

روشی عددی برای حل رده ای از مسائل تغییراتی کسری

قابل استفاده برای دانشجویان ریاضی و دانشجویان

تخصصیات تکمیلی (کارشناسی ارشد، دکترا و ...)

مؤلفان

دکتر احمد رستم پور، دکتر مسلم ولی زاده

مهر ماه ۹۶

سرشناسه	رستمپور، احمد، ۱۳۴۷ -
عنوان و نام پدیدآور	روشی عددی برای حل رده‌ای از مسائل تغییراتی کسری : قابل استفاده برای دانشجویان ریاضی و دانشجویان تحصیلات تکمیلی (کارشناسی ارشد، دکترا و ...)/ مولفان احمد رستمپور، مسلم ولی‌زاده.
مشخصات نشر	تبریز: انتشارات آلتین، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری	۷۴ ص: جدول، نمودار.
شابک	۹۰۰۰۰ ریال ۹۰۰۰۰-۸۹۰۳۰۰۴-۰۹۷۸-۶۰۰۰
وضعیت فهرست نویسی	فیا
موضوع	کسرها -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	(Higher -- Study and teaching (Fractions --
موضوع	نواع هموگرافیک Homographic functions
موضوع	مشتق گیری -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	(Higher -- Study and teaching (Fractional calculus --
موضوع	ریاضیات -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	(Higher -- Study and teaching (Mathematics --
شناسه افزوده	ولی‌زاده، مسلم، ۱۳۴۶ -
رده بندی کنگره	QA۱۱۷/۵۹۱۳۹۴
رده بندی دیویی	۵۱۳/۲۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی	۲۸۸۱۸۰۰



عنوان: روشی عددی برای حل رده ای از مسائل تغییراتی کسری

قابل استفاده برای دانشجویان ریاضی و دانشجویان تحصیلات تکمیلی (کارشناسی ارشد، دکترا و ...)

تألیف: دکتر احمد رستم پور، دکتر مسلم ولی زاده

ناشر: انتشارات آلتین

چاپ: اول/ سال / قطع: وزیری / سال ۹۰

شمارگان و تعداد صفحه: ۱۰۰۰ / صفحه

طرح جلد: مؤلف / محل نشر: تبریز

چاپ و صحافی: امین / قیمت: ۹۰۰۰ تومان

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۸۹۰۲-۰۴-۱

web: www.Altin-E.ir

email: yosefr40@yahoo.com

مرکز پخش: تبریز خیابان امام خمینی (ره) بازار بزرگ تربیت زیر زمین پلاک ۳۱

تلفن: ۰۹۱۴۴۱۲۷۴۹۹ - ۰۹۳۸۱۴۳۱۱۸۵ - ۰۴۱۳۵۵۳۱۹۶۷

به موجب مصوب ۱۳۴۸/۱۰/۱۱ دوی ۵ حیات از مؤلفان کپی حقوق و مسئولیت این کتاب برای مؤلفان محفوظ می باشد.

پیشگفتار

در این کتاب در صدد یافتن روشی عددی برای حل کلاسی از مسائل تغییراتی هستیم که در آن مشتقات کسری نیز به کار رفته است. بکار رفتن مشتقات کسری موجب این شده است که حل این مسئله تغییراتی با استفاده از معادلات اویلر-لاگرانژ تقریباً غیر ممکن شود. حتی اگر بخواهیم مسئله را بصورت عددی حل کنیم با محاسبات بسیار پیچیده ای روبرو می شویم. روش ارائه شده ما با استفاده از پایه های چند جمله ای مسئله را به حل سیستم معادلات جبر، تبدیل می کند که کارایی و دقت روش ارائه شده با چند مثال شرح و نشان داده شده است. روش عددی ارائه شده برای حل رده ای از مسایل تغییرات کسری (FVPS) با متغیرهای وابسته چندگان، مشتقات کسری چند مرتبه ای و گروهی از شرایط مرزی کاربرد دارد. مشتق کسری استفاده شده در مسئله تغییراتی، کاپوتو است.

در روش ارائه شده، مسئله بهینه سازی مفروضه، یک دستگاه معادلات جبری که در آن از توابع پایه چند جمله ای استفاده می شود، کاهش می یابد. با حل دستگاه حاصل جواب تقریبی برای FVP به دست می آید.

انتخاب توابع پایه چند جمله ای، روش انعطاف پذیری فراهم می کند که به راحتی می توان شرایط اولیه و مرزی را بر آن تحمیل نمود

این کتاب مشتمل بر سه فصل به انضمام یک پیوست می باشد. پس از معرفی مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصل یک، مشتق کسری استفاده شده در این پایان نامه، یعنی کاپوتو و هم

چنین تعاریف دیگر از مشتقات کسری از جمله ریمان^۱ - لیوویل و گرانوالد - لتینکوف^۱ را در ادامه این فصل مطرح کردیم و در فصل دوم حساب تغییرات و معرفی معادلات اویلر - لاگرانژ^۲ را مورد بحث قرار دادیم و همچنین روش ریلی ریتز^۳ که مبنای حل مسئله تغییراتی کسری در این پایان نامه بر این روش استوار است توضیح داده شده است. در ادامه این فصل مسائلی که در فیزیک با آنها روبرو می شویم و برای حل آنها از حساب تغییرات و معادلات اویلر - لاگرانژ باید استفاده کرد آورده ایم. در فصل سوم که بر اساس مقاله [۹] است به حل مسئله تغییراتی کسری می پردازیم و در ادامه این فصل همگرایی روش ارائه شده را ثابت کرده و در انتهای فصل مثال های عددی جهت نشان دادن کارایی روش، ارائه می کنیم.

^۱ Grundwald-Leitnikov

^۲ Euler-Lagrange equations

^۳ Ritz

مقدمه ۱

فصل اول: تعاریف و مفاهیم مقدماتی ۴

۱-۱- تربع متعامد ۶

۲-۱- چند جمله ای های لژاندر ۹

۱-۲-۱- تعامد چند جمله ای های لژاندر ۱۰

۲-۲-۱- چند جمله ای تغییر شکل یافته ی لژاندر ۱۱

۳-۱- درونیابی هرमित ۱۱

۴-۱- قضایا و لم های مورد نیاز ۱۲

۵-۱- تابع گاما ۱۵

۶-۱- انتگرال و مشتق از مرتبه کسری ۱۷

۱-۶-۱- مشتق کسری کاپوتو ۱۷

۷-۱- انتگرال و مشتق چپ و راست ریمان - لیوویل و کاپوتو ۲۰

۱-۷-۱- رابطه بین مشتقات کاپوتو و ریمان - لیوویل ۲۰

فصل دوم: حساب تغییرات ۲۶

۲۷	۱-۲ مقدمه
۲۸	۲-۲ مسئله بنیادی در حساب تغییرات
۲۸	۳-۲ معادله اویلر-لاگرانژ
۳۵	۴-۲ مصداق هایی از مسائل تغییراتی در فیزیک
۳۶	۲-۴-۱ مسئله براچیستوچرون
۳۷	۲-۴-۲ مسئله زنجیر آویخته
۳۸	۳-۴-۲ مسئله جاب صابین
۳۹	۴-۴-۲ حل مسئله جاب صابین مسئله زنجیر آویخته
۴۰	۵-۴-۲ حل مسئله مینیمم زمان
۴۳	۵-۲ روش ریلی-ریتز
۴۴	۶-۲ تعمیم مسئله تغییراتی
۴۵	۱-۶-۲ فانکشنال هایی شامل چند تابع
۴۶	۲-۶-۲ فانکشنال هایی شامل مشتقات مراتب بالاتر
۴۷	۳-۶-۲ فانکشنال هایی شامل چند تابع با مشتقات مراتب بالاتر
۵۴	فصل سوم: حل عددی رده ای از مسائل تغییرات کسری
۵۵	۱-۳ مقدمه
۵۵	۲-۳ حل مسئله تغییرات کسری
۵۶	۳-۳ همگرانی روش ارائه شده

۶۶ ۳-۴ مسائل آزمایشی

۶۶ ۳-۴-۱ مثال عددی

۶۷ ۳-۴-۲ مثال عددی

۶۸ ۳-۴-۳ مثال عددی

۷۲ ۳-۵ نتیجه گیری

۷۳ مراجع و مآخذ

www.ketab.ir

حساب تغییرات شاخه ای از آنالیز است که با مسائل ماکزیمم و مینیمم سر و کار دارد. مرتبه های کسری پویا^۴ در مسائل متعدد در علوم و مهندسی مانند ویسکوالاستیسیته^۵ [۱-۲]، مهندسی زیستی^۶ [۳]، دینامیک رابط های بین نانو ذرات و بسترها^۷ [۴]، و ... ظاهر می شوند. هم چنین نشان داده شده است که مواد با خاصیت و اثرات موروثی و فرآیندهای دینامیکی از جمله انتشار، گر و هدایت گرما در فراکتال های چندگانه^۸ را می توان با استفاده از مدل های مرتبه کسری به از مدل های با مرتبه عدد صحیح مدل سازی کرد [۵]. خواننده علاقمند به محاسبات کسری و مدل های دیفرانسیل کسری می تواند به [۶-۸-۷-۶] مراجعه کند.

اگر چه حساب تغییرات، برای چند سال در حال پیشرفت بوده است، نظریه تغییرات کسری عرصه ای نوپا در ریاضیات است. مسئله تغییرات کسری^۹ (FVP) را می توان با توجه به تعاریف مختلف از مشتقات کسری تعریف کرد اما مهم ترین انواع آن، ریمان-لیوویل^{۱۰} و مشتقات کاپوتو^{۱۱} می باشد.

^۴ Fractional order dynamics

^۵ Viscoelasticity

^۶ Bioengineering

^۷ Dynamics of interfaces between nanoparticles and substrates

^۸ Fractal porous media

^۹ Fractional variational problem

^{۱۰} Riemann-Liouville

^{۱۱} Caputo derivatives

امروزه اصطلاح حساب کسری عبارت است از حساب مربوط به انتگرال و مشتقگیری از مرتبه دلخواه به طوری که مرتبه مشتق بتواند گویا، گنگ، و حتی مختلط باشد.

مشتقات و انتگرال های کسری بحث های صرفاً ریاضی نیستند بلکه کاربردهای فراوانی در مدارهای الکتریکی، شیمی تجزیه، چند قطبی های کسری، فرموله کردن مسائل فیزیک، شیمی و علوم بیولوژیکی دارد.

اخیراً کاربردهای مرتبه های کسری شامل عملگر دیفرانسیلی ریمان - لیوویل در زمینه های مختلف نظیر دینامیک محاسباتی سیالات، پردازش سیگنال، بیوفیزیک، پلیمر و مکانیک آماری دیده شده است.

تمام بحث ها و مطالعات انجام شده در این شاخه بر پایه تعاریف موجود از مشتق و انتگرال کسری بنا شده است. تعاریف مختلفی از مشتق انتگرال کسری وجود دارد که منشأ متفاوتی دارند و لزوماً هم معادل یک دیگر نیستند.

حساب کسری از قرن ۱۷ آغاز شد و بحث های اول، این شاخه شامل کارهای لایب نیتز^{۱۴}، اویلر^{۱۳}، لاگرانژ^{۱۴}، لاپلاس^{۱۵}، آبل^{۱۶}، لیوویل، ریمان و بسیاری دیگر بوده است. اولین گزارش مربوط به تعمیم مشتقات معمولی به مشتقات کسری منسوب به لایب نیتز و هوییتال^{۱۷}

است که در آن هوییتال از لایب نیتز می پرسد که اگر در نماد $\frac{d^n}{dt^n}$ ، به جای n عدد $\frac{1}{2}$ قرار

^{۱۴} Leibniz

^{۱۳} Euler

^{۱۲} Lagrange

^{۱۵} Laplace

^{۱۶} Abel

^{۱۷} L'Hopital

دهیم چه اتفاقی می افتد. لاپلاس (۱۸۱۲) مشتقات کسری را به صورت یک انتگرال تعریف می کند و در سال ۱۸۱۹ لاکروئکس^{۱۸} مشتقات کسری با مرتبه دلخواه را با تعمیم فرمول مشتق معمولی زیر مورد توجه قرار داد :

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n, m, n \in \mathbb{N}$$

که تعمیم او برای هر m و n به صورت زیر بود

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

تحقیقات در مورد حساب کسری در این سال راه خود قرار دارد و هم اکنون تیم های کاری متفاوتی در دنیا مشغول مطالعه و تحقیق برای بسط و گسترش این شاخه نو ظهور با قدمت ۳۱۰ ساله هم چنان ادامه دارد.

^{۱۸} Lacroix