

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

انتگرال

تکنیک ها و کاربردها

مؤلفین:

مهندس سید حسن یوسفی

سعید جعفری

مهندس غلامرضا گله خیلی

مهندس سجاد بریمانی

عنوان و نام پدیدآور: انشگرال تکنیک‌ها و کاربردها

مشخصات نشر: بابل، اکسیر قلم، ۱۳۹۴.

مشخصات ظاهری: ص ۲۱۸.

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۷۶۰۳-۱۶-۱ ۱۹۵۰۰۰ ریال

وضعیت فهرست نویسی: فنیای مختصر

یادداشت: فهرست نویسی کامل این اثر در نشانی: <http://opac.nlai.ir> قابل دسترسی است

یادداشت: مولفین سیدحسن یوسفی، سعید جعفری، غلامرضا گله خیلی، سجاد بریماوی.

شناسه افزوده: یوسفی، سیدحسن، ۱۳۶۶.

شماره کتابشناسی ملی: ۳۸۰۱۴۱۱



انشگرال، تکنیک و کاربردها

مولفین: سید حسن یوسفی، سعید جعفری،

غلامرضا گله خیلی، سجاد بریماوی

ناشر: انتشارات اکسیر قلم

صفحه آرای: محبوبه صنمی

نوبت و سال چاپ: اول - ۱۳۹۴

شمارگان: ۵۰۰ جلد

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۷۶۰۳-۱۶-۱

بها: ۱۹۵۰۰ تومان

اکسیر قلم

بابل، خیابان مدرس، رسولی ۲۴ (ماکان سابق)

۰۹۱۱۲۱۷۰۸۵۰

۰۱۱۳۲۳۲۵۹۴۹

www.exireghalam.ir

Email: exirpub@yahoo.com

به نام خدا

پیشگفتار مولفین

در این کتاب می‌خواهیم به تعریف و بررسی مفهومی تازه بپردازیم که در ابتدا ممکن است تصور شود رابطه‌ای با سایر مطالب درس حسابان ندارد، ولی پس از آموختن آن خواهیم دید که نه تنها رابطه‌ی مستقیم با سایر فصول درس حسابان دیفرانسیل و انتگرال دارد بلکه این رابطه اهمیت و نقش اصلی مشتق را نیز بر ما آشکار می‌کند. تعریف انتگرال احتیاج به مقدمات طولانی دارد و نسبت به سایر تعریفاتی که تا به حال دیده ایم پیچیده‌تر است.

بطوریکه خواهیم دید انتگرال ارتباطی بسیار نزدیک با مساحت دارد. در هندسه‌ی مقدماتی مساحت بعضی اشکال هندسی خاص را دیده ایم، ولی متأسفانه این اشکال بسیار محدود می‌باشند و گرچه طریقه‌ی پیدا کردن مساحت آن را آموخته ایم ولی هرگز تعریفی دقیق از مفهوم مساحت را ندیده ایم.

بعضی اوقات مساحت یک ناحیه را برابر با تعداد مربع‌هایی به ضلع واحد که در ناحیه می‌گنجد تعریف می‌کنند. بدیهی است این تعریف صحیحی نیست. زیرا اگر دایره‌ای به شعاع واحد را در نظر بگیریم میدانیم که مساحت آن برابر π است ولی معلوم نیست که تعداد π واحد مربع به ضلع واحد چه معنی دارد که بخواهیم آنرا در دایره

جای دهیم. همچنین اگر دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ را در نظر بگیریم مساحت آن برابر ۱ است، ولی معلوم نیست

که چگونه می‌توان یک مربع به ضلع واحد را قطعه قطعه کرد و پهلوی هم قرار داد تا دایره را پر کند.

گفته می‌شود که نیوتن و لایب نیتز مخترعین حساب دیفرانسیل و انتگرال بودند اما بر اساس اطلاعات موجود در رابطه با مشتق و انتگرال بطور خاص قضیه‌ی بنیادین حساب دیفرانسیل و انتگرال این سوال مطرح است که چرا این دو ریاضیدان بزرگ به عنوان بنیان گزاران این شاخه از دانش بشری مشهور بوده‌اند. در حالی که خیلی قبل از آنها نحوه محاسبه مماس بر منحنی‌ها وجود داشته است. وقتی صحبت از مساحت به میان می‌آید حتی ارشمیدس هم قادر بوده مساحت ناحیه‌هایی که با منحنی‌های خاص محصور شده‌اند را حساب کند. مثلاً او برای محاسبه مساحت دایره مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره را بدست آورده و برای دقت بیشتر تعداد اضلاع را بیشتر کرده است.

به هر حال پیشکوتان ریاضی روشهای پیشرفته تری را برای اندازه گیری مساحت‌ها و محاسبه ی آنچه که به انتگرال معروف است در دست داشتند.

آنچه که باعث شد این دو نفر را به عنوان پایه گزاران این علم بشناسند درک آنها از نیاز بشر به وجود یک روش سیستماتیک برای مشتق گیری و انتگرال گیری و نیز بکارگیری علامات رابیع و بیان استدلالهای منطقی بجای اثباتهای شهودی است.

نیوتن و لایب نیتز تشخیص دادند که به کمک قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می توان انتگرال توابع مختلف را به دست آورد. علاوه بر آن، این دو دانشمند قوانینی را برای مشتق گیری و انتگرال ترکیب توابع کشف کردند.

نیوتن در اواسط دهه ی ۱۶۶۰ به این افکار دسترسی یافت در حالی که لایب نیتز کار خود را از اوایل دهه ی ۱۶۷۰ آغاز کرد. اما لایب نیتز آنها را زودتر به چاپ رساند و علامت گذاریهای او بسیار جالب تر از علامت گذاریهای نیوتن بودند. این ها همان علائمی هستند که در حال حاضر هم بکار می روند.

در حلی که قصد بر این نیست که تاثیر عمیق کارهای نیوتن و لایب نیتز کم جلوه کند بلکه لازم به ذکر است که افکار آنها تکیه زیادی بر کارهای قبلی دارد. در حقیقت آنها پلی استوار بین ایده های قبلی و روش های مدرن در رابطه با این دانش را بنا نهادند.

واضح است که یکی از کاربردهای انتگرال معین تعیین مساحت محدود به نمودار تابع $y=f(x)$ و محدود به محور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ خواهد بود. لازمه اش آن است که داوطلب ابتدا اطلاعاتی راجع به خود انتگرال داشته باشد تا بتواند آن را بکار برد.

بحث پیش رو پس از تعریف، تکنیکهای متفاوت انتگرال گیری را با مثالها و مسائل تا حد جامع مورد بحث و بررسی قرار می دهد و جهت تسلط بر مفهوم آنها تمریناتی را در هر فصل در نظر گرفته است که اگر داوطلب و محصل ریاضی به حل آن مبادرت نماید لذت کشف مجهولات را احساس می کند. امیدواریم در جهت حل مشکلات داوطلبان قدمی هر چند کوتاه برداشته باشیم.

فصل اول : مقدمه ای در مورد انتگرال و کاربرد آن

۲- مقدمه	۲
۱-۱- معرفی کاربردهای انتگرال:	۲
۱-۱-۱- تعریف:	۵
۱-۱-۲- تذکر:	۶
تمرینات: ۱-۱:	۸
۳-۱-۱- انتگرال معین:	۹
۴-۱-۱- تعریف:	۱۰
۲-۱- ویژگی های انتگرال معین:	۱۱
تمرینات: ۲-۱:	۱۳
۳-۱- قضایای بنیادین:	۱۳
تمرینات: ۳-۱:	۱۴

فصل دوم : انتگرال های نامعین و کاربرد آن

۱-۲- مقدمه :	۱۶
۲-۲- تکنیک های انتگرال گیری:	۱۶
۳-۲- انتگرال توابع هذلولی:	۲۴

فصل سوم: روشهای انتگرال گیری

۱-۳- مقدمه:	۲۷
۲-۳- انتگرال گیری به روش جزء به جزء:	۲۷

- ۳-۳- جدول انتگرال گیری: ۲۷
- ۴-۳- انتگرال از توابع کسری: ۲۹
- ۵-۳- چند تغییر متغیر مناسب برای حل انتگرال ها: ۳۱

فصل چهارم: کاربردهایی دیگر از انتگرال معین

- ۱-۴: کاربردهای مورد نظر عبارتند از: ۳۴
- ۲-۴: محاسبه مساحت ناحیه بین نواحی مختلف در صفحه R^2 ۳۴
- ۳-۴: مساحت ناحیه بین دو منحنی: ۳۵
- تمرینات ۱-۴: ۳۶
- تمرینات ۲-۴: ۳۷
- ۴-۴: مساحت در ناحیه قطبی: ۳۸
- ۵-۴: مساحت در محدوده بین دو منحنی قطبی: ۳۸
- تمرینات ۴-۴: ۳۸
- ۵-۴: طول کمان یک منحنی: ۳۹
- تمرینات ۶-۴: ۴۰
- ۷-۴: محاسبه طول کمان وقتی که معادلات پارامتری در دست باشند: ۴۰
- ۸-۴: محاسبه طول کمان در مختصات قطبی: ۴۰
- تمرینات ۷-۴: ۴۱
- ۹-۴: محاسبه حجم جسم دوار: ۴۲
- نتایج: ۴۳
- تمرینات ۱-۸-۴: ۴۴
- تمرینات ۲-۸: ۴۶
- ۱۰-۴: محاسبه کار: ۴۷
- تمرینات ۹-۴: ۴۸

۴۸	۱۱-۴ - گشتاورها و مرکز جرم
۴۹	۱۲-۴ - محاسبه‌ی جرم
۴۹	۱۳-۴ - تعریف (مرکز جرم)
۵۰	۱۴-۴ - تعریف (چگالی خطی)
۵۰	۱۵-۴ - محاسبه‌ی جرم میله
۵۱	۱۶-۴ - گشتاور جرم میله
۵۱	تمرینات ۱۵-۴
۵۳	۱-۶-۴ - محاسبه مرکز ناحیه ای
۵۴	۱۷-۴ - محاسبه‌ی مرکز جرم
۵۵	تمرینات ۱۷-۴

فصل پنجم: انتگرال‌های ناسره

۵۹	۱-۵ - آزمون مقایسه
۶۰	۲-۵ - تابع گاما
۶۱	۳-۵ - تابع بتا
۶۱	۴-۵ - چند فرمول در محاسبه انتگرال‌های ناسره خاص
۶۲	تمرینات ۱-۵

فصل ششم: ناگفته‌های انتگرال

فصل هفتم: انتگرال‌های چندگانه

۷۵	۱-۷ - انتگرال‌های چندگانه
۷۷	۳-۷ - تمرین

۷۸	تمرینات ۱-۷: قسمت اول:
۷۸	تمرینات ۱-۷: قسمت دوم:
۷۸	تمرینات ۱-۷: قسمت سوم:
۷۹	تمرینات ۱-۷: قسمت چهارم:
۷۹	۲-۷- کاربردهای فیزیکی انتگرال دو گانه:
۸۱	۳-۷- تغییر متغیر در انتگرال های دو گانه:
۸۴	تمرینات ۲-۷- قسمت اول:
۸۴	تمرینات ۲-۷- قسمت دوم:
۸۴	تمرینات ۲-۷- قسمت سوم:
۸۵	۴-۷- انتگرال های سه گانه:
۹۰	۵-۷- تغییر متغیر در انتگرال های سه گانه:
۹۳	۶-۷- مختصات کروی:

فصل هشتم: انتگرال رویه ای

۹۸	۱-۸. انتگرال های رویه ای:
۱۰۲	۲-۸- انتگرال های منحنی الخط:
۱۰۵	تمرینات ۳-۸:
۱۰۶	۴-۸- قضیه گرین:
۱۱۱	۴-۸-۱- فرم برداری قضیه گرین:
۱۱۳	تمرینات مربوط به قضیه گرین:
۱۱۴	۵-۸- قضیه واگرایی:
۱۱۷	۶-۸- قضیه استوکس: (قضیه گرین در فضا)
۱۱۹	تمرینات مربوط به قضیه استوکس:

فصل نهم : مسائل حل شده

- الف) مسائل حل شده از نوع انتگرال یک گانه: ۱۲۲
- ب) مسائل حل شده انتگرال دو گانه: ۱۴۰
- ج) مسائل حل شده انتگرال سه گانه: ۱۷۱
- د: مسائل حل شده انتگرال های منحنی الخط (انتگرال های خمیده خطی) ۱۸۸
- هـ: مسائل حل شده انتگرال رویه ای: ۱۹۹
- منابع ۲۰۴

www.ketab.ir