

مدل‌های اکچوئری

(جلد اول)

تعاریف و مفاهیم پایه‌ای و توزیع مجدد

نویسنده:

ولادیمیر آی روتار

مترجمان:

دکتر میرمهدی سید اصفهانی

با همکاری سمیه نماینده



پژوهش‌های بیمه
دانشگاه تهران

سرشناسه	روتار، ولادیمیر ایلچ (Vladimir Iljich) Rotar, V. I.
عنوان و نام پدیدآور	مدل‌های اکچوئری: تعاریف و مفاهیم پایه‌ای و توزیع مجدد/ نویسنده ولادیمیر آی روتار؛ مترجمان میرمهدی سیداصفهان‌ای؛ با همکاری سمیه نماینده.
مشخصات بشری	تهران: بیمه مرکزی ایران، پژوهشکده بیمه، ۱۳۹۱ -
مشخصات ظاهری	ج: تعداد: ۲۶.
فروست	سری کتابهای تحول در صنعت بیمه، ۹۶.
شابک	978-964-6506-92-3 : 978-964-6506-93-0
وضعیت فهرستی	فیا
یادداشت	عنوان اصلی: mathematics of insurance, 2006 Actuarial models : the
موضوع	بیمه -- ریاضیات
شناسه افزوده	سید اصفهان‌ای، مهدی، مترجم
شناسه افزوده	نماینده، سمیه، مترجم
شناسه افزوده	بیمه مرکزی ایران پژوهشکده بیمه
رده بندی کنگره	۳۶۵ : ۳۶۶ / HG : ۹ : ۱۳۹۱
رده بندی دیویی	۳۶۵
شماره کتابشناسی ملی	۲۷ : ۲۶۶



مدل‌های اکچوئری (جلد اول) (تعاریف و مفاهیم پایه‌ای و توزیع مجدد)

نویسنده: ولادیمیر آی روتار

مترجمان: دکتر میرمهدی سید اصفهان‌ای با همکاری سمیه نماینده

ناظر: دکتر مسعود درخشان

ویراستار: مؤسسه کلک زرین (مریم بحرانی)

صفحه‌آرا: علی حسین صفری

طراح جلد: یوسف رجایی

ناظر فنی چاپ: علی حاتم آبادی

چاپ اول: ۱۳۹۱

چاپ: اسری

تعداد: ۱۰۰۰ نسخه

قیمت: ۵۲۰۰۰ ریال

ناشر: پژوهشکده بیمه (وابسته به بیمه مرکزی ج.ا.ا.)

نشانی: تهران: سعادت آباد - میدان کاج - خیابان سرو غربی - پلاک ۲۳

صندوق پستی: ۱۹۳۹۵-۲۴۹۹ تلفن: ۲۲۰۸۲۰۸۲ دورنگار: ۲۲۰۸۲۰۲۲

وب‌سایت: <http://www.IRC.ac.ir> پست الکترونیکی: info@IRC.ac.ir

حق چاپ برای ناشر محفوظ است

پیشگفتار رئیس کل بیمه مرکزی ج.ا.ا.

رهنمود مقام معظم رهبری مدظله العالی در نام‌گذاری دهه چهارم انقلاب اسلامی با عنوان دهه پیشرفت و عدالت، آغاز مرحله جدیدی در پویایی ایران اسلامی به سمت الگوی مطلوب اقتصادی است؛ الگویی که ثمره آن سعادت و رفاه دنیوی و اخروی انسان در ابعاد مادی و معنوی خواهد بود.

نهاد بیمه از جهت افزایش امنیت ذهنی و اطمینان خاطر و نیز توزیع عادلانه اثرات سوء مخاطره‌ها، نقش مهمی در بهسازی بستر اقتصادی جامعه دارد. این نهاد با کاهش زیان‌های ناشی از انواع خطرات متداول در عرصه‌های مختلف زندگی و کاهش فقر جبری ناشی از خسارت‌های غیرقابل پیش‌بینی، نقش مهمی در تحقق عدالت اقتصادی ایفا می‌کند. همچنین جایگاه این نهاد در تأمین بخشی از منابع مالی مورد نیاز برای سرمایه‌گذاری، افزایش تولید و اشتغال پایدار، موجب اهمیت آن در تحقق پیشرفت اقتصادی می‌گردد. به همین جهت نهاد بیمه از اجزای بی‌بدیل در الگوی اسلامی-ایرانی پیشرفت محسوب می‌شود.

بیمه مرکزی ج.ا.ا. - به عنوان متولی صنعت بیمه در کشور - مأموریت دارد زمینه مناسب توسعه و ارتقای کمی و کیفی عملکرد این صنعت را فراهم آورد. بدین لحاظ و از جهت راهبرد کلان کشور در پیشرفت دانش بنیان اقتصاد ملی، پژوهشکده بیمه (وابسته به بیمه مرکزی ج.ا.ا.) با هدف تأمین نیازمندی‌های علمی و توسعه زیرساخت‌های نرم‌افزاری صنعت بیمه کشور فعالیت می‌کند. انتشار کتاب‌ها و نشریات علمی - پژوهشی، تخصصی و اطلاع‌رسانی و مدیریت مطالعات و پژوهش‌های تخصصی در حوزه بیمه، از مأموریت‌های اصلی این پژوهشکده در راستای هدف مذکور است. امید است این اقدامات، عامل مؤثری در بهبود وضعیت و جایگاه این نهاد در کشور شده و انشاءالله موجبات تحقق وضعیت مطلوب آن در چهارچوب الگوی اسلامی - بومی در کشورمان فراهم شود.

سید محمد کریمی

رئیس کل بیمه مرکزی ج.ا.ا.

پیشگفتار سرپرست پژوهشکده بیمه

بیمه، صنعتی سودمند، ضروری، مؤثر در توسعه اقتصادی و تقویت کننده روحیه تعاون و همیاری است. این صنعت از جهت داشتن سه اثر مهم «افزایش امنیت در عرصه های مختلف زندگی و فعالیت های اقتصادی»، «افزایش سرمایه گذاری، اشتغال و رشد اقتصادی»، و «توزیع عادلانه ریسک ها و ارتقای عدالت اقتصادی و کاهش فقر ناشی از مخاطرات که دامنگیر بخشی از جامعه می شود»، حائز جایگاه مهمی در پیشرفت و تعالی یک کشور است.

باوجود نقش مهم بیمه در بسترسازی و تأمین شرایط مساعد اقتصادی، وضعیت کنونی این صنعت در اقتصاد ملی با وضعیت بایسته آن فاصله معناداری دارد. ناآشنایی عمومی و کم بودن تقاضا برای محصولات بیمه ای، دانش فنی پایین در عرضه خدمات بیمه ای، وجود نارسایی ها در مدیریت واحدهای عرضه بیمه از دلایل عدم توسعه مناسب این صنعت در کشور است. از آنجاکه بشر همه رستگاری ها و توفیقات خود را در طول تاریخ به کمک علم و تجربه کسب کرده است، کلید حل این مشکل نیز نگاه علمی تر به مشکلات این صنعت و یافتن راه حل در بستر علم است. این هدف جز با حرکت در دو مسیر به صورت توأمان میسر نمی گردد. مسیر اول، فرهنگ سازی عالمانه و بسط و گسترش علوم مرتبط با بیمه با انجام پژوهش ها و ممارست در انتقال علوم مرتبط با بیمه و بومی کردن آن و مسیر دوم، استفاده از نتایج این علوم و تبدیل نظریات به راهکارهای اجرایی است.

پژوهشکده بیمه (وابسته به بیمه مرکزی ج.ا.ا) به عنوان مهم ترین نهاد علمی و پژوهشی ملی در صنعت بیمه، وظیفه مدیریت و هدایت فعالیت های علمی و پژوهشی مختلف در این حوزه را با هدف برطرف کردن کاستی های مربوط به عرضه و تقاضا برای محصولات بیمه و نیز بهبود وضعیت این صنعت و ارتقای جایگاه آن در نظام مالی و اقتصادی کشور برعهده دارد. انتشار کتاب ها، نشریات و محصولات علمی

مرتبط با این صنعت، به‌منظور گسترش این دانش و بهره‌گیری از آن در عمل، از جمله مأموریت‌های مهم و کلیدی این پژوهشکده است.

باتوجه به اینکه از سیاست‌های مهم برنامه تحول در صنعت بیمه کشور، توسعه توانمندی‌ها و ظرفیت‌های علمی این صنعت بوده و مهم‌ترین ابزار نیل به این هدف، انتشار کتاب‌های تخصصی در زمینه بیمه است، پژوهشکده بیمه، با انتشار کتاب‌های تخصصی بیمه به‌صورت تألیف یا ترجمه و بومی کردن آن، تلاش می‌کند تا در راه دستیابی به این هدف گام بردارد.

کتاب حاضر، یکی از این کتاب‌های تخصصی است که امید می‌رود برای کلیه خوانندگان سودمند واقع گردد. در پایان بر خود لازم می‌دانم از نویسندگان / مترجمان و تمامی همکاران پژوهشکده بیمه در بخش‌های مختلف به‌خاطر زحماتی که در امر تألیف، ترجمه و چاپ و انتشار این کتاب‌ها متحمل می‌شوند، تشکر و قدردانی کنم.

غدير مهدوی

سورست پژوهشکده بیمه

پیشگفتار مترجم

اثر پیش‌رو، به عنوان منبع درسی و آموزشی که در آن کاربرد ریاضی و روش‌های آماری در مدل «اکچوثری» به‌کار گرفته شده است، توسط آقای دکتر «ولادیمیر آی‌رونتار»، یکی از برجسته‌ترین اساتید در به‌کارگیری ریاضیات کاربردی و تئوری احتمالات در حوزه «بیمه» تألیف گردیده است. این کتاب که در سال ۲۰۰۶ به زیور طبع آراسته شده، ثمره سالیان سال تجربیات علمی و عملی نویسنده است که سابقه بیش از ۴۰ سال تدریس در دانشگاه‌های روسیه و دانشگاه‌های ایالتی کالیفرنیا را در کارنامه خود دارد.

مطالب عرضه شده در این کتاب، به عنوان منبعی مفید برای دانشجویان، خصوصاً دانشجویان مقاطعه کارشناسی ارشد و دکترا، و هم برای یک ترم مقدماتی و به صورت جامع برای مراحل بالاتر طراحی شده است.

برای تسهیل در مطالعه از شبه‌علائم راهنمایی استفاده شده است که طراح به عنوان نقشه راه ارائه کرده است. راه ۱ به عنوان مقدمه، راه ۲، علاوه بر برگرفتن راه ۱، به ارائه کامل مطالب مورد نظر می‌پردازد و راه ۳ نیز شامل تمامی مطالب کتاب است. با این حال بخشی از راه ۳ که در راه ۱ و ۲ مطرح نشده، اندکی با چالش همراه است. از منظر کلی نسبت به ساختار کتاب، جدول مطالب به همراه علائم راهنما، توسط مولف به خوبی تدوین گردیده و روشی مناسب برای تنظیم مطالعه برخی راهبردهای گزینشی ارائه شده است.

بدیهی است طبقه‌بندی پذیرفته شده در کتاب، تنها طبقه‌بندی ممکن نیست؛ با این حال اولویت‌های مورد نظر مولف تا حد معینی منعکس شده است تا علاقه‌مندان برنامه مطالعه مورد علاقه خود را برگزینند. از همین رو، ساختار کتاب و علائم راهنمای مندرج در آن، خواننده را در انتخاب روش مطالعه یاری می‌کند. لذا مطالعه اثر حاضر، به دانشجویان، پژوهشگران و کارشناسان علم بیمه، توصیه می‌گردد.

به جاست از حمایت‌های عملی مدیریت و مسئولین محترم پژوهشکده بیمه، همچنین ناظر محترم، استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر مسعود درخشان- از

صاحب‌نظران بنام و مطرح علم اقتصاد و بهینه‌سازی- نیز از مرکز مطالعات و مدیریت ایران که بستر مناسبی در به ثمر رسیدن این ترجمه فراهم نموده است، سپاسگزاری گردد همچنین از آقایان مهندس سید حسین سید اصفهانی، رامین خاتمی و خانم مهندس مهسا اروجنی که بخشی از ویرایش کتاب را به عهده داشته‌اند، کمال سپاس و قدردانی می‌شود.

شایسته است، از همکاری و مشارکت قابل توجه سرکار خانم مهندس سمیه نماینده همکار و مربی ارزشمند مرکز مطالعات مدیریت ایران که همیاری قابل ملاحظه‌ای در ترجمه و ویراستاری بخش مهم از این اثر را مبذول داشته‌اند، تقدیر و تشکر ویژه گردد.

پیشاپیش از ارائه هر گونه نقد و راهنمایی از سوی جامعه دانشگاهی، صاحب‌نظران، همکاران گرامی و پژوهشگران بیمه که موجب اصلاح و تکامل ترجمه پیشه رو خواهد شد، سپاسگزاری و قدردانی می‌شود.

دکتر میر مهدی سید اصفهانی^۱

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

فهرست مطالب

مقدمه ۳

فصل صفر: برخی مفاهیم اولیه نظریه احتمالات، نظریه بهره و حسابان ۱۷

۱-۱- احتمالات و متغیرهای تصادفی ۱۷

۱-۱-۱- فضای نمونه، پیشامدها و اندازه احتمال ۱۷

۱-۲-۱- استقلال پیشامدها و احتمالات شرطی ۲۰

۳-۱- متغیرهای تصادفی، بردارهای تصادفی و توزیع آنها ۲۲

۱-۳-۱- متغیرهای تصادفی ۲۲

۱-۳-۲- بردارهای تصادفی ۲۴

۱-۳-۳- توابع توزیع تجمعی ۲۹

۱-۳-۴- چندک‌ها ۳۴

۱-۳-۵- آمیختن توزیع‌ها ۳۵

۲- امید ریاضی ۳۷

۱-۲- تعاریف ۳۷

۲-۲- انتگرال‌گیری جزیه‌جز و فرمولی برای امید ریاضی ۴۰

۲-۳- تعریف کلی از امید ریاضی ۴۲

۲-۴- آیا می‌توان در مدل‌های واقعی پدیده‌ها با امید ریاضی بی‌نهایت مواجه شد؟ ۴۴

۲-۵- همبستگی گشتاورهای متغیرهای تصادفی ۴۶

۲-۵-۱- واریانس و دیگر گشتاورها ۴۶

۲-۵-۲- نامساوی کوشی - شوارتز ۴۸

۲-۵-۳- کواریانس و همبستگی ۴۸

۲-۶- نامساوی‌ها برای انحرافات ۵۱

۲-۷- تبدیلات خطی؛ نرمال‌سازی متغیرهای تصادفی ۵۳

۵۴	۳- برخی توزیع‌های پایه
۵۴	۳-۱- توزیع‌های گسسته
۵۴	۳-۱-۱- توزیع دو جمله‌ای
۵۶	۳-۱-۲- توزیع چند جمله‌ای
۵۶	۳-۱-۳- توزیع هندسی
۵۸	۳-۱-۴- توزیع دو جمله‌ای منفی
۶۰	۳-۱-۵- توزیع پواسون
۶۱	۳-۲- توزیع‌های پیوسته
۶۱	۳-۲-۱- توزیع یکنواخت و شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی
۶۵	۳-۲-۲- توزیع نمایی
۶۸	۳-۲-۳- توزیع گاما
۶۹	۳-۲-۴- توزیع نرمال
۷۱	۴- توابع مولد گشتاور
۷۱	۴-۱- تبدیل لاپلاس
۷۵	۴-۲- مثالی برای حالتی که تابع مولد گشتاور وجود ندارد
۷۷	۴-۳- توابع مولد گشتاور توزیع‌های اولیه
۷۷	۴-۳-۱- توزیع دو جمله‌ای
۷۹	۴-۳-۲- توزیع‌های هندسی و دو جمله‌ای منفی
۷۹	۴-۳-۳- توزیع پواسون
۸۰	۴-۳-۴- توزیع یکنواخت
۸۰	۴-۳-۵- توزیع‌های نمایی و گاما
۸۱	۴-۳-۶- توزیع نرمال
۸۱	۴-۴- تابع مولد گشتاور و گشتاورها
۸۳	۴-۵- بسط توابع مولد گشتاور
۸۳	۴-۵-۱- بسط تیلور برای توابع مولد گشتاور

۴-۵-۲- تجمعی ۸۴

۵- همگرایی متغیرهای تصادفی و توزیع‌ها ۸۶

۶- بعضی اصول و فرمول‌ها از نظریه بهره ۹۱

۶-۱- بهره مرکب ۹۱

۶-۲- نرخ اسمی ۹۷

۶-۳- تنزیل و مستمری‌های سالیانه ۹۸

۶-۴- ارزش تجمعی (ارزش انباشته) ۱۰۱

۶-۵- نرخ‌های تنزیل اسمی و مؤثر ۱۰۲

۷- ضمیمه: برخی نمادها و واقعیات حسابان ۱۰۴

۷-۱- نماد o کوچک و O بزرگ ۱۰۴

۷-۱-۱- o کوچک ۱۰۴

۷-۱-۲- O بزرگ ۱۰۷

۷-۲- بسط‌های تیلور ۱۰۷

۷-۲-۱- بسط کلی ۱۰۷

۷-۲-۲- تعدادی از بسط‌های خاص ۱۰۹

۷-۳- تقریر ۱۱۰

فصل یک: مقایسه متغیرهای تصادفی ۱۱۱

۱- مقایسه متغیرهای تصادفی و بعضی معیارهای خاص ۱۱۳

۱-۱- ترتیب اولویت‌ها ۱۱۳

۱-۲- چند معیار ساده ۱۱۹

۱-۲-۱- معیار مقدار میانگین ۱۱۹

۱-۲-۲- ارزش در خطر (Var) ۱۲۰

۱-۲-۳- یک تذکر مهم: اندازه‌گیری خطر نسبت به معیار ۱۲۵

۱-۲-۴- دنباله امید شرطی (TCE) یا دنباله ارزش در خطر ۱۲۶

۱-۲-۵- معیار واریانس - میانگین ۱۳۲

۳	۱۳۷	۳-۱- چسبندگی اندازه‌های خطر
۳ و ۱۰	۱۴۴	۲- مقایسه متغیرهای تصادفی و قضایای حدی نظریه احتمال
	۱۴۴	۲-۱- انحراف از نظریه احتمال: دو گزاره حدی
	۱۴۴	۲-۱-۱- قانون اعداد بزرگ
	۱۴۵	۲-۱-۲- قضیه حد مرکزی
	۱۴۶	۲-۲- یک مدل ساده بیمه با تعداد زیادی از مشتریان
	۱۵۰	۲-۳- بارادوکس سن پترزبورگ
	۱۵۲	۳- مطلوبیت مورد انتظار
	۱۵۲	۳-۱- حداکثر مطلوبیت مورد انتظار
	۱۵۲	۳-۱-۱- تابع مطلوبیت
	۱۵۴	۳-۱-۲- معیار حداکثر سازی مطلوبیت مورد انتظار
	۱۶۰	۳-۱-۳- مثال‌های کلاسیک تابع مطلوبیت
	۱۶۴	۳-۲- مطلوبیت و بیمه
	۱۶۸	۳-۳- چگونه می‌توان تابع مطلوبیت را در حالت‌های خاص مشخص کرد؟
	۱۷۰	۳-۴- خطرگریزی
	۱۷۰	۳-۴-۱- تعریف
	۱۷۳	۳-۴-۲- نامساوی جنسن
۱۰ و ۳	۱۷۵	۳-۴-۳- چگونه خطرگریزی را در حالت حداکثر مطلوبیت مورد انتظار
	۱۷۹	۳-۴-۴- اثبات‌ها
	۱۸۲	۳-۵- چشم‌اندازی تازه: حداکثر مطلوبیت مورد انتظار به‌عنوان یک معیار خطی
	۱۸۲	۳-۵-۱- اولویت‌ها در توزیع‌ها
	۱۸۳	۳-۵-۲- اولین تسلط تصادفی
	۱۸۶	۳-۵-۳- دومین تسلط تصادفی
	۱۸۸	۳-۵-۴- معیار حداکثر مطلوبیت مورد انتظار
	۱۹۰	۳-۵-۵- خطی بودن مطلوبیت تابعی

۱۹۷	۳-۵-۶- رهیافت بدیهی
۲۰۱	۴- معیارهای غیرخطی
۲۰۱	۴-۱- پارادوکس الیاس
۲۰۳	۴-۲- مطلوبیت وزنی
۲۰۸	۴-۳- مطلوبیت مقایسه‌ای و یا ضمنی
۲۰۸	۴-۳-۱- تعاریف و مثال‌ها
۲۱۲	۴-۳-۲- درجه حالتی معیار مطلوبیت ضمنی خطی است
۲۱۴	۴-۴- درجه وابستگی مطلوبیت مورد انتظار
۲۱۴	۴-۴-۱- تعاریف و مثال‌ها
۲۲۰	۴-۴-۲- کاربرد در بیمه
۲۲۱	۴-۴-۳- بحث اضافی و اصل موضوعه مهم
۲۲۴	۴-۵- ملاحظات
۲۲۶	۵- پرداخت بهینه از نقطه نظر بیمه
۲۲۶	۵-۱- نظریه "ارو"
۲۳۳	۵-۲- تعمیم
۲۳۴	۶- تمرین‌ها
۲۵۱	فصل دوم: مدل خطر شخصی برای یک دوره کوتاه
۲۵۴	۱- توزیع پرداخت شخصی
۲۵۴	۱-۱- توزیع زیان به شرط آنکه اتفاق افتاده باشد
۲۵۴	۱-۱-۱- تعاریف؛ مشخصات دنباله‌ها
۲۶۰	۱-۱-۲- برخی توزیع‌های دم سبک خاص
۲۶۲	۱-۱-۳- برخی توزیع‌های دم سنگین خاص
۲۶۵	۱-۱-۴- رفتار مجانبی دنباله‌ها و گشتاورها
۲۶۸	۱-۲- توزیع زیان X
۲۶۹	۱-۳- توزیع پرداخت و انواع بیمه

۲- پرداخت تجمعی ۲۸۲

۱-۲- تلفیق‌ها ۲۸۲

۱-۱-۲- تعاریف و مثال‌ها ۲۸۲

۲-۱-۲- چند مثال کلاسیک ۲۸۸

۳-۱-۲- قیاس فرمول دو جمله‌ای برای تلفیق‌ها ۲۹۴

۲-۲- توابع مولد گشتاور ۲۹۵

۳- تقریب نرمال و سایر تقریب‌ها ۳۰۰

۱-۳- تقریب نرمال ۳۰۰

۱-۱-۳- یک رویکرد ابتکاری ۳۰۰

۲-۱-۳- یک یادآوری مهم: مولفه انحراف معیار ۳۰۸

۳-۱-۳- برآورد سخت‌تر ۳۱۰

۴-۱-۳- تعداد قراردادهای مورد نیاز برای نگهداری سطح امنیت ۳۱۹

۲-۳- چگونه عدم تقارن δ را در نظر بگیریم ۳۲۲

۳-۳- بسط‌های مجانبی و تقریب توان نرمال ۳۲۶

۴- تمرین‌ها ۳۲۹

مقدمه

www.ketab.ir

مقدمه

این بخش را با مثال ساده‌ای که در ادامه بیان خواهد شد، آغاز می‌نماییم. دو سرمایه‌گذار "الف" و "ب" به ترتیب انتظار درآمدهای تصادفی معادل متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 را دارند. مواردی را که X ها ممکن است مقادیر منفی به خود بگیرند که مترادف با زیان است را مستثنی نمی‌کنیم. برای سهولت، فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع احتمال یکسان هستند. بنابراین X_1 و X_2 دارای میانگین $m = E\{X_i\}$ و واریانس $\sigma^2 = Var\{X_i\}$ خواهند بود.

فرض کنید "الف" و "ب" مخاطره‌آمیزی سرمایه‌گذاری‌های خود را بر اساس واریانس درآمد مورد ارزیابی قرار می‌دهند و چون هر دو خطرگریز هستند، تلاش می‌نمایند مخاطره‌آمیزی درآمدهای آتی خود را کاهش دهند. برای رسیدن به این هدف، "الف" و "ب" تصمیم می‌گیرند درآمد کل خود را به سهم‌های مساوی تقسیم نمایند، بنابراین هر کدام درآمد تصادفی زیر را خواهد داشت:

$$Y = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

بدین ترتیب میانگین درآمد جدید آنان به این صورت خواهد بود:

$$E\{Y\} = \frac{1}{2}(E\{X_1\} + E\{X_2\}) = \frac{1}{2}(m + m) = m.$$

که با قبل از تسهیم خطر برابر است. از سوی دیگر، واریانس درآمد جدید، $Var\{Y\}$ نصف واریانس درآمد قبلی است.

$$Var\{Y\} = \frac{1}{4}(Var\{X_1\} + Var\{X_2\}) = \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{1}{2}\sigma^2.$$

گرچه این نتیجه مشخص بوده و اثبات آن به سهولت امکان‌پذیر است. اما یک حقیقت بنیادین کلیدی است و به راستی شگفت‌انگیز است. مخاطره‌آمیزی سیستم به عنوان یک کل تغییر نکرد و متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 همان‌گونه که بودند باقی ماندند ولی سطح خطری که هر یک از شرکاء با آنها مواجه بودند، کاهش یافته است.

اکنون حالت n شریک در یک مبادله خطر متقابل را در نظر بگیرید و درآمدهای تصادفی آنها را با $X_1, X_2, \dots, X_n$ نشان دهید. دوباره فرض کنید که X ها مستقل و دارای توزیع یکسان هستند. در این صورت $m = E\{X_i\}$ و $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\}$ می‌باشند. بنابراین اگر شرکاء درآمد کل خود را به نسبت‌های مساوی بین خود تقسیم نمایند، متوسط درآمد هر یک،

$$Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

خواهد بود. در این حالت، واریانس جدید برابر است با:

$$\text{Var}\{Y_n\} = \frac{1}{n^2} (\sigma^2 + \dots + \sigma^2) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

و به ازای مقادیر بزرگ n واریانس به صفر نزدیک می‌شود.

همان‌گونه که از نظریه احتمالات و قانون اعداد بزرگ نتیجه می‌شود، می‌توان گفت که به ازای n های بزرگ، نه تنها واریانس به صفر نزدیک خواهد شد، بلکه خود متغیر تصادفی Y_n نیز منطقی‌اً به مقدار غیر تصادفی m نزدیک می‌شود. بنابراین با تعداد زیادی از شرکاء، خطر هر یک از آنان ممکن است تا حد صفر کاهش یابد. این مطلب را به طور دقیق‌تر در فصل ۱ بررسی خواهیم کرد.

پدیده‌ای که در ساده‌ترین شکل آن را مشاهده کردیم، توزیع مجدد خطر^۱ نامیده می‌شود. این پدیده در بطن بیشتر سازوکارهای تثبیت مالی و به طوور قطع، در بیمه وجود دارد. مردم از بیمه استفاده می‌کنند زیرا آنان می‌توانند خطر را توزیع مجدد نمایند و چنانچه تعداد شرکت‌کنندگان زیاد باشد، این خطر برای هر یک از آنان کوچک می‌شود. شرکت‌های بیمه، نقش سازمان‌دهی چنین توزیع مجددی را ایفا می‌نمایند؛ البته آنها این کار را برای کسب منفعت آن انجام می‌دهند، گرچه سازمان‌های غیر انتفاعی بیمه متقابل نیز وجود دارد.

با کمی مبالغه می‌توان گفت نظریه‌ای که در این کتاب مطالعه می‌نماییم به تعمیم‌های متعددی از طرح فوق‌الذکر می‌پردازد؛ لذا برای داشتن یک تصویر کلی، چارچوب و رنوس مطالب این کتاب را بیان می‌کنیم.

در فصل ۱ خواهیم دید که واریانس تنها ویژگی ممکن مخاطره‌آمیزی نیست و در حقیقت بسیار دور از بهترین ویژگی است. معیارهای پیچیده‌تر و قابل انعطاف‌تری از خطر وجود دارند که در فصل ۱، چند مورد مهم آنها را مطالعه می‌کنیم. گرچه آنها به لحاظ ماهیت از یکدیگر متفاوت‌اند، اما سازوکار توزیع مجدد خطر در خصوص این معیارهای خطر، صادقی است، ضمن آنکه برای معیار واریانس نیز عمل می‌کند.

در این فصل برخی طرح‌های بیمه‌ای ساده را در نظر می‌گیریم و اولین مدل بیمه‌ای نسبتاً کامل را در فصل دوم ارائه می‌کنیم. این فصل را با تنها یک مشتری یا بیمه‌گذار آغاز می‌کنیم که موضوع مورد مطالعه در اینجا پرداخت تصادفی آتی X به مشتری توسط شرکت می‌باشد. ساختار متغیر تصادفی X را تعیین نموده و به طبقه‌بندی توزیع‌های احتمال ممکن که X می‌تواند داشته باشد، می‌پردازیم. این توزیع‌ها به توزیع زبان‌های ممکن بیمه‌گذار و همچنین به نوع بیمه بستگی دارد. برای مثال، شرکت می‌تواند تمامی زبان‌ها را پوشش دهد و با فروش بیمه را تحمیل نموده و یا درصد معینی از زبان‌ها را بازپرداخت نماید.

هنگامی که چگونگی رخداد متغیر تصادفی X را شناختیم، یک گروه از n مشتری یا یک پرتفوی خطر را در نظر می‌گیریم. در این حالت، متغیر تصادفی پرداخت کل عبارت است از:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n. \quad (1)$$

که در آن X_i پرداخت به مشتری i ام می‌باشد. به ازای n های کوچک، می‌توانیم توزیع پرداخت کل (S_n) را مستقیماً با روش‌هایی که در فصل دوم مطالعه خواهیم کرد، محاسبه نماییم. به ازای n های بزرگ، روش‌های تقریبی مختلفی را به کار

خواهیم برد. اولین روش تقریب، تقریب نرمال بر مبنای قضیه حد مرکزی در نظریه احتمال می‌باشد.

برای پوشش خطر مشتریان، شرکت مبادرت به جمع‌آوری حق‌بیمه‌ها می‌نماید. کل حق‌بیمه برای پرتفوی خطر فوق‌الذکر را با c_n نمایش می‌دهیم. طبیعی است انتظار داشته باشیم، (و ثابت می‌کنیم)، که اگر شرکتی بخواهد با ثبات مالی عمل کند، حق بیمه c_n باید بزرگ‌تر از متوسط پرداخت کل $E\{S_n\}$ باشد. میانگین $E\{S_n\}$ معمولاً حق‌بیمه *حاصل‌نامیده* می‌شود. تفاوت $\Delta_n = c_n - E\{S_n\}$ که *بارگذاری امنیت* نامیده می‌شود، پرداخت اضافی برای خطری است که بیمه‌گر متحمل می‌شود.

تعیین حداقل مقدار Δ_n که برای شرکت قابل قبول باشد، اگر مهم‌ترین وظیفه مدل‌سازی اکچوئری نباشد، یکی از مهم‌ترین وظایف آن است. در این کتاب، نتایج بنیادین مختلفی را در خصوص این نکته بررسی می‌نماییم. به خصوص، از این نتایج می‌توان دریافت که هرچه میزان پرتفوی بزرگ‌تر باشد، بارگذاری امنیت کمتری برای هر مشتری لازم است، که این موضوع کاملاً با پدیده توزیع مجدد خطر که قبلاً بحث شد سازگار است.

در گام بعدی، مدل قبل را تعمیم داده و به جای رابطه (۱)، این مجموع را در نظر می‌گیریم:

$$S_N = X_1 + \dots + X_N \quad (2)$$

که در آن نه تنها X ها بلکه تعداد جملات مجموع، N ، نیز متغیر تصادفی است. چنین مدلی می‌تواند در دو حالت مورد استفاده قرار گیرد: حالت اول، به پرتفوی خطر آتی مربوط می‌شود که در آن تعداد مشتریان آتی هنوز مشخص نبوده و در نتیجه تعداد آنها تصادفی می‌باشد.

حالت دوم که به طور کلی در کاربردهای بیمه از اهمیت بیشتری برخوردار است، مربوط به وضعیتی است که با یک پرتفوی معین جاری به عنوان یک کلی سروکار داریم و می‌خواهیم به جای خسارت هر یک از مشتریان، کل خساراتی را که شرکت

باید پردازد، بررسی کنیم. اکنون، N ، تعداد ادعای خسارات آتی است که شرکت قرار است در ظرف یک دوره معین دریافت نماید و X ها اندازه پرداخت‌های متناظر با این ادعای خسارات است.

در این مدل، ابتدا توزیع‌های ممکن متغیر تصادفی N را بررسی می‌نماییم. در اینجا نقش کلیدی توسط توزیع پواسون ایفا می‌شود؛ اما در حقیقت، تعداد توزیع‌های ممکن (و جالب توجه) بسیار زیاد است.

در ادامه، خود مجموعه کل S_N را مورد توجه قرار می‌دهیم. این موضوع پیچیده‌تری نسبت به مجموعه S_1 فوق‌الذکر است، چرا که تعداد جملات (N) در این مجموعه تصادفی است. در فصل چهارم رویکردهای متفاوتی را برای ارزیابی چنین مجموعه‌هایی مطالعه می‌کنیم و به شرطی را بنا می‌نهم که تحت آن شرایط بتوانیم قضیه حد مرکزی را به کار ببریم. با استفاده از این قضیه می‌توانیم توزیع S_N را با توزیع نرمال تقریب کنیم و دوباره قوانین محاسبه حق‌بیمه را تعیین نماییم.

دو مدلی که در بالا در مورد آنها بحث شد از نوع ایستای هستند. گام بعدی بررسی حالت‌های پویا است. هدف اصلی مطالعه در اینجا فرایند مازاد R_t است، که در آن t نشان‌دهنده زمان است و فرایند می‌تواند به این صورت تعریف شود:

فرض کنید N_t تعداد ادعای خسارات رسیده تا زمان t باشد. N_t را تمام لحظات زمانی t از یک بازه زمانی در نظر می‌گیریم؛ از این رو N_t یک فرایند تصادفی است. در مقایسه با رابطه (۲)، ادعای خسارت تجمعی کل تا زمان t که توسط شرکت پرداخت می‌شود، متغیر تصادفی

$$S_{N_t} = X_1 + \dots + X_{N_t}.$$

است که در آن X_t اندازه ادعای خسارت t ام است. فرایند S_{N_t} فرایند ادعای خسارت نامیده می‌شود. در فصل‌های ۵ و ۶ انواع مختلفی از فرایندهای N_t و S_{N_t} را مطالعه می‌نماییم.

در کنار جریان ادعای خسارات، جریان وجوه نقدی حق بیمه‌هایی که شرکت دریافت می‌نماید را مورد توجه قرار می‌دهیم. فرض کنید d_t حق بیمه کل جمع‌آوری شده تا زمان t باشد (در اینجا نمادی متفاوت با c_t ذکر شده در بالا را به کار می‌بریم چرا که c_t نشان‌دهنده حق بیمه دریافتی از n مشتری است، حال آن که d_t جریان وجوه نقدی را توصیف می‌کند، و t زمان است). همچنین فرض کنید در زمان $t=0$ ، شرکت مازاد اولیه‌ای به اندازه u دارد. مازاد شرکت در زمان t ، متغیری تصادفی است که به این صورت تعریف می‌شود:

$$R_t = u + c_t - S_{N_t} \quad (3)$$

(توجه کنید، که مدل (۳) تنها مدل فرایند مازاد نیست و مدل‌های دیگری در فصل ۶ مورد مطالعه قرار می‌گیرند.)

در فصل ۷، برخی ویژگی‌های کلی فرایند R_t را بررسی می‌کنیم. در یک یا چند روش، این ویژگی‌ها "کیفیت" فرایند R_t را منعکس می‌کنند و به عبارت دیگر، اندازه فرایند مازاد آتی است که اهداف شرکت را برآورده می‌سازد. این ویژگی‌ها یا با سودآوری عملیات بیمه یا با قابلیت دوام آنها (به عنوان مثال، درجه محافظت در مقابل خسارات) مرتبط است.

یک مثال مهم از ویژگی قابلیت دوام، احتمال ورشکستگی نامده می‌شود. یعنی، احتمال آن که فرایند مازاد R_t همواره مقدار منفی بگیرد. از منظر مدل‌سازی، این مفهوم به معنای عدم توانایی شرکت در برآوردن تعهداتش می‌باشد.

به طور قطع، "ورشکستگی" صرفاً یک اصطلاح است. در واقعیت، اگر وجوه اندوخته (سرمایه احتیاطی) مطابق با پرتفوی خطر تمام شود، شرکت می‌تواند از منابع دیگری پول بگیرد و یا این که پول قرض کند. در هر صورت این یک پیشامد ناخوشایند است و شرکت می‌خواهد که احتمال این پیشامد کوچک شود. از منظر ریاضیات، مسئله محاسبه احتمال ورشکستگی، ممکن است سخت‌ترین مسئله موجود در این کتاب باشد که البته به معنای آن نیست که امری بسیار مشکل است. در فصل ۷

این مسئله را با ذکر جزئیات مورد بررسی قرار می‌دهیم و به طور خاص نشان می‌دهیم که چگونه مسئله احتمال ورشکستگی به ویژگیهای اصلی فرایند بستگی دارد. فصول ۸ تا ۱۱ به مستمری‌های سالیانه و بیمه عمر می‌پردازد. توزیع مجدد خطر نقش مهمی در این خصوص ایفا می‌نماید؛ لیکن این نوع بیمه یک ویژگی خاص دیگری هم دارد و آن تاخیر زمانی الزامی بین زمانی که مشتری حق بیمه را می‌پردازد و زمانی که شرکت سود معادل آن را می‌پردازد، است.

برای مثال، قرارداد بیمه عمری را در نظر بگیرید و T را طول عمر آتی بیمه‌گذار قرار دهید. این شرکت پرداخت سودی معادل یک واحد پولی در لحظه زمانی تصادفی T را فراهم می‌کند. بیمه‌گذار به صورت منظم، حق بیمه‌ها را در طول دوره عمر می‌پردازد.

شرکت به طریقی بر روی حق بیمه‌های پرداختی توسط مشتری سرمایه‌گذاری می‌نماید و در طول دوره عمر مذکور، مبلغ سرمایه‌گذاری با نرخ مشخصی رشد می‌کند؛ بنابراین مقدار کلی حق بیمه کافی برای برآورد تعهدات شرکت می‌تواند (و باید) کوچک‌تر از اندازه سود باشد. تعیین میزان کوچک بودن سودها نسبت به حق بیمه‌ها، وظیفه اصلی اکچوئری در این حالت است. جواب با نرخ بهره و توزیع طول عمر T مرتبط است. در شرایطی معین، هرچه نرخ متغیر تصادفی T بزرگ‌تر باشد، اندازه حق بیمه کمتر قابل قبول است. مدل نهایی پیچیده‌تر بوده و انواع مختلفی از قراردادهای بیمه را پوشش می‌دهد.

در فصل ۱۲، به توزیع مجدد خطر باز می‌گردیم. هرچند این موضوع را در سطح دیگر، یعنی سطح بیمه مجدد، هنگامی که شرکت‌ها خطر محقق شده را بین خودشان مجدداً توزیع می‌کنند، بررسی می‌نماییم. چنین توزیع مجدد خطری ممکن است حتی منعطف‌تر از این توزیع مجدد در سطح اول باشد. شرکت‌ها ممکن است خطرهای فردی را تسهیم نموده و یا خطر انباشته کل را به طرق مختلفی تقسیم نمایند.

در فصل ۱۲ رفتار بهینه شرکت‌ها را به طور جداگانه در این حالت، بیمه مشترک بین شرکت‌ها و مدل ساده بازار بیمه مجدد را بررسی می‌کنیم.

مسیر ۱ شامل مطالب درسی طراحی شده برای یک نیمسال تحصیلی است:

مسیر ۲ برای یک مطالعه عمیق تر و وسیع تر و شاید برای دو نیمسال تحصیلی تدارک دیده شده است؛

مسیر ۳ (به طور دقیق‌تر، بخشی که در مسیرهای یک و دو گنجانده نشده است) به صورت مقدماتی برای دانشجویان کارشناسی ارشد طراحی شده است.

مسیر ۱ کاملاً در مسیر ۲ گنجانده شده است و هر دو مسیر، در مسیر شماره ۳ گنجانده شده‌اند. تمامی مسیرها، همه ملزومات را دارند.

علائم ویژه ای به شما کمک می‌کند تا مسیر انتخاب شده را ادامه دهید:

علامت (⇐) دلالت بر جایی دارد که مسیر مورد نظر ادامه می‌یابد:

مسیر ۱ ⇐ صفحه ۲۰۱

علامت (پرچم) جایی که مسیرها ادامه می‌یابند را نشان می‌دهد (همانند علامت پرچم که هم اکنون در حاشیه وجود دارد). به عبارت دیگر اگر خواننده به صفحه ذکر شده (مانند صفحه ۱۱۱ در بالا) مسیر خود را تغییر ندهد او در مسیر ۲ و سپس در مسیر ۳ خواهد افتاد.

اگر خواننده به صفحه ذکر شده برود (مثلاً صفحه ۱۱۱) در حاشیه این صفحه علائمی را مشاهده خواهد نمود که تأیید کننده این امر است که در جای درستی قرار دارد و نشان می‌دهد مطالعه را تا کجا ادامه دهد (مانند علائم موجود در حاشیه).

نشانه‌های پرچم مورد نظر در فهرست مطالب نیز گنجانده می‌شود.

علامت (▲ ▼) به منظور تسهیل مطالعه در بخش‌هایی از مسیرهای ۱ و ۲ گنجانده شده است. این بدین معنی است که این متن می‌تواند در بخش اول مطالعه

بدون از دست دادن فهم مطالب ضروری حذف شود. معمولاً این موضوع شامل اثبات‌های صرفاً فنی و یا یادآوری‌های اضافی می‌باشد.

۴. یقیناً زمانی که در مسیرهای ۱ و ۲ حرکت می‌کنید، خواننده دعوت می‌شود تا نگاهی به مباحث دیگر بخشها که در مسیر اصلی گنجانده نشده، بیندازد. پس خواننده نباید در صورت برخورد با مطالبی که فهم آن دشوار است دلسرد شود. این موضوع به ویژه شامل دانشجویان دوره کارشناسی یا کارشناسی ارشد می‌شود که تخصص آنها آمار و احتمالات نیست.

قبل از هر چیز بخش مورد مطالعه ممکن است دشوار نباشد؛ لیکن به مطالعه عمیق تری نیاز داشته باشد. اگر شما در حال گذراندن صرفاً یک نیمسال تحصیلی هستید، ممکن است بهتر باشد مطالبی را که متوجه نشده‌اید را برای مدتی به تعویق بیندازید و سپس وقتی که زمان کافی دارید به آن رجوع کنید. ثانیاً شما نباید همه کارها را یکجا انجام دهید. اگر در آینده مدل‌سازی اکچوئری را انجام نمی‌دهید یا در امتحانات اکچوئری شرکت نمی‌کنید، احتمالاً مسیر ۱ برای شما کافی است. اگر شما در کسب و کار اکچوئری درگیر می‌شوید، آنگاه قادر خواهید بود مجدداً بازگردید. موضوعات و سوسه‌برانگیز که شما از آنها گذر نموده‌اید انتظار شما را خواهند کشید.

فصول صفر و ۳ به قصد مرجع تهیه شده‌اند. مطالعه سیستمی ممکن است از فصل ۱ آغاز نشود گرچه خواننده تشویق می‌شود نگاهی گذرا به فصل صفر بیندازد. اگرچه تمامی مطالب و حقایق موجود در فصل صفر، در مسیر ۱ استفاده نمی‌شوند اما تقریباً تمام آن استفاده شده است.

فصل ۳ شامل نظریه امیدهای شرطی است. غالباً این نظریه در فصل ۶، زمانی که به بررسی فرآیندهای تصادفی می‌پردازیم، مورد نیاز واقع خواهند شد. در این فصل خاطر نشان خواهیم ساخت که چه مباحثی برای مسیر ۱ مورد نیاز است.

اگر مفهوم و واقعیتی را برای مدت طولانی استفاده نمی‌کنیم یا آن را برای اولین بار استفاده می‌کنیم، مرجع‌های مورد نظر ارائه می‌شود (عمدتاً برای فصل صفر یا

فصل ۳). لازم به یادآوری است که این موضوع تنها در حالتی که خواننده با مفهوم استفاده شده آشنا نیست، انجام می‌شود. در غیر این صورت، منطقی است مراجع را نادیده گرفته و به حرکت رو به جلو خودمان ادامه دهیم.

یادآوری‌های فنی تر: علامت ■ بر پایان اثبات دلالت دارد، در حالی که علامت □ به منتهی‌الیه یک مثال می‌باشد.

شماره‌گذاری هر بخش و فرمول‌ها در هر فصل کامل می‌باشد. سیستم اتخاذ شده مراجع از طریق مثال‌های زیر کاملاً آشکار است.

بخش ۲-۳ سومین زیربخش از بخش ۲ از فصل جاری می‌باشد.
فرمول (۴.۳.۲) چهارمین فرمول از زیربخش سوم از بخش دوم از فصل جاری می‌باشد.

اگر به فرمول بخش، مثال و یا غیره از فصول دیگر اشاره نماییم، اسم فصلی را که به آن اشاره می‌نماییم به صورت پررنگ نمایش می‌دهیم. برای نمونه فصل ۱-۲-۳ سومین زیربخش از بخش دوم از فصل ۱ می‌باشد. فرمول ۴.۳.۲.۱ چهارمین فرمول از زیربخش سوم از بخش دوم فصل ۱ می‌باشد.
از اختصارات زیر در سراسر کتاب استفاده می‌شود:

APV: ارزش فعلی اکچوئری

CLT: قضیه حد مرکزی

c.d.f: تابع توزیع تجمعی

c.v: ضریب تغییرات

d.f: تابع توزیع (در این جا صفت "تجمعی" را حذف می‌نماییم)

EUM: حداکثر سازی مطلوبیت مورد انتظار

FSD: برتری تصادفی اولیه

iff: اگر و تنها اگر

i.i.d: توزیع مستقل و یکسان

LLN: قانون اعداد بزرگ

d.e.r: نسبت حذف زیان

d.-h.s: طرف چپ

m.g.f: تابع مولد گشتاور

p.d.f: تابع چگالی احتمال

RDEU: مطلوبیت مورد انتظار رتبه دار

r.v.: متغیر تصادفی

r.vec: بردار تصادفی

r-h.s: طرف راست

SSD: برتری تصادفی ثانویه

www.ketaboo.ir