

زیر مدول‌های اول مینیمال

تألیف:

مینا کیودوند

www.ketab.ir

نیکان کتاب

پاییز ۹۴

سرشناسه	: کیودوند، مینا، ۱۳۵۸-
عنوان و نام‌پدیدآور	: زیرمدول‌های اول مینیمال / تالیف مینا کیودوند.
مشخصات نشر	: زنجان: نیکان کتاب، ۱۳۹۴
مشخصات ظاهری	: ۵۶ ص.:
شابک	: ۹۷۸-۹۶۴-۱۹۶-۳۲۷-۱
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
موضوع	: مدول‌ها (جبر)
موضوع	: ریاضیات
رده‌بندی کنگره	: ۱۳۹۴ ۹ز۲/۲۴۷/۳ QA
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۲/۴۲
شماره کتابشناسی ملی	: ۳۹۵۵۱۸۹



زیر مدول‌های اول مینیمال / مینا کیودوند

امور فنی: نیکان کتاب

طراحی جلد: آتلیه سگال (رجبی - کرمی)

چاپ و لیتوگرافی: ولیعصر

چاپ اول: پاییز ۹۴

تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه

قیمت: ۵۰/۰۰۰ ریال

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۱۹۶-۳۲۷-۱

دفتر نشر:

زنجان، چهارراه سعدی، روبروی بانک پاسارگاد، کوچه باقری، ساختمان سپهر، واحد ۴

تلفکس: ۰۲۴-۳۳۳۳۵۵۴۱-۲

Email: Nikanketab@yahoo.com

فهرست

صفحه

عنوان

فصل اول: مقدمات و پیش‌نیازها

۱-۱. یادآوری ۵

۱-۲. ایده‌آل‌های اول وابسته ۱۰

فصل دوم: زیر مدول‌های اول مینیمال

۱-۲. زیر مدول‌های اول مینیمال ۳۳

مراجع

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۴۷

مقدمه

فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی و M یک R -مدول باشد. برای زیرمدول N از M ، رادیکال N را با نماد $\text{rad}(N)$ نمایش می‌دهیم و آن را اشتراک تمام زیرمدول‌های اول M که شامل N هستند، تعریف می‌کنیم. همچنین، اگر هیچ زیرمدول اولی از M موجود نباشد که شامل N باشد، تعریف می‌کنیم $\text{rad}(N) = M$. همانطور که می‌دانیم، اگر I ایده‌آلی از R باشد، رادیکال I به صورت زیر توصیف می‌شود

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N}, r^n \in I\}.$$

اما توصیف اعضای $\text{rad}(N)$ به این سادگی نیست. مفهوم رادیکال یک زیرمدول در اوایل سال ۱۹۸۰ در مرجع [۱۰] معرفی شد و پس از آن برخی از مؤلفین سعی کردند آن را به وسیله‌ی عناصرش توصیف کنند و برخی دیگر نیز سعی کردند رادیکال زیرمدول‌ها را به کمک تجزیه‌ی آن‌ها به صورت اشتراک زیرمدول‌های اولیه یا اول توصیف کنند.

اغلب تلاش‌ها به سمت یافتن یک توصیف مشابه با فرمول معرفی شده برای اعضای رادیکال یک ایده‌آل معطوف شد، که در بالا به آن اشاره کریم. در مرجع [۹] یک روش برای محاسبه رادیکال زیرمدول N از R -مدول آزاد F به وسیله جبر متقارن F^1 معرفی گردیده است. در دیگر حالت‌های خاص «فرمولی برای رادیکال» معرفی شد که تمام محاسبات روی مدول‌های اصلی انجام می‌گرفت، به عنوان مثال می‌توان به مراجع [۵]، [۶]، [۱۱] و [۱۲] اشاره کرد.

فرض کنید N یک زیرمدول از R -مدول M باشد. گوئیم زیرمدول N از R -مدول M تجزیه

اولیه دارد هرگاه $N = \cap_{i=1}^n Q_i$ که در آن به ازای هر i ($1 \leq i \leq n$) Q_i زیرمدول اولیه از M است، همچنین این تجزیه اولیه را نرمال گوئیم، هرگاه

۱. به ازای هر j ($1 \leq j \leq n$)، $N \neq \cap_{i=1, i \neq j}^n Q_i$ (یعنی $Q_j \not\subseteq \cap_{i=1, i \neq j}^n Q_i$)

۲. به ازای هر $j \neq i$ ، $\sqrt{Q_i} : M \neq \sqrt{Q_j} : M$

فرض کنید N زیرمدول سرهای از R -مدول M باشد. ایده‌آل اول p از R را ایده‌آل اول وابسته به N گوئیم، هرگاه $m \in M \setminus N$ وجود داشته باشد که $p = (N :_R m)$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته به N را با نماد $AP(N)$ نمایش می‌دهیم.

در گزاره نشان می‌دهیم که اگر R نوتری، N زیرمدول سرهای از R -مدول متناهی مولد M و $N = \cap_{i=1}^n Q_i$ یک تجزیه اولیه و نرمال از N باشد که به ازای هر i ($1 \leq i \leq n$) Q_i زیرمدول p_i -اولیه از M است، آن‌گاه $AP(N) = \{p_1, \dots, p_n\}$. همچنین در مثال ۳۲.۲.۱ نشان می‌دهیم حتی زمانی که R حلقه‌ی نوتری است، لزوماً مجموعه‌های $AP(N)$ و $AP(\text{rad}(N))$ یکسان نیستند. همان‌طور که می‌دانیم با داشتن یک تجزیه اولیه نرمال برای $\text{rad}(N)$ می‌توان مجموعه‌ی $AP(\text{rad}(N))$ را به دست آورد. در قضیه‌ی ۱۰.۱.۲ ثابت می‌کنیم اگر R نوتری و M متناهی مولد باشد، عکس این مطلب نیز برقرار است. یعنی با داشتن مجموعه $AP(\text{rad}(N))$ می‌توان یک تجزیه اول یا اولیه نرمال برای $\text{rad}(N)$ به دست آورد. بنابراین برای به دست آوردن $\text{rad}(N)$ کافیت مجموعه‌ی $AP(\text{rad}(N))$ را مشخص کنیم، لذا توجه‌مان را به یافتن مجموعه‌ی $AP(\text{rad}(N))$ معطوف می‌کنیم.

در حالت کلی، مواردی وجود دارند که یک زیرمدول اول شامل هیچ یک از آن‌ها نیست،

شرایطی را فراهم می‌کنیم که اگر یک زیرمدول اول شامل اشتراکی از زیرمدول‌ها باشد، آن‌گاه لزوماً شامل یکی از آن‌ها باشد. همچنین با وجود این که ممکن است برای زیرمدول N از M مجموعه‌های $\text{rad}(N)$ و $\text{AP}(\text{rad}(N))$ کاملاً متفاوت باشند، در نتیجه‌ی برای حالتی که R نوتری M متناهی مولد است رابطه‌ای بین مجموعه‌های $\text{rad}(N)$ و $\text{AP}(\text{rad}(N))$ به دست می‌آوریم.

www.ketab.ir