستی یا نادرستی یک گزاره‌ی ریاضی است. این امر وظیفه‌ی اصلی ریاضیدانان است. به نظر می‌رسد که حل این مسأله از طریق کامپیوتر یک امر طبیعی باشد چرا که این موضوع به‌صورت کامل در قلمرو ریاضیات قرار دارد. ولی هیچ الگوریتم کامپیوتری نمی‌تواند این کار را انجام دهد.

از جمله پیامدهای این نتیجه‌ی عمیق ایجاد نگرشی درباره‌ی مدل‌های نظری کامپیوترها بود که سرانجام به ساخت کامپیوترهای واقعی منتهی شد.

نظریه‌های محاسبه‌پذیری و پیچیدگی کاملاً به هم وابسته هستند. در نظریه‌ی پیچیدگی، هدف دسته‌بندی مسائل به صورت مسائل ساده و مسائل پیچیده است، درحالی که در نظریه‌ی محاسبه‌پذیری، دسته‌بندی مسائل با توجه به مسائل قابل حل و غیرقابل حل صورت می‌پذیرد. نظریه‌ی محاسبه‌پذیری، تعدادی از مفاهیم به کار رفته در نظریه‌ی پیچیدگی را معرفی می‌کند.

نظریه‌ی آتوماتا

نظریه‌ی آتوماتا با تعاریف و ویژگی‌های مدل‌های محاسباتی ریاضی سروکار دارد. هر یک از این مدل‌ها در چند زمینه‌ی کاربردی علوم کامپیوتر نقشی دارند. یک مدل، که *آتوماتای متناهی* نامیده می‌شود، در پردازش متن، کامپایلرها و طراحی سخت‌افزار مورد استفاده قرار می‌گیرد. مدل دیگر، *گرامرهای مستقل* از متن نامیده می‌شود، که در زبان‌های برنامه‌نویسی و هوش مصنوعی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

نظریه‌ی آتوماتا نقطه‌ای عالی برای شروع مطالعه‌ی نظریه‌ی محاسبات است. نظریه‌های محاسبه‌پذیری و پیچیدگی نیاز دارند تا تعاریف دقیقی از کامپیوتر ارائه شود. نظریه‌ی آتوماتا شیوه‌ای را می‌پذیرد که مبتنی بر تعاریف رسمی محاسبات باشد چنانچه گویی مفاهیم مربوط به زمینه‌های غیر نظری دیگر علوم کامپیوتر را معرفی می‌کند.

۲- مفاهیم و اصطلاحات ریاضی

این بخش را مانند هر بحث علم ریاضی با بررسی موضوعات، ابزارها و نمادگذاری‌های ریاضیات پایه که پیش‌تر مورد استفاده قرار خواهند گرفت، آغاز می‌کنیم.

مجموعه‌ها

مجموعه، گروهی از اشیاست که به صورت یک واحد نمایش داده می‌شود. مجموعه‌ها می‌توانند شامل هر نوع شی‌ای باشند، از جمله: اعداد، نمادها و حتی مجموعه‌های دیگر. اشیای موجود در یک مجموعه *عناصر* یا *عضوهای* آن نامیده می‌شوند. مجموعه‌ها را به چند روش می‌توان به صورت رسمی توصیف کرد. یک روش از طریق فهرست عضوهای مجموعه‌ی داخل آکولاد است. مثلاً مجموعه‌ی

$$\{7, 21, 57\}$$

که شامل عضوهای 7، 21 و 57 است. نمادهای $\in$ و $\notin$ عضویت و عدم عضویت مجموعه را نشان می‌دهند. می‌نویسیم $7 \in \{7, 21, 57\}$ و $8 \notin \{7, 21, 57\}$. برای دو مجموعه‌ی A و B ، می‌گوییم A *زیرمجموعه‌ی* B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ ، هرگاه هر عضو A عضوی از B نیز باشد. A را *زیرمجموعه‌ی محض* B می‌نامیم و می‌نویسیم $A \subset B$ ، هرگاه A زیرمجموعه‌ی B باشد ولی برابر B نباشد.

ترتیب عناصر یک مجموعه و همچنین تکرار عضوهای آن مهم نیست. همان مجموعه را با نوشتن $\{57, 7, 7, 7, 21\}$ به دست می‌آوریم. اگر بخواهیم تعداد تکرار عضوها در شمارش را به دست آوریم گروه را به جای مجموعه، *مجموعه‌ی چندگانه* می‌نامیم. بنابراین $\{7\}$ و $\{7, 7\}$ با وجود آن‌که مجموعه‌های چندگانه‌ی متفاوتی هستند ولی مجموعه‌های یکسانی به شمار می‌آیند. یک *مجموعه‌ی نامتناهی* شامل تعداد نامتناهی عضو است. فهرستی از تمام عضوهای یک مجموعه‌ی نامتناهی را نمی‌توانیم بنویسیم، بنابراین گاهی اوقات از نماد

"..." به معنی، "دنباله تا ابد ادامه دارد" استفاده می‌کنیم. مثلاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathcal{N}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\{1, 2, 3, \dots\}.$$

مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathcal{Z}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

مجموعه‌ای با 0 عضو مجموعه‌ی تهی نامیده می‌شود و به صورت $\emptyset$ نشان داده می‌شود. وقتی بخواهیم عضوهای مورد نظر مجموعه را مطابق قانون مشخصی توصیف کنیم، می‌نویسیم {قانون مربوط به $n | n$ }. مثلاً {به ازای $\{n | n = m^2, m \in \mathcal{N}\}$ به معنی مجموعه‌ی مربعات کامل است.

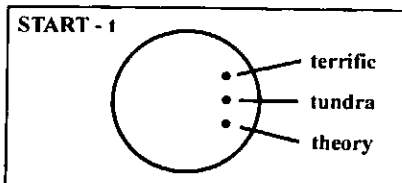
اگر دو مجموعه‌ی A و B را در نظر بگیریم، اجتماع A و B ، که به صورت $A \cup B$ نوشته می‌شود، مجموعه‌ای است که از طریق ترکیب تمام عضوهای A و B در یک مجموعه‌ی واحد به دست می‌آید. اشتراک A و B ، که به صورت $A \cap B$ نوشته می‌شود، مجموعه‌ای از اعضاها است که هم در A و هم در B هستند. مکمل A ، که به صورت $\bar{A}$ نوشته می‌شود، مجموعه‌ای از تمام عضوهای تحت بررسی است که در A نیستند.

همچون سایر موارد در علم ریاضی، یک تصویر به روشن شدن یک مفهوم کمک می‌کند. برای مجموعه‌ها، از نوعی تصویر به نام دیاگرام ون استفاده می‌کنیم. دیاگرام ون، مجموعه‌ها را به صورت نواحی محصور شده توسط خطوط دایره‌ای شکل نشان می‌دهند. فرض کنید مجموعه‌ی t -START مجموعه‌ای شامل تمام کلمات انگلیسی باشد که با حرف "t" شروع می‌شوند. برای مثال، در شکل ۰-۱ شکل دایره مجموعه‌ی t -START را نمایش می‌دهد. چند عضو این مجموعه به صورت نقاطی درون دایره نمایش داده شده‌اند.

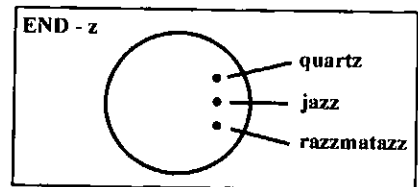
به صورت مشابه، مجموعه‌ی z -END، مجموعه‌ای از کلمات انگلیسی که به "z" ختم می‌شوند را به صورت شکل ۰-۲ نمایش می‌دهیم.

برای نمایش هر دو مجموعه در یک دیاگرام ون باید آن‌ها را به نحوی رسم کنیم که روی هم قرار بگیرند و همین امر مشخص می‌کند که آن‌ها در بعضی از عناصر مشترکند، همان‌گونه که در شکل ۰-۳ نشان داده شده است. برای مثال، کلمه‌ی *topaz* در هر دو مجموعه وجود دارد. در این شکل همچنین دایره‌ای برای مجموعه‌ی t -START وجود دارد. این دایره روی دایره‌ی t -START قرار نگرفته است زیرا هیچ کلمه‌ای در هر دو مجموعه قرار ندارد.

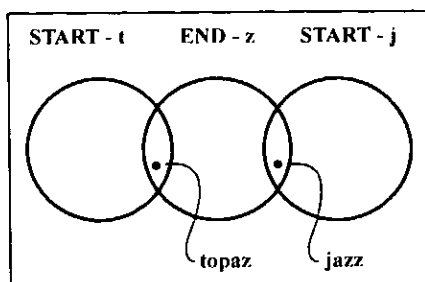
این دو دیاگرام ون (شکل ۰-۴) اجتماع و اشتراک مجموعه‌های A و B را نشان می‌دهند.



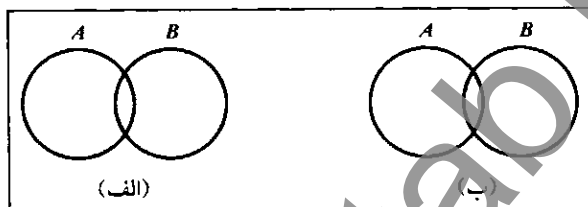
شکل ۰-۱ دیاگرام ون برای مجموعه‌ی کلمات انگلیسی شروع شده با "t".



شکل ۰-۲ دیاگرام ون برای مجموعه کلمات انگلیسی ختم شده به "z".



شکل ۳-۰ دایره‌های متقاطع مشخص کننده‌ی عناصر مشترک هستند.



شکل ۳-۰ دیاگرام‌هایی برای $A \cup B$ (الف) و $A \cap B$ (ب).

دنباله‌ها و چندتایی‌ها

دنباله‌ای از اشیاء فهرستی از اشیاء به ترتیبی مشخص است. معمولاً یک دنباله را به وسیله‌ی نوشتن فهرستی داخل پرانتزها نمایش می‌دهیم. برای مثال، دنباله‌ی 7، 21 و 57 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{7, 21, 57\}.$$

در مجموعه‌ها رعایت ترتیب مهم نیست، ولی در دنباله‌ها رعایت ترتیب مهم است. بنابراین $\{7, 21, 57\}$ با $\{7, 21, 7\}$ یکسان نیست. به صورت مشابه، تکرار در دنباله مهم است، ولی در مجموعه مهم نیست. از این رو $\{7, 7, 21, 57\}$ با هر دو دنباله‌ی آخر فرق دارد، درحالی‌که مجموعه‌ی $\{7, 21, 57\}$ با مجموعه‌ی $\{7, 7, 21, 57\}$ یکسان است.

همانند مجموعه‌ها، دنباله‌ها می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند. دنباله‌های متناهی اغلب اوقات **چندتایی‌ها** نامیده می‌شوند. دنباله‌ای با k عضو یک k -تایی است. مثلاً $\{7, 21, 57\}$ یک 3-تایی است. یک 2-تایی جفت نیز نامیده می‌شود.

مجموعه‌ها و دنباله‌ها می‌توانند به صورت عناصر مجموعه‌ها و دنباله‌های دیگر ظاهر شوند. برای مثال، مجموعه‌ی توانی A مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های A است. اگر A مجموعه‌ی $\{0, 1\}$ باشد، مجموعه‌ی توانی A مجموعه‌ی $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ است. مجموعه‌ی تمام جفت‌هایی که عضوهایشان 0ها و 1ها هستند $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ می‌باشد.

اگر A و B دو مجموعه باشند، ضرب دکارتی یا ضرب خارجی A و B که به صورت $A \times B$ نوشته می‌شود، مجموعه‌ی تمام جفت‌هایی است که در آن عنصر اول، عضوی از A و عنصر دوم عضوی از B می‌باشد.

مثال ۵-۰

اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{x, y, z\}$ ، آنگاه:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}.$$

همچنین می‌توانیم ضرب دکارتی k مجموعه‌ی $A_1, A_2, \dots, A_k$ را به‌دست آوریم، که به صورت $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ نوشته می‌شود. این ضرب مجموعه‌ای تشکیل شده از تمام k -تایی‌های $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ است که $a_i \in A_i$.

مثال ۶-۰

اگر A و B مانند مثال ۵-۰ باشند، آنگاه:

$$A \times B \times A = \{(1, x, 1), (1, x, 2), (1, y, 1), (1, y, 2), (1, z, 1), (1, z, 2), (2, x, 1), (2, x, 2), (2, y, 1), (2, y, 2), (2, z, 1), (2, z, 2)\}.$$

اگر ضرب دکارتی یک مجموعه با خودش را داشته باشیم، از مختصرنویسی

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_k = A^k$$

استفاده می‌کنیم.

مثال ۷-۰

مجموعه‌ی N^2 معادل $N \times N$ است. این مجموعه از تمام جفت‌های اعداد طبیعی تشکیل شده است که می‌توانیم آن را به صورت $\{(i, j) \mid i, j \geq 1\}$ بنویسیم.

توابع و روابط

توابع اساس ریاضیات هستند. تابع شی‌ای است که ارتباط ورودی-خروجی را پیدا می‌کند. تابع یک ورودی را دریافت می‌کند و یک خروجی را تولید می‌کند. در هر تابع، یک ورودی همواره یک خروجی را تولید می‌کند. اگر f را تابعی در نظر بگیریم که مقدار ورودی آن a و مقدار خروجی آن b باشد، آنگاه می‌نویسیم:

$$f(a) = b.$$

تابع را نگاشت نیز می‌نامند، $f(a) = b$ را چنین می‌خوانیم: f ، a را به b می‌نگارد.

برای مثال، تابع قدر مطلق abs عدد x را به‌عنوان ورودی می‌گیرد و هرگاه x مثبت باشد x را برمی‌گرداند و هرگاه x منفی باشد x را برمی‌گرداند. مثلاً $abs(2) = abs(-2) = 2$. عمل جمع مثال دیگری از تابع است، که به‌صورت add نوشته می‌شود. ورودی تابع جمع، یک جفت عدد است و خروجی، مجموع آن اعداد می‌باشد.

مجموعه‌ی ورودی‌های ممکن برای تابع دامنه‌ی آن نامیده می‌شود. خروجی‌های تابع مجموعه‌ای به‌نام برد آن را به‌دست می‌دهد برای این‌که نشان دهیم f تابعی با دامنه‌ی D و برد R است، از نماد زیر استفاده می‌کنیم:

$$f: D \rightarrow R$$

در مورد تابع abs ، اگر با اعداد صحیح سروکار داشته باشیم، دامنه و برد آن Z می‌باشند، بنابراین می‌نویسیم $abs: Z \rightarrow Z$. در مورد تابع جمع اعداد صحیح، دامنه، مجموعه‌ی جفت‌های عدد صحیح $Z \times Z$ و برد، Z است، بنابراین می‌نویسیم $add: Z \times Z \rightarrow Z$. توجه داشته باشید که ممکن است تابعی، الزاماً از تمام عضوهای برد مشخص شده استفاده نکند. تابع abs هرگز مقدار -1 را اختیار نمی‌کند اگرچه $-1 \in Z$. برای تابعی که از تمام عناصر برد استفاده می‌کند عبارت برد را می‌پوشاند، به کار می‌رود.

برای توصیف یک تابع خاص می‌توان از روش‌های متعددی استفاده کرد. یک روش از طریق فرآیند محاسبه‌ی خروجی از روی ورودی مشخص می‌باشد. روش دیگر با استفاده از جدولی است که تمام ورودی‌های ممکن را فهرست می‌کند و خروجی را برای هر ورودی ارائه می‌دهد.

مثال ۸-۰

تابع $f: \{0,1,2,3,4\} \rightarrow \{0,1,2,3,4\}$ را در نظر بگیرید:

n	$f(n)$
0	1
1	2
2	3
3	4
4	0

این تابع عدد ۱ را به ورودی‌اش اضافه می‌کند و سپس نتیجه را به پیمانه‌ی ۵ خارج می‌کند. یک عدد به پیمانه‌ی m باقیمانده‌ی آن عدد بر m است. برای مثال، عقربه‌ی دقیقه‌شمار در ساعت به پیمانه‌ی ۶۰ شمارش می‌کند. وقتی حساب پیمانه‌ای انجام می‌دهیم تعریف می‌کنیم $Z_m = \{0,1,2,\dots,m-1\}$ با استفاده از این نماد، تابع f فوق‌الذکر فرمی به صورت $f: Z_5 \rightarrow Z_5$ دارد.

مثال ۹-۰

هرگاه دامنه‌ی تابع، ضرب دکارتی دو مجموعه باشد گاهی اوقات از جدول دو بعدی استفاده می‌شود. در این جا تابع دیگر، تابع $g: Z_4 \times Z_4 \rightarrow Z_4$ است. درایه‌ی واقع در سطر برچسب‌دار i و ستون برچسب‌دار j در جدول، مقدار $g(i,j)$ است.

g	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

تابع g تابع جمع به پیمانه‌ی ۴ است.

اگر دامنه‌ی تابع f به‌ازای بعضی مجموعه‌های $A_1, \dots, A_k$ برای $A_1 \times \dots \times A_k$ باشد، ورودی f یک k -تایی ($a_1, a_2, \dots, a_k$) است که a_i ها را آرگومان‌های f می‌نامیم. تابعی با k آرگومان، تابع k -تایی نامیده می‌شود و k را مرتبه‌ی تابع می‌نامیم. اگر k برابر ۱ باشد، f تنها یک آرگومان دارد و f یک تابع یگانه نامیده می‌شود. اگر k برابر ۲ باشد، f یک تابع دودویی است. برخی توابع دودویی معروف بر حسب نمادگذاری میانوندی خاصی نوشته می‌شوند، که تنها حاوی یک نماد به جای تابع‌اند که بین دو آرگومان آن قرار می‌گیرند، نه مانند نمادگذاری پیشوندی، با استفاده از نماد قبلی. برای مثال، تابع جمع add معمولاً برحسب نمادگذاری میانوندی با استفاده از نماد $+$ بین دو آرگومان‌ش مانند $a + b$ به جای نمادگذاری پیشوندی $add(a, b)$ نوشته می‌شود.

گزاره^۱ یا مشخصه^۲ تابعی است که بُرد آن $\{TRUE, FALSE\}$ می‌باشد. برای مثال، فرض کنید $even$ مشخصه‌ای باشد که $TRUE$ است، هرگاه ورودی‌اش یک عدد زوج و $FALSE$ است هرگاه ورودی‌اش یک عدد فرد باشد. بنابراین $even(4) = TRUE$ و $even(5) = FALSE$.

مشخصه‌ای که دامنه‌اش مجموعه‌ی k -تایی $A \times \dots \times A$ است رابطه، رابطه‌ی k -تایی، یا رابطه‌ی k -تایی روی A نامیده می‌شود. یک حالت متداول رابطه‌ی ۲-تایی است، که رابطه‌ی دودویی نامیده می‌شود. هنگام نوشتن یک عبارت شامل رابطه‌ی دودویی، معمولاً از نمادگذاری میانوندی استفاده می‌کنیم. برای مثال، "کوچک‌تر از" رابطه‌ای است که معمولاً با نماد عمل میانوندی $<$ نوشته می‌شود. رابطه‌ی "تساوی" که با نماد $=$ نوشته می‌شود رابطه‌ی معروف دیگری است. اگر R یک رابطه‌ی دودویی باشد، عبارت aRb به این معنی است که $aRb = TRUE$. به‌طور مشابه اگر R یک رابطه‌ی k -تایی باشد، عبارت $R(a_1, \dots, a_k)$ به معنای $R(a_1, \dots, a_k) = TRUE$ می‌باشد.

مثال ۱۰-۱

در یک بازی کودکانه به نام قیچی - کاغذ - سنگ، دو بازیکن به‌طور همزمان عضوی از مجموعه‌ی {قیچی، کاغذ، سنگ} را انتخاب می‌کنند و انتخاب خود را با علامت‌های قراردادی دست نشان می‌دهند. اگر دو انتخاب یکسان باشند، بازی دوباره شروع می‌شود. اگر انتخاب‌ها متفاوت باشند، یک بازیکن مطابق رابطه‌ی $beats$ برنده می‌شود.

beats	SCISSORS	PAPER	STONE
SCISSORS	FALSE	TRUE	FALSE
PAPER	FALSE	FALSE	TRUE
STONE	TRUE	FALSE	FALSE

با توجه به این جدول مشخص می‌کنیم که، کاغذ $beats$ قیچی، $TRUE$ است و قیچی $beats$ کاغذ، $FALSE$ است.

گاهی اوقات، توصیف گزاره‌ها با استفاده از مجموعه‌ها به جای توابع مناسب‌تر است. گزاره‌ی $P: D \rightarrow \{TRUE, FALSE\}$ را می‌توان به صورت (D, S) نوشت، که $S = \{a \in D \mid p(a) = TRUE\}$ ، یا اگر دامنه‌ی D از روی متن واضح باشد فقط می‌نویسیم S . بنابراین رابطه‌ی $beats$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$\{(قیچی, سنگ), (سنگ, کاغذ), (کاغذ, قیچی)\}$

نوع خاصی از رابطه‌ی دودویی، **رابطه‌ی هم‌ارزی** نامیده می‌شود، این رابطه، برابر بودن مفهوم دو شیء در بعضی خصوصیات را تضمین می‌کند. رابطه‌ی دودویی R رابطه‌ی هم‌ارزی نامیده می‌شود هرگاه R در سه شرط زیر صدق کند:

۱. R بازتابی باشد یعنی به ازای هر x ، xRx ؛
۲. R متقارن باشد یعنی به ازای هر x و y ، از xRy نتیجه بگیریم yRx ؛
۳. R تعدی باشد یعنی به ازای هر x, y, z ، از xRy و yRz نتیجه بگیریم xRz .

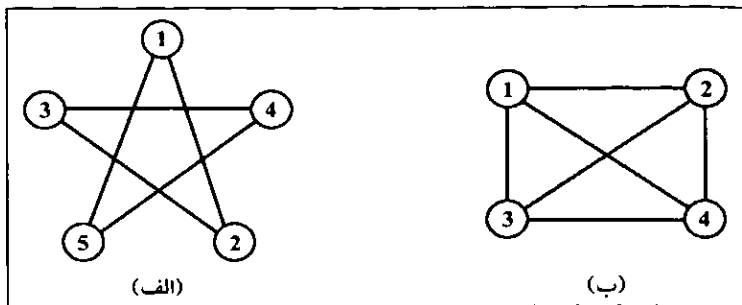
مثال ۱۱-۰۰

رابطه‌ی هم‌ارزی روی اعداد طبیعی که به صورت $\equiv_7$ نوشته می‌شود را تعریف می‌کنیم. برای $i, j \in \mathbb{N}$ می‌گوییم $i \equiv_7 j$ هرگاه $i - j$ مضرب ۷ باشد. این رابطه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است زیرا در سه شرط گفته شده صدق می‌کند. اول این‌که، بازتابی است. چون $i - i = 0$ ، که مضرب ۷ است. دوم این‌که، متقارن است، چون $i - j$ مضرب ۷ است، هرگاه $j - i$ مضرب ۷ باشد سوم این‌که، تعدی است، چون اگر $i - j$ و $j - k$ مضرب ۷ باشند، آن‌گاه $i - k = (i - j) + (j - k)$ مجموع دو مضرب ۷ است و لذا مضرب ۷ نیز می‌باشد.

گراف‌ها

یک **گراف بدون جهت**، یا به طور ساده یک **گراف**، مجموعه‌ای از نقاط همراه با خطوطی است که بعضی از این نقاط را به هم وصل می‌کنند. هر یک از نقاط را **گره‌ی رأس** می‌نامند و هر یک از خط‌ها **یال** نامیده می‌شود، همان‌گونه که در شکل ۱۲-۰ نشان داده شده است.

تعداد یال‌ها در یک گره‌ی خاص **درجه‌ی آن گره** نامیده می‌شود. در شکل ۱۱-۰ (الف) تمام گره‌ها دارای درجه‌ی ۲ هستند. در شکل ۱۲-۰ (ب) تمام گره‌ها دارای درجه‌ی ۳ هستند. پس از یک یال بین دو رأس دلخواه مجاز نیست.



شکل ۱۲-۰ مثال‌هایی از گراف.

در یک گراف G که شامل گره‌های i و j است، جفت (i, j) یالی را نمایش می‌دهد که i و j را به هم وصل می‌کند. در گراف بدون جهت، ترتیب i و j مهم نیست، بنابراین جفت‌های (i, j) و (j, i) یال یکسانی را نمایش می‌دهند. هرگاه ترتیب گره‌ها مهم نباشد گاهی اوقات یال‌ها را با استفاده از مجموعه‌ها، به جای جفت‌ها توصیف می‌کنیم، مانند $\{i, j\}$. اگر V مجموعه‌ی گره‌های G و E مجموعه‌ی یال‌ها باشد، می‌گوییم $G = (V, E)$. گراف را می‌توانیم با استفاده از دیاگرام یا به‌طور رسمی‌تر، از طریق مشخص کردن V و E توصیف کنیم. برای مثال، توصیف رسمی گراف شکل ۱۲-الف) به‌صورت

$$\left(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}\right)$$

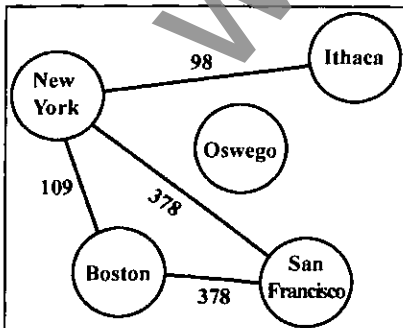
می‌باشد و توصیف رسمی گراف شکل ۱۲-ب) به‌صورت زیر است:

$$\left(\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}\right).$$

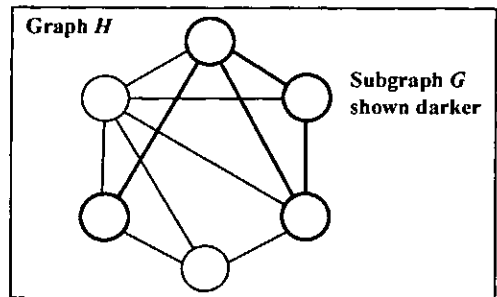
گراف‌ها اغلب برای داده‌های نمایش استفاده می‌شوند. گره‌ها را می‌توان شهرها و یال‌ها را به‌عنوان راه‌های اصل فرض کرد، یا این‌که گره‌ها می‌توانند قطعات الکتریکی و یال‌ها سیم‌های بین آن‌ها باشند. گاهی اوقات، جهت سهولت کار، گره‌ها و/یا یال‌های گراف را برچسب می‌زنیم، که در این صورت آن گراف، **گراف برچسب‌دار** نامیده می‌شود. شکل ۱۳-۰ گرافی را نشان می‌دهد که گره‌هایش، شهرها و یال‌هایش هزینه‌ی ارزان‌ترین کرایه‌ی هوایی مستقیم برای مسافرت بین آن شهرها بر حسب دلار است، هرگاه پرواز مستقیمی بین آن شهرها ممکن باشد.

گراف G را زیرگراف H می‌نامیم هرگاه گره‌های G زیرمجموعه‌ای از گره‌های H و یال‌های G بر روی گره‌های متناظر باشند. شکل ۱۴-۰، گراف H و زیرگراف G را نشان می‌دهد.

مسیر در یک گراف دنباله‌ای از گره‌هاست که توسط یال‌هایی به هم متصل شده‌اند. مسیر ساده مسیری است که هیچ گره‌ی تکراری نداشته باشد. هرگاه مسیری بین هر دو رأس یک گراف وجود داشته باشد آن گراف را یک **گراف همبند** می‌نامیم. یک مسیر را دور گویند هرگاه شروع و پایان مسیر یک گره باشد. دور ساده دوری است که حداقل سه گره را شامل شود و فقط اولین و آخرین گره تکراری باشند. یک گراف را درخت می‌نامیم هرگاه همبند بوده هیچ دور ساده‌ای نداشته باشد، همان‌طور که در شکل ۱۵-۰ نشان داده شده

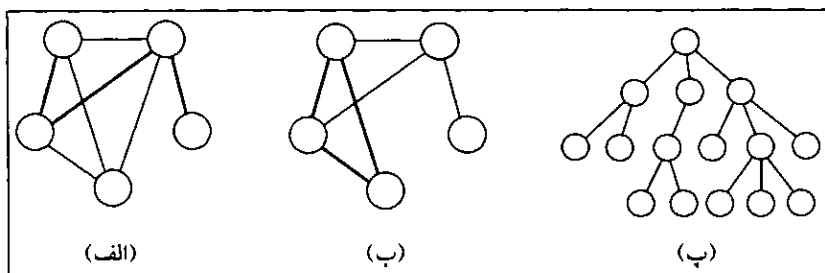


شکل ۱۳-۰ ارزان‌ترین کرایه‌ی هوایی بدون توقف بین شهرهای مختلف.



شکل ۱۴-۰

گراف G (تیره‌تر نشان داده شده) یک زیرگراف H است.



شکل ۱۵- (الف) یک مسیر در گراف، (ب) یک دور در گراف و (پ) یک درخت.

است. درخت می‌تواند شامل گره‌ی مشخص خاصی به نام ریشه باشد. گره‌هایی با درجه‌ی ۱ در درخت، به غیر از ریشه، برگ‌های درخت نامیده می‌شوند.

اگر در گراف به جای خطوط پیکان وجود داشته باشد، آن گراف یک **گراف جهت‌دار** است، همان‌گونه که در شکل ۱۶- نشان داده شده است. تعداد پیکان‌های خارج شده از یک گره‌ی خاص **درجه‌ی خروجی** آن گره و تعداد پیکان‌های وارد شده به یک گره خاص را **درجه‌ی ورودی** آن گره می‌نامند.

در گراف جهت‌دار یالی از رأس i به رأس j را به صورت جفت (i, j) نمایش می‌دهیم. توصیف رسمی گراف جهت‌دار G ، (V, E) است که V مجموعه‌ی گره‌ها و E مجموعه‌ی یال‌ها می‌باشد. توصیف رسمی گراف شکل ۱۶- به صورت زیر است:

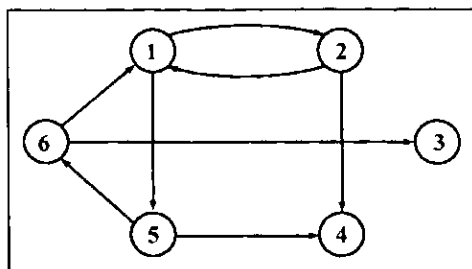
$$\left(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3)\} \right).$$

مسیری که در آن نوک تمام پیکان‌ها مانند گام‌هایشان در یک جهت باشد، **مسیر جهت‌دار** نامیده می‌شود. یک گراف جهت‌دار **همبند قوی** است هرگاه مسیر جهت‌داری هر دو گره را به هم وصل کند.

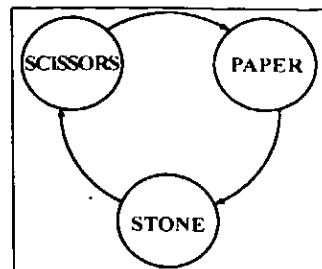
مثال ۱۷-۰

گراف جهت‌دار نشان داده شده در شکل ۱۸-۰ رابطه‌ی ارائه شده در مثال ۱۰-۰ را نمایش می‌دهد.

گراف‌های جهت‌دار روشی ساده برای نشان دادن روابط دودویی هستند. اگر R یک رابطه‌ی دودویی باشد که دامنه‌اش $D \times D$ است، گراف برچسب‌دار $G = (D, E)$ ، R را نمایش می‌دهد، که $E = \{(x, y) \mid xRy\}$. شکل ۱۸-۰ این نمایش را روشن می‌کند.



شکل ۱۶-۰ گراف جهت‌دار.



شکل ۱۸-۰ گراف رابطه‌ی *beats*.

اگر V مجموعه‌ی گره‌ها و E مجموعه‌ی یال‌ها باشد، نمادی برای گراف G که از این گره‌ها و یال‌ها تشکیل شده است، $G = (V, E)$ می‌باشد.

رشته‌ها و زبان‌ها

اجزای اصلی علم کامپیوتر رشته‌هایی از کاراکترها هستند. الفبایی که در آن رشته تعریف می‌شوند ممکن است با توجه به کاربرد متفاوت باشند. در راستای هدفمان، الفبا را به صورت هر مجموعه‌ی متناهی غیرتهی تعریف می‌کنیم. عضوهای الفبا را **نمادهای الفبا** می‌نامند. به طور کلی برای نمایش الفباها از حروف بزرگ یونانی Σ و Γ ، و برای نمایش نمادهای الفبا از فونت تحریری استفاده می‌کنیم. چند مثال از الفبا در زیر آمده است:

$$\Sigma_1 = \{0, 1\};$$

$$\Sigma_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\};$$

$$\Gamma = \{0, 1, x, y, z\}.$$

یک رشته روی الفبا دنباله‌ای متناهی از نمادها با استفاده از آن الفباست، که معمولاً پشت سر هم نوشته شده و به وسیله‌ی کاماها جدا نشده‌اند. اگر $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ ، در این صورت 01001 رشته‌ای روی Σ_1 است. اگر $\Sigma_2 = \{a, b, c, \dots, z\}$ آنگاه *abracadabra* یک رشته روی Σ_2 است. اگر w رشته‌ای روی Σ باشد، طول w ، به صورت $|w|$ نوشته شده، برابر تعداد نمادهای موجود در آن رشته است. رشته‌ای به طول صفر **رشته‌ی تهی** نامیده شده و به صورت ε نوشته می‌شود. رشته‌ی تهی نقش 0 در سیستم اعداد را بازی می‌کند. اگر w طولی برابر n داشته باشد، می‌توانیم بنویسیم $w = w_1 w_2 \dots w_n$ که هر $w_i \in \Sigma$. **معکوس w** که به صورت w^R نوشته می‌شود رشته‌ای است که از طریق نوشته شدن w به ترتیب عکس به دست می‌آید (یعنی، $w_1 w_2 \dots w_n$ رشته‌ی z یک زیررشته‌ی w است هرگاه به طور متوالی داخل w ظاهر شود. برای مثال *cad* یک زیررشته‌ی *abracadabra* می‌باشد.

اگر رشته‌ی x به طول m و رشته‌ی y به طول n را در نظر بگیریم، **اتصال x و y** ، به صورت xy نوشته شده، رشته‌ای است که از طریق افزودن y به انتهای x به دست می‌آید، مانند $y_1 \dots y_n x_1 \dots x_m$. برای اتصال یک رشته با خودش بسیاری اوقات از نماد توان به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\overbrace{xx \dots x}^k = x^k$$

ترتیب الفبایی رشته‌ها، همان ترتیب آشنای فرهنگ لغت است، گاهی اوقات از ترتیب الفبایی اصلاح شده استفاده می‌کنیم که ترتیب shortlex یا به اختصار ترتیب رشته‌ای نامیده می‌شود و همانند ترتیب الفبایی است، با این تفاوت که رشته‌های کوتاه‌تر قبل از رشته‌های طولانی‌تر قرار می‌گیرند. بنابراین ترتیب الفبایی تمام رشته‌ها روی الفبای $\{0, 1\}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$(\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots)$$

زبان مجموعه‌ای از رشته‌هاست.

رشته‌ی x پیشوند رشته‌ی y نامیده می‌شود هرگاه رشته‌ای مانند z وجود داشته باشد که $xz = y$ و x پیشوند سره یا محض y است هرگاه علاوه بر آن $x \neq y$ باشد. زبان مجموعه‌ای از رشته‌هاست. یک زبان پیشوند – آزاد است هرگاه هیچ عضو در آن پیشوند محض عضو دیگر نباشد.

منطق بولی

منطق بولی یک سیستم ریاضی است که پیرامون دو مقدار $TRUE$ و $FALSE$ ساخته شده است. اگرچه در آغاز به عنوان ریاضیات محض تصور می شد اما اکنون این سیستم، اساس الکترونیک های دیجیتال و طراحی کامپیوتر است. مقادیر $TRUE$ و $FALSE$ مقادیر بولی نامیده می شوند و اغلب اوقات با مقادیر 1 و 0 نمایش داده می شوند. مقادیر بولی در وضعیت هایی با دو حالت ممکن استفاده می شوند، مانند سیمی که می تواند دارای ولتاژ زیاد یا کم باشد، گزاره ای که می تواند درست یا نادرست باشد، یا سؤالی که می تواند با بله یا خیر پاسخ داده شود. عملیات بر روی مقادیر بولی را می توانیم با استفاده از عمل های طراحی شده ی خاصی، به نام عمل های بولی انجام دهیم. ساده ترین این اعمال نقیض یا عمل NOT است، که با نماد $\neg$ نمایش داده می شود. نقیض یک مقدار بولی، مقدار مخالف آن است. بنابراین $0=1$ و $1=0$. ترکیب عطفی، یا AND، عملی است که با نماد $\wedge$ نمایش داده می شود. ترکیب عطفی دو مقدار بولی برابر 1 است، هرگاه هر دوی آن ها مقدار 1 داشته باشند. ترکیب فصلی، یا OR، عملی است که با نماد $\vee$ مشخص می شود. ترکیب فصلی دو مقدار بولی برابر 1 است، هرگاه هر کدام از آن مقادیر 1 داشته باشند. این اطلاعات را به صورت زیر خلاصه می کنیم:

$$\begin{array}{lll} 0 \wedge 0 = 0 & 0 \vee 0 = 0 & \neg 0 = 1 \\ 0 \wedge 1 = 0 & 0 \vee 1 = 1 & \neg 1 = 0 \\ 1 \wedge 0 = 0 & 1 \vee 0 = 1 & \\ 1 \wedge 1 = 1 & 1 \vee 1 = 1 & \end{array}$$

از اعمال بولی برای ترکیب جملات ساده به عبارات بولی پیچیده تر استفاده می کنیم، درست همان گونه که از عمل های محاسباتی $+$ و $\times$ برای ساختن عبارت های محاسباتی پیچیده استفاده می کنیم. برای مثال، اگر P نشان دهنده ی درستی جمله ی "خورشید درخشان است" باشد و Q درستی جمله ی "امروز دوشنبه است" را نشان دهد، برای نمایش درستی مقدار جمله ی "خورشید درخشان است و امروز دوشنبه است" می توانیم بنویسیم $P \wedge Q$ و به طور مشابه برای نمایش درستی مقدار جمله ی "خورشید درخشان است یا امروز دوشنبه است" می توانیم بنویسیم $P \vee Q$. مقادیر P و Q عملوندهای عمل نامیده می شوند.

گاهی اوقات عمل های بولی دیگری به چشم می خورند یای انحصاری یا XOR که با نماد $\oplus$ نمایش داده می شود و برابر 1 است هرگاه یکی از دو عملوند آن ولی نه هر دو 1 باشد. عمل برابری، با نماد $\leftrightarrow$ نشان داده می شود که برابر 1 است هرگاه هر دو عملوند آن مقدار یکسانی داشته باشند. در پایان، عمل استلزام با نماد $\rightarrow$ نمایش داده می شود و برابر 0 است هرگاه عملوند اول آن 1 و عملوند دوم آن 0 باشد؛ غیر از این $\rightarrow$ برابر 1 است. این اطلاعات را به صورت زیر خلاصه می کنیم:

$$\begin{array}{lll} 0 \oplus 0 = 0 & 0 \leftrightarrow 0 = 1 & 0 \rightarrow 0 = 1 \\ 0 \oplus 1 = 1 & 0 \leftrightarrow 1 = 0 & 0 \rightarrow 1 = 1 \\ 1 \oplus 0 = 1 & 1 \leftrightarrow 0 = 0 & 1 \rightarrow 0 = 0 \\ 1 \oplus 1 = 0 & 1 \leftrightarrow 1 = 1 & 1 \rightarrow 1 = 1 \end{array}$$

روابط گوناگونی را می توانیم در میان این اعمال به وجود آوریم. در حقیقت، تمام عمل های بولی را می توانیم برحسب عمل های AND و NOT بیان کنیم؛ همان گونه که در اتحادهای زیر نشان می دهیم. دو عبارت موجود

در هر سطر هم‌ارزند. هر سطر عمل موجود در ستون سمت چپ را برحسب عمل‌های بالای آن و AND و NOT بیان می‌کند.

$$\begin{aligned} P \vee Q & \quad \neg(\neg P \wedge \neg Q) \\ P \rightarrow Q & \quad \neg P \vee Q \\ P \leftrightarrow Q & \quad (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \\ P \oplus Q & \quad \neg(P \leftrightarrow Q) \end{aligned}$$

قانون پخشی برای AND و OR، جهت راحتی در انجام عملیات بر روی عبارت‌های بولی، متداول می‌باشد. این قانون مشابه قانون پخشی برای جمع و ضرب است، که بیان می‌کند $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. نسخه‌ی بولی به دو صورت ظاهر می‌شود:

- $P \wedge (Q \vee R)$ برابر است با $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ و دوگان آن.
- $P \vee (Q \wedge R)$ برابر است با $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

توجه داشته باشید که دوگان قانون پخشی برای جمع و ضرب در حالت کلی برقرار نیست.

خلاصه‌ی اصطلاحات ریاضی

الفبا	مجموعه‌ای متناهی از اشیا که نمادها نامیده می‌شوند
آرگومان	ورودی برای تابع
رابطه‌ی دودویی	رابطه‌ای که دامنه‌اش مجموعه‌ای از جفت‌هاست
عمل بولی	عملی روی مقادیر بولی
مقدار بولی	مقادیر TRUE یا FALSE که اغلب توسط 1 یا 0 نمایش داده می‌شوند
ضرب دکارتی	عملی روی مجموعه‌ها که مجموعه‌ی همه‌ی جندتایی‌ها از عناصر را با استفاده از مجموعه‌های مربوطه می‌سازد
مکمل	عملی روی یک مجموعه که مجموعه‌ی عناصر غیر موجود را می‌سازد
اتصال	عملی که رشته‌هایی از یک مجموعه و رشته‌هایی از مجموعه‌ی دیگر را به هم می‌چسباند
ترکیب عطفی	عمل AND بولی
گراف همبند	گراف با مسیرهایی که هر دو گره را به هم متصل می‌کند
دور	مسیری که شروع و پایان آن در یک گره است
گراف جهت‌دار	مجموعه‌ای از نقاط و پیکان‌هایی که بعضی جفت نقاط را به هم متصل می‌کند
ترکیب فصلی	عمل OR منطقی
دامنه	مجموعه‌ای از ورودی‌های ممکن برای یک تابع است
یال	خط در یک گراف
عنصر	شی‌ای در یک مجموعه
مجموعه‌ی تهی	مجموعه‌ی بدون عضو
رشته‌ی تهی	رشته‌ای به طول صفر
رابطه‌ی هم‌ارزی	رابطه‌ی دودویی که بازتابی، متقارن و تعدی باشد
تابع	عملی که ورودی‌ها را به خروجی‌ها تبدیل می‌کند
گراف	مجموعه‌ای از نقاط و خطوطی که بعضی جفت نقاط را به هم متصل می‌کند

اشتراک	عملی روی مجموعه‌ها که مجموعه‌ای از عناصر مشترک می‌سازد
k - تایی	فهرستی از k شیء
زبان	مجموعه‌ای از رشته‌ها
عضو	شیء‌ای در یک مجموعه
گره	نقطه‌ای در یک گراف
جفت	فهرستی از دو عنصر، که 2 - تایی نیز نامیده می‌شود
مسیر	دنباله‌ای از گره‌ها در یک گراف که از طریق یال‌ها به هم متصل شده‌اند
گزاره	تابعی که برد آن $\{TRUE, FALSE\}$ است
مشخصه	گزاره
برد	مجموعه‌ای که خروجی‌های تابع از آن دریافت می‌شود
رابطه	گزاره، در بیشتر حالات معمولاً زمانی که دامنه مجموعه‌ای از k - تایی‌ها است
دنباله	فهرستی از اشیاء
مجموعه	گروهی از اشیاء
مسیر ساده	مسیر بدون تکرار
رشته	فهرستی متناهی از نمادهای حاصل از الفبا
نماد	عضوی از یک الفبا
درخت	گراف همبند فاقد دور ساده
اجتماع	عملی روی مجموعه‌ها که تمام عناصر را در یک مجموعه ترکیب می‌کند
رأس	نقطه در یک گراف

۳- تعاریف، قضایا و اثبات‌ها

قضایا و اثبات‌ها قلب و جان ریاضیات و تعاریف روح آن هستند. این سه نهاد برای هر موضوع ریاضی، از جمله برای ما، نقشی اساسی دارند.

تعاریف، اشیاء و مفاهیم مورد استفاده را توصیف می‌کند. یک تعریف ممکن است ساده باشد، مانند تعریف مجموعه که قبلاً در همین فصل به آن اشاره شد، یا پیچیده باشد مانند تعریف امنیت در یک سیستم رمزگذاری. دقیق بودن برای هر تعریف ریاضی ضروری است. وقتی شیء‌ای را تعریف می‌کنیم باید آنچه را که آن شیء تشکیل می‌دهد یا تشکیل نمی‌دهد آشکارا نشان دهیم.

پس از آن که اشیاء و مفاهیم مختلف را تعریف کردیم، معمولاً **جملات ریاضی** در مورد آن‌ها را به دست می‌آوریم. معمولاً یک جمله ویژگی‌های به‌خصوص یک شیء را بیان می‌کند. جمله ممکن است درست یا نادرست باشد، ولی همانند تعریف، باید دقیق باشد. نباید هیچ‌گونه ابهامی در معنی آن وجود داشته باشد.

اثبات یک استدلال منطقی متقاعدکننده است که نشان می‌دهد یک جمله درست است. در ریاضیات یک استدلال باید قطعی و دقیق باشد، یعنی، به مفهوم مطلق، متقاعدکننده باشد. در زندگی روزمره یا در قانون، استاندارد اثبات پایین‌تر است. تقاضاهای محاکمه‌ی قتل عمد "بدون هیچ شک معقولی" اثبات می‌شوند. ارزش مدارک ممکن است هیأت منصفه را مجبور کند که بی‌گناهی یا گناه کار بودن یک متهم را بپذیرد. ولی، مدارک هیچ نقشی در اثبات ریاضی بازی نمی‌کنند. ریاضی‌دان نیازها را بدون هیچ‌گونه شکی اثبات می‌کند.

قضیه یک جمله‌ی ریاضی است که درستی آن اثبات شده است. معمولاً استفاده از این واژه را برای جملاتی که اهمیت خاصی دارند منحصر می‌کنیم. گاهی اوقات جملاتی را ثابت می‌کنیم که فقط جالب توجه هستند زیرا آن‌ها به اثبات جملات دیگر، یعنی جمله‌ی مهم‌تر کمک می‌کنند. چنین جملاتی **لم** نامیده می‌شوند. گاهی اوقات یک قضیه یا اثبات آن به ما اجازه می‌دهد تا قضایای دیگری را نتیجه‌گیری کنیم؛ یعنی جملات وابسته‌ای که درست هستند؛ این جملات **نتایج** قضیه نامیده می‌شوند.

پیدا کردن اثبات‌ها

تنها راه برای تعیین درستی یا نادرستی جمله‌ی ریاضی استفاده از اثبات ریاضی است. متأسفانه، یافتن اثبات‌ها همیشه ساده نیست. یافتن اثبات نمی‌تواند به مجموعه‌ی ساده‌ای از قوانین یا فرآیندها خلاصه شود. در طول این درس، از شما خواسته خواهد شد که اثبات‌هایی از جملات مختلف ارائه دهید. برای انجام این کار مایوس نشوید! حتی اگر هیچ راهکاری برای ارائه‌ی اثبات‌ها ندارید، برخی از ترفندهای کلی مفیدی که در دسترس دارید را به کار بگیرید.

در ابتدا، جمله‌ای که می‌خواهید ثابت کنید را به دقت بخوانید. آیا تمام مفاهیم را فهمیده‌اید؟ جمله را با کلمات خودتان بازنویسی کنید. آن را تجربه کنید و هر قسمت را به طور جداگانه در نظر بگیرید.

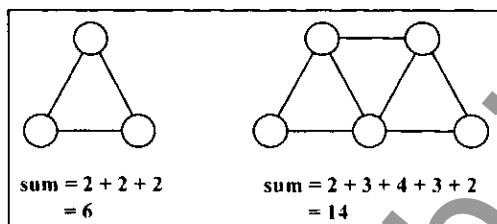
گاهی اوقات بخش‌های مختلف یک جمله‌ی چند قسمتی بلافاصله مشخص نمی‌شود. یک نوع جمله‌ی چند قسمتی که اغلب یافت می‌شود به فرم " P اگر و تنها اگر Q " است، که معمولاً به صورت " $P \text{ iff } Q$ " نوشته می‌شود، که P و Q هر دو جملات ریاضی هستند. این نمادگذاری نوعی مختصرنویسی برای یک جمله‌ی دو قسمتی می‌باشد. قسمت اول " P فقط اگر Q " است، که به این معنی است که: اگر P درست باشد، آنگاه Q نیز درست است و به صورت $P \Rightarrow Q$ نوشته می‌شود. قسمت دوم " Q اگر P " است، که به این معنی است که: اگر Q درست باشد، آنگاه P درست است و به صورت $P \Leftarrow Q$ نوشته می‌شود. قسمت اول جهت **مستقیم** جمله‌ی اولیه و قسمت دوم جهت **معکوس** نامیده می‌شود. " P اگر و تنها اگر Q " را به صورت $P \Leftrightarrow Q$ می‌نویسیم. برای اثبات جمله‌ای به این شکل باید هر دو جهت را ثابت کنیم. اغلب، اثبات یکی از این جهت‌ها آسان‌تر از جهت دیگر است.

نوع دیگری از جمله‌ی چند قسمتی وجود دارد که برابری دو مجموعه‌ی A و B را بیان می‌کند. قسمت اول بیان می‌کند که مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی B است و در قسمت دوم بیان می‌کند که مجموعه‌ی B زیرمجموعه‌ی A است. بنابراین یک روش ساده برای اثبات این موضوع که $A = B$ ، این است که ثابت کنیم هر عضو A عضوی از B نیز می‌باشد و هر عضو B عضوی از A نیز است.

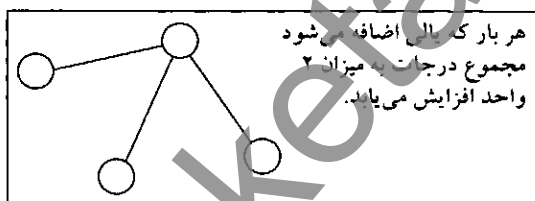
در ادامه، هرگاه بخواهید جمله یا قسمتی از آن را ثابت کنید، سعی کنید یک درک شهودی به دست آورید؛ احساس "عمیقی" از اینکه چرا جمله باید درست باشد. آزمایش با چند مثال، بسیار مفید و خوب است. مثلاً، هرگاه جمله ادعا می‌کند که تمام اشیاء یک نوع مشخص، دارای ویژگی به خصوصی هستند، چند شیء از آن نوع را انتخاب کنید و ببینید که آیا واقعاً آن اشیاء دارای ویژگی مورد نظر هستند. پس از انجام این کار، سعی کنید شیء‌ای را پیدا کنید که دارای آن ویژگی نباشد، این شیء **مثال نقض** نامیده می‌شود. اگر جمله واقعاً درست باشد، قادر نخواهید بود مثال نقض پیدا کنید. وقتی که تلاش می‌کنید مثال نقضی پیدا کنید هر جا که مشاهده کردید با مشکلی مواجه شده‌اید می‌توانید دریابید که چرا جمله درست است.

فرض کنید بخواهید جمله‌ی "برای هر گراف G ، مجموع درجه‌ی تمام گره‌های G عددی زوج است" را ثابت کنید.

ابتدا، چند گراف انتخاب کنید و این جمله را در عمل مورد بررسی قرار دهید. در این‌جا دو مثال ارائه شده است.



در مرحله‌ی بعد، سعی کنید مثال نقضی پیدا کنید، یعنی، گرافی که در آن مجموع درجات، عددی فرد باشد.



آیا اکنون می‌توانید شروع به بررسی کنید که چرا جمله درست است، در این صورت چگونه آن را ثابت

می‌کنید؟

اگر هنوز برای اثبات یک جمله‌ی پیچیده سردرگم هستید، سعی کنید یکی از اجزای آن را ساده‌تر کنید. سعی کنید حالت خاصی از جمله را ثابت کنید. برای مثال، اگر سعی در اثبات ویژگی‌ای دارید که برای هر $k > 0$ درست است، سعی کنید ابتدا آن را برای $k = 1$ ثابت کنید. اگر موفق شدید آن را برای $k = 2$ امتحان کنید و به همین ترتیب تا این‌که بتوانید حالتی کلی‌تر را نتیجه بگیرید. اگر اثبات حالت خاص مشکل است، حالت خاص دیگری یا چه بسا حالت خاصی از حالت خاص را بررسی کنید.

در نهایت، وقتی اطمینان حاصل کردید که روش اثبات را پیدا کرده‌اید، باید آن را به‌طور کامل‌تر بنویسید. یک اثبات درست نوشته شده، دنباله‌ای از جملات است که در آن هر جمله با استفاده از استدلال ساده‌ای، از جملات قبلی موجود در دنباله نتیجه می‌شود. دقت در نوشتن اثبات بسیار مهم است، هم برای خواننده که قادر باشد آن را درک کند و هم برای شما که مطمئن شوید عاری از اشتباه است.

در این‌جا چند نکته جهت ارائه‌ی یک اثبات خوب را یادآور می‌شویم.

- **صبور باشید.** پیدا کردن اثبات وقت‌گیر است. اگر متوجه نمی‌شوید که چگونه اثبات را بلافاصله انجام دهید، نگران نباشید. گاهی اوقات محققان هفته‌ها و یا حتی سال‌ها می‌کوشند تا یک اثبات را دریابند.

- دوباره برگردید. جمله‌ای که می‌خواهید ثابت کنید را بخوانید، کمی درباره‌ی آن فکر کنید و سپس چند دقیقه یا چند ساعت بعد برگردید. بگذارید که ناخودآگاه، قسمت ادراکی مغزتان فرصتی برای فعالیت داشته باشد.
- مرتب باشید. هنگامی که قصد دارید از شواهدتان کمک بگیرید تا جمله‌ای را ثابت کنید، از تصاویر و/یا متون ساده و واضح استفاده کنید. سعی کنید با بصیرت‌تان جمله را گسترش دهید و بدانید بی‌نظمی و عدم رعایت ترتیب سد راهی برای رسیدن به بصیرت است. به علاوه، وقتی که جواب را برای شخص دیگری می‌نویسید تا او آن را بخواند، مرتب بودن به شخص کمک خواهد کرد که آن را بهتر بفهمد.
- فشرده و مختصر بنویسید. خلاصه‌نویسی به شما کمک می‌کند که ایده‌های سطح بالا را بدون گم شدن در جزئیات بیان کنید. نمادگذاری درست ریاضی برای بیان ایده‌های مختصر، مفید است. ولی وقتی اثبات را به نحوی شرح دهید که خواننده بتواند به آسانی آنچه را که شما سعی دارید بیان کنید بفهمد، مطمئن باشید که استدلال شما کافی است.

برای تمرین، یکی از قوانین دهورگان را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۰-۲

برای هر دو مجموعه‌ی A و B ، $A \cup B = \overline{A \cap B}$.

اولاً، آیا مفهوم این قضیه واضح است؟ اگر با مفهوم نمادهای $\cup$ یا $\cap$ یا خط بالایی آشنا نیستید، بحث صفحه‌ی ۱۴ را مرور کنید.

برای اثبات این قضیه باید نشان دهیم که دو مجموعه‌ی $\overline{A \cap B}$ و $A \cup B$ برابر هستند. به خاطر آورید که با توجه به این که هر عضو یک مجموعه عضوی از مجموعه‌ی دیگر نیز می‌باشد و برعکس می‌توانیم ثابت کنیم که دو مجموعه برابر هستند. قبل از دیدن اثبات زیر، چند مثال را در نظر بگیرید و سپس سعی کنید آن را برای خودتان ثابت کنید.

اثبات. این قضیه بیان می‌کند که دو مجموعه‌ی $\overline{A \cap B}$ و $A \cup B$ برابر هستند. این حکم را بدین‌گونه ثابت می‌کنیم که هر عضوی از یک مجموعه، عضوی از مجموعه‌ی دیگر نیز می‌باشد و برعکس.

فرض کنید x عضوی از $\overline{A \cap B}$ باشد. با استفاده از تعریف مکمل یک مجموعه، x در $A \cup B$ نیست. بنابراین با استفاده از تعریف اجتماع دو مجموعه، x در A نیست و x در B نیز نمی‌باشد. به عبارت دیگر، x در $\overline{A}$ و در $\overline{B}$ است. در نتیجه تعریف اشتراک دو مجموعه نشان می‌دهد که x در $\overline{A \cap B}$ است.

برای جهت دیگر، فرض کنید x در $A \cap B$ باشد. در این صورت x هم در $\overline{A}$ و هم در $\overline{B}$ است. بنابراین x در A نیست و در B نیز نمی‌باشد و در نتیجه در اجتماع این دو مجموعه نیست. لذا x در مکمل اجتماع این مجموعه‌ها می‌باشد؛ به بیانی دیگر، x در $\overline{A \cup B}$ است و این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

حال جمله‌ی مثال ۱۹-۰ را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲۱-۰

برای هر گراف G مجموع درجه‌ی تمام گره‌های G عددی زوج است.
اثبات. هر یال G به دو گره متصل شده است. هر یال به اندازه‌ی ۱ واحد در درجه‌ی هر گره‌ای که به آن متصل شده است اثر می‌گذارد. بنابراین هر یال به اندازه‌ی ۲ واحد بر مجموع درجه‌ی تمام گره‌ها اثر می‌گذارد. لذا، اگر G دارای e یال باشد، در این صورت مجموع درجه‌های تمام گره‌های G ، $2e$ است، که عددی زوج می‌باشد.

۴- انواع اثبات

غالباً انواع مختلفی از استدلال‌ها در اثبات‌های ریاضی رخ می‌دهد. در اینجا، چند استدلال که بیشتر اوقات در نظریه‌ی محاسبات استفاده می‌شوند را توصیف می‌کنیم. توجه داشته باشید که یک اثبات ممکن است شامل بیش از یک نوع استدلال باشد زیرا اثبات می‌تواند در داخل خود شامل چندین زیر اثبات دیگر باشد.

اثبات از طریق ساختن

قضایای زیادی بیان می‌کنند که نوع خاصی از یک شیء وجود دارد. یک روش برای اثبات چنین قضیه‌ای این است که نشان دهیم چگونه شیء ساخته می‌شود. این تکنیک، اثبات از طریق ساختن می‌باشد.
اثبات از طریق ساختن را برای اثبات قضیه‌ی زیر به کار می‌بریم. یک گراف را k -منتظم تعریف می‌کنیم هرگاه هر گره‌ی گراف دارای درجه‌ی k باشد.

قضیه ۲۲-۰

برای هر عدد زوج n بزرگ‌تر از ۲، گراف ۳-منتظمی با n گره موجود است.
اثبات. فرض کنید n عدد زوجی بزرگ‌تر از ۲ باشد. گراف $G = (V, E)$ با n گره را به صورت زیر می‌سازیم. مجموعه‌ی گره‌های G ، $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ و مجموعه‌ی یال‌های G مجموعه‌ی زیر می‌باشد:

$$E = \{\{i, i+1\} \mid 0 \leq i \leq n-2\} \cup \{\{n-1, 0\}\} \\ \cup \{\{i, i+n/2\} \mid 0 \leq i \leq n/2-1\}.$$

گره‌های گراف را به این صورت تصور کنید که به صورت متوالی دور تا دور محیط دایره نوشته شده‌اند. در این صورت یال‌های توصیف شده در سطر بالایی E در میان جفت‌های مجاور دور تا دور دایره عبور می‌کنند. یال‌های توصیف شده در سطر پایینی E از میان گره‌های واقع در اضلاع روبه‌روی دایره عبور می‌کنند. این تصویر ذهنی به وضوح نشان می‌دهد که هر گره‌ی G دارای درجه‌ی ۳ است.

برهان خلف

در یک حالت معمولی استدلال برای اثبات یک قضیه، فرض می‌کنیم که قضیه نادرست است و نشان می‌دهیم که این فرض به یک نتیجه‌ی نادرست بدیهی منتهی می‌شود. این نوع استدلال را به تکرار در زندگی روزمره استفاده می‌کنیم، مانند مثال زیر.

مثال ۲۳--۰

جک، جیل را می بیند، که تنها از بیرون وارد شده است. مشاهده می کند که او کاملاً خشک است، او می داند که باران نمی بارد. "اثبات" او از این که باران نمی بارد این است که، اگر باران می بارید (فرض که جمله نادرست است)، جیل خیس شده بود (به وضوح نتیجه نادرست است). بنابراین نباید باران بیارد.

در ادامه، از طریق برهان خلف ثابت می کنیم که ریشه ی دوم عدد ۲ عددی گنگ است. یک عدد را گویا نامند هرگاه به صورت کسر m/n باشد که m و n اعدادی صحیح هستند؛ به عبارت دیگر، عددی گویا است که نسبت اعداد صحیح m و n باشد. برای مثال، واضح است که $2/3$ عددی گویا است. عددی گنگ است که گویا نباشد.

قضیه ۲۴--۰

$\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات. به منظور رسیدن به تناقضی در انتها، فرض می کنیم که $\sqrt{2}$ گویا باشد. بنابراین،

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

که هم m و هم n اعدادی صحیح هستند. اگر m و n هر دو بر یک عدد صحیح بزرگتر از ۱ قابل قسمت باشند، هر دو را بر آن عدد صحیح تقسیم کنید. انجام چنین کاری مقدار کسر را تغییر نمی دهد. اکنون، حداقل یکی از m و n باید عددی فرد باشد.

هر دو طرف معادله را در n ضرب می کنیم و عبارت زیر حاصل می شود:

$$n\sqrt{2} = m.$$

هر دو طرف را به توان ۲ می رسانیم و عبارت زیر حاصل می شود:

$$2n^2 = m^2.$$

چون m^2 برابر ۲ ضرب در عدد صحیح n^2 می باشد، متوجه می شویم که m^2 زوج است. بنابراین m نیز زوج است، چون مربع یک عدد فرد همواره فرد است. بنابراین برای عدد صحیح k ای می توانیم بنویسیم $m = 2k$. در این صورت، $2k$ را به جای m جایگزین می کنیم، در نتیجه:

$$\begin{aligned} 2n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2. \end{aligned}$$

هر دو طرف را بر ۲ تقسیم می کنیم عبارت زیر حاصل می شود:

$$n^2 = 2k^2.$$

به هر حال این نتیجه نشان می دهد که n^2 زوج است و بنابراین n زوج است. لذا ثابت کرده ایم که هم m و هم n زوج هستند. ولی قبلاً m و n را ساده کرده بودیم به طوری که m و n هر دو زوج نبودند و این تناقض است.

اثبات با استقرا

اثبات با استقرا روش پیشرفته‌ای است که نشان می‌دهد تمام عناصر یک مجموعه‌ی نامتناهی دارای ویژگی‌های مشخص شده‌ای هستند. برای مثال، از اثبات با استقرا می‌توان برای این که نشان دهیم یک عبارت محاسباتی کمیت مورد نظر را برای هر تخصیص به متغیرهایش محاسبه می‌کند یا این که برنامه‌ای در تمام مراحل یا به‌ازای هر ورودی به‌درستی کار می‌کند، استفاده کرد.

برای اینکه نشان دهیم چگونه اثبات با استقرا کار می‌کند، مجموعه‌ای نامتناهی که مجموعه‌ی اعداد طبیعی یعنی $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ می‌باشد را اختیار کنید و فرض کنید که ویژگی مورد نظر P باشد. هدف ما این است که ثابت کنیم $P(k)$ برای هر عدد طبیعی k درست است. به عبارت دیگر، می‌خواهیم ثابت کنیم که $P(1)$ درست است، همچنین $P(2)$ ، $P(3)$ ، $P(4)$ و غیره.

هر اثبات با استقرا متشکل از دو قسمت است، حکم استقرا و پایه. هر قسمت اثبات مخصوص به خود را دارد. حکم استقرا ثابت می‌کند که برای هر $i \geq 1$ ، اگر $P(i)$ درست باشد، آنگاه $P(i+1)$ نیز چنین است. پایه ثابت می‌کند که $P(1)$ درست است.

هنگامی که هر دو قسمت را ثابت کردیم، نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود، یعنی اینکه، $P(i)$ برای هر i درست است. چرا؟ اول این که، می‌دانیم $P(1)$ درست است زیرا پایه فقط این موضوع را ثابت می‌کند. دوم این که، می‌دانیم $P(2)$ درست است، زیرا حکم استقرا آن را ثابت می‌کند، به این ترتیب که اگر $P(1)$ درست باشد آنگاه $P(2)$ درست است و از قبل می‌دانیم که $P(1)$ درست است. سوم این که، می‌دانیم $P(3)$ درست است، زیرا حکم استقرا آن را ثابت می‌کند، اگر $P(2)$ درست باشد آنگاه $P(3)$ درست است و از قبل می‌دانیم که $P(2)$ درست می‌باشد. این روند را برای تمام اعداد طبیعی ادامه می‌دهیم، نشان می‌دهیم که $P(4)$ درست است، $P(5)$ درست است و به همین ترتیب.

هنگامی که پاراگراف قبلی را فهمیدید، به آسانی می‌توانید عبارات و کلیات ایده‌های همانند را دریابید. برای مثال، الزاماً نیایستی پایه با ۱ شروع شود؛ پایه می‌تواند با هر مقدار b شروع شود. در این صورت اثبات استقرایی نشان می‌دهد که $P(k)$ برای هر k ای که حداقل b است، درست می‌باشد.

در حکم استقرا فرضی که $P(i)$ درست است، فرض استقرا نامیده می‌شود. گاهی اوقات داشتن فرض استقرای قوی‌تر که در آن $P(j)$ برای هر $i \leq j$ درست است، مفید می‌باشد. اثبات استقرایی باز هم کار می‌کند زیرا، وقتی می‌خواهیم ثابت کنیم که $P(i+1)$ درست است از قبل ثابت کرده‌ایم که برای هر $j \leq i$ ، $P(j)$ درست است.

قالب مناسب برای نوشتن اثبات با استقرا به صورت زیر است.

پایه: ثابت کنید $P(1)$ درست است.

:

حکم استقرا: برای هر $i \geq 1$ ، فرض کنید که $P(i)$ درست است و از این فرض برای نشان دادن درستی $P(i+1)$ استفاده کنید.

:

حال، با استقرا درستی فرمول استفاده شده برای محاسبه‌ی مقدار پرداخت ماهیانه‌ی وام مسکن را ثابت می‌کنیم. هنگام خرید خانه، بیشتر مردم مقداری از پول مورد نیاز برای خرید را قرض می‌گیرند و این وام را در تعداد سال‌های معین بازپرداخت می‌کنند. معمولاً، مدت چنین بازپرداخت‌هایی مشروط به مبلغ پول ثابتی است که هر ماه برای پوشش سود و نیز بخشی از مبلغ اصلی پرداخت می‌شود، به‌طوری که جمع کل در 30 سال بازپرداخت می‌شود. بانک‌ها فرمول محاسبه‌ی میزان پرداخت‌های ماهیانه را به‌صورت راز پنهان می‌کنند، ولی در حقیقت این فرمول کاملاً ساده است. این موضوع زندگی بیشتر مردم را متأثر می‌کند، بنابراین یافتن آن می‌تواند جالب توجه باشد. از طریق استقرا ثابت می‌کنیم که فرمول، به‌درستی عمل می‌کند و همین، مثال خوبی از این تکنیک را نشان می‌دهد.

نخست، با معرفی نام و معانی چند متغیر شروع می‌کنیم. فرض کنید P مبلغ اصلی یعنی مقدار وام اولیه باشد. فرض کنید $I > 0$ نرخ بهره‌ی سالیانه‌ی وام باشد، که $I = 0.06$ نرخ بهره‌ی 6% را نشان می‌دهد. فرض کنید Y پرداخت ماهیانه باشد. برای راحتی، متغیر دیگر M از I را برای ضریب ماهیانه تعریف می‌کنیم. این متغیر، نرخ‌ی است که در آنجا میزان وام هر ماه به خاطر بهره، روی آن تغییر می‌کند. به تبعیت از روش بانک‌داری استاندارد، فرض کنید ماهیانه بهره‌ی پول و بهره‌ی متعلق به بهره‌ی آن را حساب کنیم، بنابراین $M = 1 + I/12$. هر ماه دو اتفاق رخ می‌دهد: اول این که، مقدار وام به‌خاطر ضریب ماهیانه افزایش می‌یابد. دوم این که، این مقدار به‌خاطر پرداخت ماهیانه کاهش می‌یابد. فرض کنید P_t مقدار وام پرداخت نشده بعد از t امین ماه باشد. در این صورت $P_0 = P$ مقدار وام اصلی است، $P_1 = MP_0 - Y$ مقدار وام پس از یک ماه است، $P_2 = MP_1 - Y$ مقدار وام بعد از دو ماه می‌باشد و الی آخر. حال آماده هستیم قضیه‌ای را بیان و با استقرا روی t ثابت کنیم، که فرمولی برای مقدار P_t را به دست می‌دهد.

قضیه ۲۵-۰

برای هر $t \geq 0$ ،

$$P_t = PM^t - Y \left(\frac{M^t - 1}{M - 1} \right).$$

اثبات.

پایه: ثابت می‌کنیم که فرمول برای $t = 0$ درست است. اگر $t = 0$ ، در این صورت فرمول بیان می‌کند که:

$$P_0 = PM^0 - Y \left(\frac{M^0 - 1}{M - 1} \right).$$

با مشاهده‌ی این که $M^0 = 1$ سمت راست را می‌توانیم ساده کنیم. به این ترتیب عبارت زیر را داریم:

$$P_0 = P$$

که درست است زیرا تعریف کردیم که P_0 برابر با P می‌باشد. بنابراین ثابت کردیم که پایه‌ی استقرا درست است.

حکم/استقرا: برای هر $k \geq 0$ فرض کنید فرمول برای $t = k$ درست است و نشان دهید که فرمول برای $t = k + 1$ درست است. فرض استقرا بیان می‌کند که:

$$P_k = PM^k - Y \left(\frac{M^k - 1}{M - 1} \right).$$

هدف مان این است که ثابت کنیم:

$$P_{k+1} = PM^{k+1} - Y \left(\frac{M^{k+1} - 1}{M - 1} \right).$$

این کار را با مراحل زیر انجام می‌دهیم. ابتدا، از تعریف P_{k+1} از روی P_k می‌دانیم که:

$$P_{k+1} = P_k M - Y.$$

بنابراین، از فرض استقرا برای محاسبه‌ی P_k استفاده می‌کنیم،

$$P_{k+1} = \left[PM^k - Y \left(\frac{M^k - 1}{M - 1} \right) \right] M - Y.$$

با ضرب کردن در M و بازنویسی Y نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= PM^{k+1} - Y \left(\frac{M^{k+1} - M}{M - 1} \right) - Y \left(\frac{M - 1}{M - 1} \right) \\ &= PM^{k+1} - Y \left(\frac{M^{k+1} - 1}{M - 1} \right). \end{aligned}$$

بنابراین فرمول برای $t = k + 1$ درست است، که قضیه ثابت می‌شود.

مسئله‌ی ۱۴-۰ از شما می‌پرسد که با استفاده از فرمول فوق پرداخت‌های واقعی وام را محاسبه کنید.

۵- تمرین‌ها

۱. توصیفات رسمی زیر از مجموعه‌ها را بررسی کنید تا دریابید کدام عضوها را شامل می‌شوند. توصیف فارسی غیررسمی کوتاهی از هر مجموعه را ارائه دهید.

الف. $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

ب. $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

پ. $\{n \mid n = 2m \text{ به‌ازای بعضی } m \text{ در } \mathcal{N}\}$

ت. $\{n \mid n = 2m \text{ به‌ازای بعضی } m \text{ در } \mathcal{N} \text{ و } n = 3k \text{ به‌ازای بعضی } k \text{ در } \mathcal{N}\}$

ث. $\{w \mid w \text{ رشته‌ای از 0ها و 1ها است و } w \text{ برابر است با معکوس } w\}$

ج. $\{n \mid n \text{ یک عدد صحیح است و } n = n + 1\}$

۲. توصیفات رسمی مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف. مجموعه‌ای شامل اعداد 1، 10 و 100

ب. مجموعه‌ای شامل تمامی اعداد صحیح که بزرگ‌تر از 5 هستند

پ. مجموعه‌ای شامل تمام اعداد طبیعی که کم‌تر از 5 هستند

ت. مجموعه‌ای شامل رشته‌ی aba

ث. مجموعه‌ای شامل رشته‌ی تهی

ج. مجموعه‌ای که شامل هیچ چیز نیست

۳. فرض کنید A مجموعه‌ی $\{x, y, z\}$ و B مجموعه‌ی $\{x, y\}$ باشد.

الف. آیا A زیرمجموعه‌ی B است؟

ب. آیا B زیرمجموعه‌ی A است؟

پ. $A \cup B$ چیست؟

ت. $A \cap B$ چیست؟

ث. $A \times B$ چیست؟

ج. مجموعه‌ی توانی B چیست؟

۴. اگر A دارای a عضو و B دارای b عضو باشد، عضوهای $A \times B$ چقدر هستند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۵. اگر C مجموعه‌ای با c عضو باشد، تعداد عضوهای مجموعه‌ی توانی C چقدر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۶. فرض کنید x مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ و y مجموعه‌ی $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ باشد. تابع یکانی $g: x \times y \rightarrow y$ و تابع دودویی $f: x \rightarrow y$ در جدول زیر توصیف شده‌اند.

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

الف. مقدار $f(2)$ چیست؟

ب. برد و دامنه‌ی f چه چیزهایی هستند؟

ب. مقدار $g(2, 10)$ چیست؟

ت. برد و دامنه‌ی g چه چیزهایی هستند؟

ث. مقدار $g(4, f(4))$ چیست؟

۷. برای هر قسمت، رابطه‌ای ارائه دهید که در شرط صدق کند.

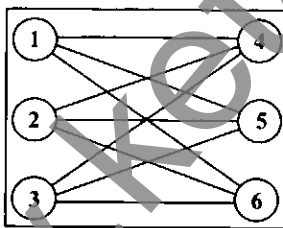
الف. بازتابی و متقارن باشد ولی تعدی نباشد.

ب. بازتابی و تعدی باشد ولی متقارن نباشد.

پ. متقارن و تعدی باشد ولی بازتابی نباشد.

۸. گراف بدون جهت $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید که V یعنی مجموعه‌ی رئوس برابر $\{1, 2, 3, 4\}$ است و E یعنی مجموعه‌ی یال‌ها برابر $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}\}$ می‌باشد. گراف G را رسم کنید. درجه‌ی گره‌ی ۱ چیست؟ درجه‌ی گره‌ی ۳ چیست؟ مسیری از گره‌ی ۳ به گره‌ی ۴ روی گراف رسم شده‌ی G مشخص کنید.

۹. توصیف رسمی گراف زیر را بنویسید.



۶- مسائل

۱۰. نشان دهید که هر گراف با ۲ یا بیشتر رأس شامل دو رأس است که درجه‌های برابری دارند.

۱۱. اشتباه اثبات زیر را پیدا کنید که ثابت می‌کند تمام اسب‌ها هم‌رنگ هستند.

ادعا: در هر مجموعه‌ی h تایی از اسب‌ها، تمام اسب‌ها هم‌رنگ هستند.

برهان: با استقرا روی h .

پایه: برای $h = 1$. در هر مجموعه شامل فقط یک اسب، واضح است که تمام اسب‌ها هم‌رنگ هستند.

حکم استقرا: برای $k \geq 1$ فرض کنید ادعا برای $h = k$ درست باشد و ثابت کنید ادعا برای $h = k + 1$ درست است.

هر مجموعه‌ی H شامل $k + 1$ اسب را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که تمام اسب‌های این مجموعه هم‌رنگ هستند. یک اسب از این مجموعه را حذف کنید تا مجموعه‌ی H_1 با فقط k اسب را

به‌دست آورید. بنابه فرض استقرا، تمام اسب‌های H_1 هم‌رنگ هستند. حال اسب حذف شده را برگردانده و

اسب دیگری را حذف کنید تا مجموعه‌ی H_2 به‌دست آید. بنا به همان بحث، تمام اسب‌ها در H_2 هم‌رنگ

هستند. بنابراین تمام اسب‌ها در H باید هم‌رنگ باشند و اثبات کامل می‌شود.

۱۲. فرض کنید $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$ مجموع n عدد طبیعی نخست و $C(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ مجموع n مکعب نخست باشد. با استقرا روی n تساوی‌های زیر را ثابت کنید تا به این نتیجه برسید که به ازای هر n ،
 $C(n) = S^2(n)$.

الف. $S(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$

ب. $C(n) = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

۱۳. اشتباه اثبات زیر را جدا کنید که ثابت می‌کند $1 = 2$.

معادله‌ی $a = b$ را در نظر بگیرید. دو طرف را در a ضرب کنید که به دست می‌آید $a^2 = ab$. b^2 را از طرفین کم کنید که به دست می‌آید $a^2 - b^2 = ab - b^2$. حال از دو طرف فاکتور می‌گیریم،
 $(a+b)(a-b) = b(a-b)$ و دو طرف را بر $(a-b)$ تقسیم می‌کنیم، که $a+b = b$ به دست می‌آید. در نهایت، فرض کنید a و b برابر ۱ هستند، که نشان می‌دهد $2 = 1$.

۱۴. با استفاده از قضیه‌ی ۲۵-۰ فرمولی برای محاسبه‌ی مقدار پرداخت ماهیانه برای وام بر حسب مبلغ اصلی P ، نرخ بهره‌ی I و تعداد پرداخت‌های t به دست آورید. فرض کنید پس از این که t پرداخت انجام شده مبلغ وام به ۰ کاهش یافته است. با استفاده از فرمول مبلغ دلاری هر پرداخت ماهیانه برای یک وام ۳۰ ساله با ۳۶۰ پرداخت ماهیانه روی یک مبلغ وام اولیه ۱۰۰,۰۰۰ دلاری با نرخ بهره‌ی سالیانه ۵٪ را محاسبه کنید.

۱۵. قضیه رمزی^۱. فرض کنید G یک گراف باشد. یک خوشه^۲ در G زیرگرافی است که در آن هر دو رأس از طریق یک یال به هم متصل شده‌اند. ضد خوشه^۳، که مجموعه‌ی مستقل نیز نامیده می‌شود، زیرگرافی است که در آن هیچ دو رأس از طریق یک یال به هم متصل نیستند. نشان دهید که هر گراف با n رأس یا یک خوشه یا یک ضد خوشه با حداقل $\frac{1}{2} \log_2^n$ رأس را شامل می‌شود.