

نظریه اندازه و انتگرال

با تأکید بر حل مسئله

قابل استفاده برای دانشجویان سال آخر کارشناسی و کارشناسی ارشد

تألیف :

حسین فضلی

دکتر فریبا بهرامی



انتشارات حفیظ

سرشناسه	: بهرامی، فریبا، ۱۳۵۱-
عنوان و نام پدیدآور	نظریه اندازه و انتگرال با تاکید بر حل مسئله مخصوص دانشجویان کارشناسی ارشد / فریبا بهرامی، حسین فضلی.
مشخصات نشر	: تهران: حفیظ، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری	: ۱۷۶ ص. مصور
شابک	: ۳۲۰۰۰ ریال 978-964-177-077-0
یادداشت	عنوان به انگلیسی: measure theory and integral.
یادداشت	: واژه نامه.
موضوع	: حساب انتگرال -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: حساب انتگرال -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
موضوع	: اندازه گیری -- نظریه
شناسه افزوده	: فضلی، حسین، ۱۳۶۴-
رده بندی کنگره	: QA۳۰۹/ب۹ن۶ ۱۳۹۰
رده بندی دیویی	: ۵۱۵/۴۲۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی	: ۲۳۶۸۵۸۱

نام کتاب:	نظریه اندازه و انتگرال
ناشر:	انتشارات حفیظ ۰۹۱۲۱۸۹۰۸۲۴-۶۶۷۲۲۱۸۱
ناشر همکار:	انتشارات قلم یوسف ۶۶۷۲۵۳۷۲
تالیف	فریبا بهرامی - حسین فضلی
لیتوگرافی	سنا ۶۶۴۱۹۵۹۵
چاپ:	الهادی
نوبت چاپ:	اول / ۱۳۹۰
تیراژ:	۱۰۰۰ نسخه
قیمت:	۳۲۰۰۰ ریال
شابک	978-964-177-077-0 ISBN
شابک	۹۷۸-۹۶۴-۱۷۷-۰۷۷-۰

حق چاپ برای ناشر محفوظ است.

انتشارات حفیظ: تهران خیابان انقلاب بعد از پارک دانشجو ساختمان ۱۰۳۲ واحد ۱۱
کتاب حفیظ: تهران خیابان انقلاب خیابان ۱۲ فروردین نرسیده به روانمهر پلاک ۲۳۳

فهرست مطالب

الف	فهرست مطالب
ب	پیش‌گفتار مولفان
۱	۱ تعاریف و مفاهیم بنیادی
۱	۱.۱ نظریه‌ی مجموعه‌ها
۲	۲.۱ حد دنباله‌ای از مجموعه‌ها
۴	۳.۱ رابطه و تابع
۷	۴.۱ سری‌های نامرتب
۹	۵.۱ توپولوژی و فضاهاى متریک
۱۲	۶.۱ توابع محدب و برخی نامساوی‌های مقدماتی
۱۵	۲ نظریه اندازه
۱۵	۱.۲ مقدمه
۱۷	۲.۲ مجموعه‌های اندازه‌پذیر
۲۰	۳.۲ σ -جبر تولید شده با پدید آمده توسط یک گردایه
۲۱	۴.۲ مجموعه‌های برل اندازه‌پذیر
۲۳	۵.۲ کلاس‌های یکنوا
۲۵	۶.۲ فضاهاى حاصل ضربی با بعد متناهی
۲۸	۷.۲ فضاهاى حاصل ضربی با بعد نامتناهی
۳۰	۸.۲ تابع اندازه

۳۷	تولید اندازه	۹.۲
۴۷	مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}$	۱۰.۲
۵۹	کاردینال مجموعه‌های لبگ و برل اندازه‌پذیر	۱۱.۲
۶۵	مسائل حل شده	۱۲.۲
۸۱	مسائل	۱۳.۲

۸۵	۳ نظریه انتگرال لبگ	
۸۵	مقدمه	۱.۳
۸۸	توابع اندازه‌پذیر	۲.۳
۹۶	انتگرال توابع ساده	۳.۳
۱۰۲	انتگرال توابع نامنفی	۴.۳
۱۱۴	انتگرال توابع اندازه‌پذیر	۵.۳
۱۲۳	مقایسه انتگرال ریمن و لبگ	۶.۳
۱۳۳	فضاهای L^p	۷.۳
۱۴۴	انواع همگرایی و ارتباط مابین آن‌ها	۸.۳
۱۵۲	مسائل حل شده	۹.۳
۱۶۷	مسائل	۱۰.۳

۱۷۱	الف p -نرم	
-----	--------------	--

۱۷۵	کتاب‌نامه	
-----	-----------	--

مبحث انتگرال یکی از مباحث قدیمی و بخش بسیار مهمی در حساب و دیفرانسیل می‌باشد. پیدایش نظریه‌های متفاوت انتگرال مانند نظریه‌ی انتگرال ریمان، انتگرال ریمان توسیع‌یافته، انتگرال لبگ، انتگرال پرون^۱، انتگرال دانژوا^۲ و ... دلیل بر اهمیت این شاخه از ریاضیات است. یکی از اولین نظریه‌های مدرن انتگرال توسط ریمان معرفی شد. انتگرال ریمان تعریف طبیعی و نسبتاً ساده از انتگرال است و ریاضی‌دانان، فیزیک‌دانان، مهندسان و بسیاری دیگر بطور مکرر از این انتگرال استفاده می‌کنند. اما مطالعه و تحقیق در آنالیز پیشرفته، نیاز به نظریه‌ای از انتگرال با خواص بیشتری در قضایای همگرایی دارد. ما بر این اعتقادیم که نظریه‌ی انتگرال ریمان بایستی نقطه‌ی شروع نظریه‌ی انتگرال باشد و آشغایی هرچه بیشتر خواننده با این نظریه، می‌تواند در درک و فهم زیبایی نظریه انتگرال لبگ موثر واقع شود. هدف اصلی ما در این کتاب معرفی مقدماتی نظریه‌ی اندازه به منظور مطالعه‌ی دقیق و پایه‌ای انتگرال لبگ است که در سال‌های اخیر توانسته است اهمیت و کاربرد خود را در توسیع آنالیز مدرن نشان دهد.

فصل اول کتاب را به بیان و یادآوری مفاهیم و تعاریف بنیادی و مورد نیاز در سراسر کتاب اختصاص داده‌ایم. هدف از این فصل مقدماتی، بیان برخی نمادها، اصطلاحات و قضایایی است که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در واقع با توجه به نیاز مطالب مورد بحث در فصول آتی به تعاریف و قضایای مقدماتی در نظریه‌ی مجموعه‌ها و آنالیز ریاضی و تسهیل در امر ارجاع به قضایا و تعاریف مورد نیاز، ما را بر آن داشت تا این فصل مقدماتی را به رشته تحریر درآوریم.

فصل دوم کتاب به نظریه‌ی اندازه اختصاص دارد. در ابتدا به ارائه‌ی تاریخچه‌ی مختصری از این نظریه و چگونگی پیدایش آن پرداخته‌ایم. سپس مجموعه‌های اندازه‌پذیر را مبتنی بر مفهوم سیگما-جبر بیان کرده و بدین ترتیب روی مجموعه‌ای دلخواه، گردایه‌ای از زیرمجموعه‌ها بنام مجموعه‌های اندازه‌پذیر را با خواصی مشترک جمع کرده و فضایی ساختیم که بتوان مفهوم تابع اندازه را روی این فضا پیاده ساخت. قبل از ساخت فضای اندازه، برخی فضاهای اندازه‌پذیر مهم و اساسی مانند فضای برل اندازه‌پذیرها و فضاهای حاصل ضربی با بعد متناهی و نامتناهی را معرفی کرده‌ایم. سپس تابع مجموعه‌ای بنام تابع اندازه را روی فضاهای اندازه‌پذیر تعریف و بدین طریق فضای اندازه را معرفی کرده‌ایم. به منظور معرفی فضای اندازه‌ی لبگ، مفهوم جدیدی با عنوان اندازه‌ی خارجی را تعریف کرده‌ایم و در

^۱Perron Integral^۲Denjoy Integral

نهایت با مقایسه‌ی مجموعه‌های لیگ اندازه‌پذیر و مجموعه‌های برل اندازه‌پذیر، این فصل را به پایان رسانده‌ایم.

فصل سوم کتاب به بحث انتگرال لیگ می‌پردازد. با ارائه‌ی تاریخچه‌ای مختصر از این نظریه‌ی تاریخی، به سراغ تعریف توابع اندازه‌پذیر می‌رویم. سپس توابع ساده و در واقع بلوک‌های ساختمانی نظریه‌ی انتگرال را معرفی و با تعریف انتگرال این توابع، مفهوم انتگرال لیگ را بر اساس این تعاریف معرفی و قضایای بسیار مهم مانند قضیه‌ی همگرایی یکنوا و قضیه‌ی تسلط لیگ را اثبات می‌کنیم. سپس به مقایسه‌ی دو نظریه‌ی انتگرال ریمان و لیگ در قالب قضایا می‌پردازیم. بعد فضاها‌ی کلاسیک L^p را مطالعه و کامل بودن این فضاها را ثابت خواهیم کرد. در نهایت این فصل با معرفی انواع همگرایی‌ها و بیان ارتباط مابین آنها خاتمه می‌یابد.

کتاب حاضر در حدود ۵۷۰٪ مباحث درس ۴ واحدی آنالیز حقیقی کارشناسی ارشد را دربر می‌گیرد و برای دانشجویان سال آخر کارشناسی و دانشجویان سال اول کارشناسی ارشد برای تمامی گرایش‌های ریاضیات کاربردی، محض و آمار نگاشته شده است. فرض بر این است که خواننده گرامی با مباحث اصول آنالیز ریاضی، برخی مقدمات جبر خطی و توپولوژی عمومی آشناست.

در اینجا وظیفه اخلاقی خود می‌دانیم، از خانم سیما آغچی و آقای وحید حسینی‌کیا به خاطر خواندن متن قبل از چاپ و ارائه‌ی نظرانی ارزشمند، صمیمانه تشکر نمایم. در نهایت از تمامی عزیزان خواننده استدعا داریم نظرات و پیشنهادات خود را با آدرس الکترونیکی زیر منتقل نمایند تا در چاپهای بعد مورد استفاده قرار گیرد.

با امید به اینکه این کتاب در نظر علاقمندان علم بویژه افرادی که به ریاضیات عشق می‌ورزند، مقبول افتد.

دکتر فریبا بهرامی - حسین فضل‌ی

دانشگاه تبریز - تابستان ۱۳۹۰

bahrami.fazli@gmail.com