

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

روش‌های انتساب‌گیری توابع تک‌متغیره

تألیف:

مجتبی محسنی



مرکز انتشارات جهاد دانشگاهی واحد صنعتی اصفهان

واحد صنعتی اصفهان

سرشناسه	محسنی، مجتبی، ۱۳۶۸ -
عنوان و نام پدیدآور	روش‌های انتگرال‌گیری توابع تک متغیره / نگارش مجتبی محسنی.
مشخصات نشر	اصفهان: جهاد دانشگاهی، واحد صنعتی اصفهان، مرکز انتشارات، ۱۳۹۲.
مشخصات ظاهری	ح، ۵۲۱ ص: مصور.
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۵۱۵۱-۶۲-۶
وضعیت	فیب
یادداشت	واژه نامه.
یادداشت	کتابنامه.
یادداشت	نمایه.
موضوع	حساب انتگرال -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	توابع تحلیلی -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	مشتق‌گیری -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	حساب انتگرال -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع	تحلیلی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع	مشتق‌گیری -- مسائل و تمرین‌ها و غیره (عالی)
شناسه افزوده	جهاد دانشگاهی، واحد صنعتی اصفهان، مرکز انتشارات
رده بندی کنگره	Q۲۳۷۶ .۵۲۱
رده بندی دیویی	۵۲۱ .۳۷۶
شماره کتابشناسی ملی	۳۱۰۵۹۰

نام کتاب	روش‌های انتگرال‌گیری	تغیره	ایب	مدیر تولید	غلامرضا قجاوند
تألیف	مجتبی محسنی			ناظر فنی	محمد احمدی
ویراستار	مرضیه شفیعی			صفحه‌آرایی	علیرضا نورزاد لاله
ارزیاب علمی	دکتر بیژن طائری			طراح جلد	محمدعلی نریمانی
ناشر	جهاد دانشگاهی واحد صنعتی اصفهان - مرکز انتشارات				
نوبت چاپ	اول				
تاریخ نشر	۱۳۹۳				
شمارگان	۵۰۰ جلد				
تعداد صفحات	۵۲۱				
چاپ	پرتو				
صحافی	سید				
قیمت	۲۰۵۰۰۰ ریال				
«تغییر قیمت کتاب بدون اجازه کتبی ناشر مجاز نیست باشد»					

✓	صحت مطالب کتاب به عهده مؤلف بوده و ناشر مسئولیتی در این موضوع ندارد.
✓	حق چاپ برای ناشر محفوظ است، تکثیر این کتاب یا بخشی از آن به هر شکل، شرعا و قانونا ممنوع بوده و دارای پیگرد قانونی است.
✓	نشانی ناشر: اصفهان - دانشگاه صنعتی اصفهان - جهاد دانشگاهی - مرکز انتشارات: ۳۹۱۲۷۱۱-۱۱ دورنگار: ۳۹۱۲۵۴۱ دروگاه: ۳۹۱۲۵۹۴
	نشانی الکترونیکی: sec.fut@acecr.ac.ir درگاه: www.jdiut.ac.ir درگاه: www.isba.ir

مراکز پخش:	۱- کتابفروشی جهاد دانشگاهی (اصفهان - دانشگاه صنعتی اصفهان - تلفن: ۳۹۱۲۵۹۴)
۲- نمایشگاه کتاب جهاد دانشگاهی (تهران - خیابان انقلاب اسلامی - بین خیابان فلسطین و چهارراه ولی عصر (عج) - جنب مؤسسه نمایشگاه‌های فرهنگی ایران تلفن: ۶۶۴۸۷۳۶) ۳- علم‌گستر سپاهان (اصفهان - خیابان آمانگاه - کوچه فتح‌آباد - پلاک ۹۰ - تلفن: ۳۲۱۹۹۷۸) ۴- کتابپیران (تهران - میدان انقلاب اسلامی - ابتدای خیابان آزادی - خیابان دکتر قریب - پلاک ۷ - تلفن: ۶۶۵۶۶۱۰ - ۰۲۱)	
شماره تماس برای خرید تلفنی کتاب از سراسر کشور:	۳۹۱۲۵۹۴ - ۰۲۱

سخن ناشر

جای خرسندی و شکر بسیار است که در آستانه تابش پرتوهای حیات بخش اسلام بر پهنه زمین، خود را در زمانی می یابیم که اندیشه اصلاح نه تنها غایت نیست که پیمودن راههای کمال و رشد در هر بعدی از ابعاد انسانی هموارتر و شدنی تر می نماید. وظیفه آنان که در این دوره و در این بر زمین زندگی می کنند بس سنگین و دشوار است و بطور خاص مسئولیت دانشگاه و دانشگاهیان در کنار حوزه های مقدس علمیه جایگاهی حساس و تعیین کننده در روند حرکت اجتماع دارد. تلاش پیگیر و همه جانبه برای بریدن بندهای تاریکی، جهاد مقدسی است که باید از دانشگاه و حوزه شروع شود و انتشار کتب علمی از سوی ما کوششی است در راستای آنچه ذکر آن رفت. بدیهی است این کوشش زمانی به نتایج مفید می رسد که بطور مداوم از سوی استادان، دانشجویان و اندیشمندان متعهد مورد انتقاد و پیشنهادات سازنده قرار گیرد.

اینک که چاپ اول این کتاب تقدیم دانشگاه اصفهان و مشتاق علم می گردد جای دارد از تمامی عزیزانی که در آماده سازی و تدوین آن تلاش نموده و زحمات زیادی را متحمل شده اند تشکر و قدر را بعمل آید.

مرکز انتشارات جهاد دانشگاهی
واحد صنعتی اصفهان

مقدمه

ریاضیات اساسی‌ترین و بنیادی‌ترین علم در میان علوم است که بدون شک در گسترش علوم دیگر نقشی پایه‌ای را ایفا می‌کند. موضوع اصلی در حساب دیفرانسیل و انتگرال، آشنایی با جنبه‌های محاسباتی آنالیز ریاضی کلاسیک می‌باشد. این مطالعه شامل سه بخش حد، مشتق و انتگرال است.

به باور بسیاری از ریاضیدانان انتگرال به همراه مشتق موضوع اصلی را در حساب دیفرانسیل و انتگرال تشکیل می‌دهند. بخش انتگرال در حساب دیفرانسیل و انتگرال از بحث‌های چالش برانگیز و مهم است که لازمه فهم بسیاری از دروسی مانند ریاضیات عمومی، معادلات دیفرانسیل و فیزیک مهندسی و ... است. در واقع می‌توان گفت انتگرال پر کاربردترین مبحث در دروس فنی و مهندسی می‌باشد. نبود مرجعی مناسب در زمینه انتگرال و روش‌های محاسبه آن علت اصلی تالیف این کتاب است. در حقیقت تمامی روش‌های ارائه شده در کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال، روش‌های معمول و متداول از انتگرال‌ها هستند. در مجموعه حاضر سعی شده است تمامی روش‌های انتگرال‌گیری به طور مفصل و مفصل مورد بررسی قرار گیرند تا دانشجو به صورت تحلیلی تکنیک‌ها را بیاموزد. در واقع این کتاب دغدغه اساتید و دانشجویان در این بخش، انتقال و کسب مهارت‌های لازم برای محاسبه انتگرال‌ها می‌باشد و البته مشکل واقعی تشخیص این است که در وضعیت موجود، بهترین تکنیک کدام است و این امر جز با یادگیری عمقی و تحلیلی مسائل امکان‌پذیر نمی‌باشد. برجسته‌ترین هدف از انتشار این کتاب این است که، تلاش کرده‌ام کتابی بنویسم که به مدرسان آن ابزاری دهم تا بتوانند به دانشجویان بیاموزند که چگونه به طور اثر بخش مطالب علمی را بخوانند و به دانشجو در درک مفاهیم انتگرال‌ها کمک کند و توانایی تکنیکی‌شان را در امر محاسبه بالا ببرم. سعی کرده‌ام این هدف را در قالب یک مباحث ابتدا به صورت عددی و هندسی و در نهایت به صورت جبری اثبات نمایم. مطالب به گونه‌ای توضیح داده شده است که دانشجو حرکت را آغاز کند ولی نه به اندازه‌ای که نتواند مسائل را تحویل دهد.

در مورد اثبات‌ها باید انگیزش ذهنی کافی ایجاد شود و توضیح مناسب عرضه گردد تا برای دانشجویانی که مطالب بخش‌های قبلی کتاب را به طور متوسطی فرا گرفته‌اند قابل درک باشند. لذا تلاش شده است که احکام ریاضی تا حد امکان ثابت شوند ولی هر جا که ثابت این امر موجب دور شدن از جریان اصلی بحث بوده یا معرفی مفاهیم جدیدی را می‌طلبیده است، موضوع به صراحت به اطلاع خواننده رسیده است.

در تألیف این اثر نکات برجسته زیر در نظر گرفته شده است از جمله:

- ۱- هر روش به صورت مجزا در یک فصل گنجانده شده است که به تفصیل در مورد آن بحث شده است که هدف درک و تمرکز عمقی مطالب است.
- ۲- روش‌ها به صورت دسته‌بندی و مدل شده ارائه شده است که خواننده را قادر می‌سازد در وضعیت موجود بهترین روش را برای مسئله برگزیند.
- ۳- کتاب حاضر سراسر از مثال‌های متنوع و کاربردی است. مثال‌ها از آسان آغاز شده و به دشوار و پیکارجو ختم شده است.
- ۴- در پایان هر بخش و فصل تعداد بسیار زیادی تمرین گنجانده شده است که نیاز خواننده را به تمرین بر طرف می‌کند. تمرین‌های پایان فصل به دو بخش مسائل و مسائل دشوار تقسیم شده است. بخش مسائل شامل تمرین‌های آسان تا متوسط و گاهی دشوار است اما بخش مسائل دشوار برای دانشجویان قوی تدارک دیده شده است.
- ۵- در پایان کتاب تعدادی سؤالات پایان ترم و میان ترم دانشگاه‌های برتر ایران و جهان در قالب یک فصل گنجانده شده است تا دانشجو با این نمونه مسائل آشنا گردد.

محتوا

رویکرد و ساختار این کتاب به گونه‌ای است که هر فصل آن شامل چندین بخش می‌باشد. در ابتدای هر فصل زمینه نظری هر یک از روش‌های گنجانده شده را پس از یک توجیه مقدماتی، شرح داده شده است و در ادامه در هر بخش در رابطه با موضوعی خاص صحبت می‌شود و چندین مثال حل شده مطرح می‌گردد. در آخر هر بخش تعدادی تمرین وجود دارد. تسلط بر تکنیک‌های انتگرال‌گیری به مثال وابسته است و به عنوان نمونه از مثال‌ها و تمرین‌هایی استفاده کرده‌ایم که دانشجو در دروس دیگر با آن‌ها روبه‌رو می‌شود و گاهی اوقات همان مسئله‌های شکیبایی و پشتکار است. در پایان فصل نیز تعدادی تمرین دوره‌ای از کل فصل آورده شده است.

• فصل ۱. یادآوری مشتق

لازمه درک و فراگیری مطالب انتگرال، فهم مشتق است. در این فصل بستر لازم برای این امر مهم را فراهم کرده‌ایم. پیش از ارائه تعریف رسمی مشتق، مماس بر یک منحنی را تعریف کرده‌ایم تا کاربرد هندسی مشتق پیشاپیش را نشان داده باشیم. در ادامه به یادآوری فرمول‌های مشتق در بخش‌های مجزا و مثال‌هایی متنوع پرداخته‌ایم.

• فصل ۲. انتگرال

مطالب اصلی مربوط به انتگرال، بررسی مفهوم انتگرال، انتگرال پذیری و خواص انتگرال را مطرح کرده‌ایم. در بخش پایانی پاسخ خصوصی با استفاده از مثال‌های کاربردی تشریح شده است.

• فصل ۳. تغییر متغیر

روش‌های معمول تغییر متغیر را معرفی کرده و سپس روش‌های تکمیلی به صورت دسته‌بندی شده بررسی شده است. مثال‌ها به صورت قدم به قدم حل شده‌اند تا خواننده درک بهتری از انتخاب تغییر متغیر مناسب داشته باشد.

فصل ۴. فرمول‌های اساسی

تعریف تابع نمایی و لگاریتم طبیعی از دیدگاهی دیگر بررسی شده‌اند. لگاریتم طبیعی به عنوان انتگرال و تابع معکوس تابع لگاریتمی تعریف می‌گردد. در این فصل به توابع مثلثاتی که شامل: توابع سینوسی، کسینوسی، تانژانتی، کتانژانتی، سکانتی و کسکانتی است پرداخته‌ایم. اتحادهای مهم مثلثاتی را نیز استخراج می‌شوند و برای به دست آوردن فرمول‌های انتگرال به کار می‌روند. همچنین به مبحث توابع معکوس مثلثاتی با استفاده از مفهوم یک‌به‌یک، به طور مجزا پرداخته شده است و فرمول‌های انتگرال این توابع را نیز استخراج می‌کنیم که به این توابع می‌انجامد را مطرح کرده‌ایم.

• فصل ۵. روش جزء به جزء

ابتدا روش جزء به جزء را تشریح و سپس مسائل این روش تحلیلی سعی و خطا آزمایش کرده‌ایم. در مرحله بعد روش جزء به جزء را به بخش‌های جزئی‌تر تقسیم کرده‌ایم و در پایان هر بخش محاسبه سریع روش جزء به جزء مربوط به آن بخش را نیز آورده‌ایم. در نهایت با استفاده از روش‌های ابتکاری، روش جزء به جزء را به خارج از این دسته‌ها، بخش‌ها تعمیم داده‌ایم.

• فصل ۶. انتگرال توابع مثلثاتی

موضوع اصلی این فصل انتگرال گیری از توابع توان‌دار مثلثاتی است که بسته به شرایط زوج بودن، روش‌های مختلفی برای آن‌ها ارائه شده است. یکی از بخش‌های مهم، محاسبه انتگرال توابع مثلثاتی با زوایای نامساوی است. این فصل پیش نیاز فصل بعد خواهد بود.

• فصل ۷. تغییر متغیر مثلثاتی

اگر روش‌های تغییر متغیر معمول کارساز نباشد از تغییر متغیر مثلثاتی کمک می‌جوییم. این روش در قالب سه بخش تغییر متغیر سینوسی، تانژانتی و سکانتی دسته‌بندی شده و حالات مختلف آن مورد بررسی قرار گرفته است.

• فصل ۸. روش تجزیه کسرها

در این فصل روشی برای انتگرال‌گیری از توابع کسری ارائه داده‌ایم. در واقع با استفاده از قضیه‌ای در باب کسرها ناسره و بزرگ را به مجموع کسره‌های کوچک تبدیل می‌کند که انتگرال آن به آسانی قابل محاسبه است. ابتدا قضیه را معرفی کرده‌ایم و در ادامه این قضیه را به چهار حالت مجزا تفکیک کرده‌ایم که هر حالت به تفصیل بحث شده است. یکی از بخش‌های مهم در تجزیه کسر یافتن شرایطی است که روش هویساید را برای هر حالت جداگانه ارائه داده‌ایم. در پایان نیز به تعمیم مسائلی پرداخته‌ایم که با استفاده از تغییر متغیر به توابع گویا تبدیل می‌شوند.

• فصل ۹. انتگرال‌گیری از تابعی گویای مثلثاتی

در این فصل از تغییر متغیر نصف کمر برای توابع گویای مثلثاتی استفاده کرده‌ایم. ابتدا این تغییر متغیر را معرفی نموده و سپس بقایای توابع مثلثاتی را بر حسب این متغیر به دست آورده‌ایم. در ادامه حالت‌های خاص نصف کمان را برای انتگرال‌های مختلف به حسب تغییر متغیر این نوع انتگرال‌ها را ارائه نموده‌ایم. در نهایت روش ضرایب مجهول را برای این انتگرال‌ها به کار گرفته‌ایم که روند حل مسائل را بسیار کوتاه‌تر می‌نماید.

• فصل ۱۰. انتگرال توابع گنگ

ابتدا انتگرال توابع گنگ معمولی را بررسی کرده‌ایم که شامل رادیکال‌های با عبارت X یا تابع خطی از X هستند. پس از آن انتگرال‌گیری از عبارت گنگی که شامل رادیکال‌های با عبارت درجه دوم می‌باشد را تشریح کرده‌ایم که به تغییر متغیر اوایلر معروف است. در ادامه حالت‌های خاص این تغییر متغیر را آورده‌ایم. همچنین حالت‌های کلی عبارت‌های گنگ که شامل عبارت درجه ۲ هستند نیز مطرح شده است. یکی از بخش‌های مهم این فصل، انتگرال‌گیری از یک دیفرانسیل دو جمله‌ای است که به طور مفصل و با یک توجیه مقدماتی ارائه شده است و در نهایت به روش‌های گاهشی برای حل این نوع انتگرال‌ها پرداخته شده است.

• فصل ۱۱. انتگرال توابع هیپربولیک

ابتدا تعریف توابع هیپربولیک بیان شده است، سپس فرمول‌های پایه‌ای انتگرال مربوط به چنین توابعی آورده شده است. در بخش بعدی روش تغییر متغیری مبتنی بر توابع هیپربولیک برای انتگرال‌هایی که شامل توابع تانژانت و سکانت و به روش جزء به جزء قابل محاسبه هستند ارائه گردیده است. در نهایت نیز همانند توابع مثلثاتی، تغییر متغیرهای مربوط به توابع هیپربولیک و انتگرال توابعی که به معکوس توابع هیپربولیک می‌انجامد بررسی شده است.

فصل ۱۲. انتگرال معین

بنابر نیاز سیگما در اثبات قضایا، ابتدا سیگما را تعریف کرده و خواص آن را آورده‌ایم. سپس به مفهوم مساحت اضلاع انتگرال و مساحت به صورت عددی و جبری و انتگرال‌پذیری آن پرداخته‌ایم. در حقیقت معرفی انتگرال معین پس از تعریف مساحت سطح زیر یک منحنی به عنوان حد یک مجموع آمده است. سپس روش‌های مقدماتی انتگرال بررسی شده و قضایای بنیادی به اثبات رسیده است. در ادامه از به دست آوردن روش‌هایی برای محاسبه انتگرال معین به صورت بخش‌های مجزا ارائه شده که نتیجه‌ای از مفهوم انتگرال معین است که در قالب انتگرال‌گیری به کمک مفاهیم هندسی، قدر مطلق، جزء صحیح، براهمی معکوس مثلثاتی و هیپربولیک و تابع علامت گنجانده شده است. در نهایت در بخش پایانی روش‌هایی بررسی شده‌اند که با استفاده از آن‌ها می‌توان پاسخ انتگرال معین را بدون محاسبه مستقیم از آن پیدا کرد حل را بسیار کوتاه می‌کنند.

• فصل ۱۳. انتگرال‌های ناسره

ابتدا مفهوم ناسره بودن انتگرال را به صورت هندسی نشان داده‌ایم. در بخش بعدی به تعریف انتگرال ناسره و تعمیم آن به سه حالت پرداخته‌ایم که هر کدام به تفصیل بحث شده است. از آنجایی که روند همگرایی و واگرایی انتگرال‌های ناسره اهمیت ویژه‌ای دارد در ادامه آزمون‌هایی برای تشخیص رفتار این انتگرال‌ها آورده شده است.

• فصل ۱۴. تابع گاما

در این فصل با معرفی تابع گاما، یکی از روش‌های غیرمستقیم محاسبه انتگرال‌های ناسره را بررسی می‌کنیم. پس از یک قضیه کاربردی و اثبات آن، تابع گاما را تعریف نموده، خواص آن را به صورت مختصر بیان و در نهایت کاربردهای آن را در محاسبه برخی انتگرال‌های ناسره با مثال‌های متنوع تشریح کرده‌ایم.

• فصل ۱۵. تابع بتا

در این فصل نیز به تعریف تابع دیگری به نام بتا پرداخته‌ایم که خود برحسب تابع گاما به‌دست می‌آید. با استفاده از این تابع نیز می‌توان برخی انتگرال‌های ناسره را محاسبه نمود که به تفصیل خواص و کاربردهای آن در این فصل ارائه شده است.

• فصل ۱۶. کاربرد تبدیل لاپلاس در انتگرال

با توجه به اینکه ایده اصلی کاربرد لاپلاس در جبری‌سازی و حل معادلات دیفرانسیل است اما نظر به این که تبدیل لاپلاس یک تابع برحسب انتگرال ناسره بیان می‌گردد می‌توان با استفاده از آن پهنه وسیعی از انتگرال‌های ناسره را محاسبه نمود. لذا ابتدا به تعریف لاپلاس پرداخته‌ایم سپس روش محاسبه انتگرال ناسره با استفاده از تعریف لاپلاس را شرح داده‌ایم و در ادامه قضایای تبدیل لاپلاس را به صورت مجزا بررسی کرده و با استفاده از این خواص، این روش را تعمیم داده‌ایم.

• فصل ۱۷. سوالات و مشکلات دانشگاهی برتر ایران و جهان

این فصل شامل تعدادی از سوالات و مشکلات پایان ترم و میان ترم دانشگاه‌های شناخته شده ایران و جهان است تا دانشجو ضمن آشنایی با نحوه طراحی سؤال، فرصتی برای محک زدن خویش داشته باشد.

قدردانی

افراد بسیاری در تهیه این کتاب سهمیم بوده‌اند. این کمک‌ها به‌صورت پیشنهادات، مشاوره و تشویق بسیاری از دوستان و اساتید به مؤلف ارائه شده است که به حق بسیار سودمند بوده است. در حقیقت بیشترین سهم متعلق به استاد گرانقدر سیدمحمود طباطبایی‌نژاد، استاد دانشگاه باهنر شیراز است که ریاضیات را با ذهن من پیوند داده، ایده اصلی تألیف را پدید آورده و با راهنمایی‌های سازنده، موجبات شروع کار را فراهم آوردند. اولین نسخه‌های این کتاب به‌صورت دست نوشته به بسیاری از دانشجویان در نقاط مختلف سپرده شد تا نقطه نظرات خود را ابراز کنند که در این مرحله که کماکان خاصه به من ارائه نمودند که برخواسته از سؤالات آن‌ها در امور مختلف نگارش، محتوا، شیوه توصیف مطالب بوده است. این امر باعث شده است بخشی از کتاب را باز نویسی کرده و یا دربار آن تجدید نظر و اندیشم و سعی کنم روشی بهتر برای توصیف مطالب بیایم. از آن میان، بیشتر خود را بیدیونین عزیزان می‌دانم:

۱- سحر حمزه ۲- سید علیرزاده ۳- سمیه شریفی ۴- علیرضا توکلی ۵- حمیدرضا مبارکی
همچنین جا دارد، دوست محترم مصطفی طاهری، دانشجوی ممتاز دانشگاه صنعتی شریف، که با صبر و حوصله فراوان نسخه‌های اولیه را مطالعه و نکته نظرات سازنده خود را به مؤلف انتقال داد و تا مراحل پایانی اظهار نظرهایش هدایت‌کننده و تازگی بخش بود، تشکر ویژه نمایم.
از آنجا که روند تألیف، نقد و بررسی چندین بار تکرار شد، علاوه بر دانشجویان از محضر اساتید نیز استفاده بردم، گرچه همین خود موجب سرازاز کشیده شدن فرایند تألیف کتاب حاضر شد، لکن امید دارم مسبب تعمیق آن نیز شده باشد. از آن میان کمک‌های بی‌دریغ دکتر اسماعیل حسام‌الدینی از دانشگاه صنعتی شیراز در مورد مرور کتاب، سیرغم مشلغه فراوان و تشویق مؤلف در مراحل تبدیل این نسخه‌ها به کتاب، سزاوار تشکر ویژه‌ای است. دکتر سیدمحمدعلی زنجانی استاد دانشگاه آزاد اسلامی نجف‌آباد هم مشوق و راهنمایی دلسوز در نگارش بودند که در مسیر ناهموار تألیف، ایشان با دلگرمی موجبات تحرک مجدد را فراهم می‌کنند.
در نهایت باید تشکر و قدردانی خود را تقدیم به خانم مرضیه شفیعی نمایم و ویرایش آخرین نسخه را بر عهده داشتند، ایشان با دقتی مثال زدنی ساختار تک تک جملات را بررسی کرده و هر کجا لازم بوده تا متن شیواتر و مختصرتر به بیان خواننده برسد، اصلاحاتی انجام داده‌اند. ایشان با دقت مثال‌ها و قضایا را بررسی و هر جا که نیاز به تغییر توصیف ریاضی آنان بوده است، اصلاحاتی انجام داده‌اند که کار ایشان در این مورد بسیار با ارزش است.

جا دارد از آقای مهندس حسین آزاد برای پشتکار و به خصوص صمیمیت ایشان در مراحل پایانی کتاب که به‌حق بدون کمک‌های ایشان، این کار میسر نبود قدردانی نمایم و از آقای صادق زائری که تهیه تصاویر و سؤال‌های امتحانی دانشگاه‌های برتر جهان را بر عهده گرفتند تشکر ویژه

نمایم. همچنین آقای ابراهیم مهرباب که ارتباط نگارنده را با برخی اساتید و خانم مرضیه شفیعی را فراهم آوردند قدردانی نمایم که به خصوص صمیمیت و پشتکار ایشان در بقیه مراحل کتاب انکار ناپذیر است.

در اینجا لازم می‌دانم از تلاش‌های بی‌وقفه مدیریت محترم انتشارات جهاد دانشگاهی واحد صنعتی اصفهان و بقیه دست اندرکاران و همچنین خانم زهرا گشتاسبی که در طول این مدت زحمت تایپ را بر عهده داشتند قدردانی نمایم.

آرزوی من این است این کتاب بتواند در امر آموزش انتگرال برای دانشجویانی که با چالش‌های متعدد بسوی مهمی در زمینه ریاضیات و علوم فنی مهندسی مواجه‌اند موثر باشد. در این مسیر برای پربارتر شدن در جهت ایجاد کتابی با بهترین کیفیت از نظر محتوا، یقیناً از همه نظرات و پیشنهادات شما استقبال می‌کنم.

مجتبی محسنی

m.mohseni68@ymail.com
mojtaba.mohseni@sel.iaun.ac.ir

بهار ۹۳

فهرست

فصل ۱

یادآوری مشتق

- ۱-۱ تعریف مشتق ۲
- ۲-۱ قواعد محاسبه مشتق ۴
- ۳- مشتق توابع نمائی و لگاریتمی ۷
- ۴- مشتق توابع مثلثاتی و هیپربولیک ۱۰
- ۵- مشتق توابع عکوس مثلثاتی ۱۲

فصل ۲

انتگرال

- ۱-۲ تعریف انتگرال ۱۶
- ۲-۲ خواص انتگرال ۱۸
- ۳-۲ پاسخ خصوصی ۲۱

فصل ۳

روش تغییر متغیر

- ۱-۳ تغییر متغیر ۲۸
- ۲-۳ تغییر متغیرهای خاص ۳۵
- ۱-۲-۳ انتگرال‌هایی به شکل $\int f(\sqrt[n]{ax+b})dx$ ۳۵
- ۷-۲-۳ انتگرال‌هایی به شکل $\int \frac{(cu+b)^n}{(cu+d)^{n+r}} du$ ۳۸
- ۱۰-۲-۳ انتگرال‌هایی به شکل $\int (\tan x - \cot x)(\tan x + \cot x)^m dx$ ۴۰

فصل ۴

فرمول‌های اساسی انتگرال گیری

۴۸	۱-۴ تابع لگاریتم طبیعی
۵۲	۲-۴ انتگرال توابع نمائی
۵۶	۳-۴ انتگرال توابع مقدماتی مثلثاتی
۶۴	۴-۴ انتگرال توابعی که به توابع معکوس مثلثاتی منجر می‌شوند

فصل ۵

انتگرال گیری به روش جزء به جزء

۷۲	۱-۵ روش جزء به جزء
۷۵	۲-۵ انتگرال‌هایی به صورت $\int p_m(x) [\cos ax, \sin ax, e^{ax}] dx$
۷۶	۴-۲-۵ روش ضرائب مجهول
۷۹	۵-۲-۵ روش جدول
۸۲	۶-۲-۵ محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int x^n f(x) dx$
۸۴	۳-۵ انتگرال‌هایی به صورت $\int f(x) g^{-1}(x) dx$
۸۵	۱-۳-۵ انتگرال‌هایی به فرم $\int p_m(x) (\sin^{-1} ax, \cos^{-1} ax, \dots) dx$
۹۰	۲-۳-۵ انتگرال‌هایی به فرم $\int p_m(x) \ln[f_n(x)] dx$
۹۶	۴-۵ انتگرال‌هایی به صورت $\int e^{ax} (\cos bx, \sin bx) dx$
۹۸	۵-۴-۵ روش ضرائب مجهول
۱۰۰	۵-۵ انتگرال‌هایی به صورت $\int \sec^{r+1} ax dx, \int \csc^{r+1} ax dx$
۱۰۳	۶-۵ روش‌های ابتکاری

فصل ۶

انتگرال حاصلضرب توان‌های توابع مثلثاتی

- ۱-۶ انتگرال‌هایی به فرم $\int \cos^n x \, dx$, $\int \sin^n x \, dx$ ۱۱۰
- ۲-۶ انتگرال‌هایی به فرم $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ ۱۱۴
- ۳-۶ انتگرال توابع حاصلضرب سینوس و کسینوس با زوایای نامساوی ۱۱۷
- ۴-۶ انتگرال‌هایی به فرم $\int \tan^n x \, dx$, $\int \cot^m x \, dx$ ۱۱۹
- ۵-۶ انتگرال‌هایی به فرم $\int \csc^n x \, dx$, $\int \sec^n x \, dx$ ۱۲۳
- ۶-۶ انتگرال‌هایی به فرم $\int \csc^n x \cdot \cot^m x \, dx$, $\int \sec^n x \cdot \tan^m x \, dx$ ۱۲۵

فصل ۷

تغییر دلیته مثلثاتی

- ۱-۷ تعریف ۱۳۴
- ۲-۷ انتگرال‌هایی به فرم $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a^2 - u^2$ ۱۳۵
- ۳-۷ انتگرال‌هایی شامل عبارت $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a^2 + u^2$ ۱۴۱
- ۴-۷ انتگرال‌هایی شامل عبارت $\sqrt{u^2 - a^2}$, $u^2 - a^2$ ۱۴۵

فصل ۸

روش تجزیه کسره‌های جزئی

- ۱-۸ تعریف ۱۵۶
- ۲-۸ تجزیه کسرها ۱۵۸
- ۱-۲-۸ تابع $Q(x)$ شامل حاصل ضرب عامل‌های خطی متمایز ۱۵۸
- ۲-۲-۸ تابع $Q(x)$ شامل حاصل ضرب عامل‌های خطی تکراری ۱۵۹
- ۳-۲-۸ تابع $Q(x)$ شامل عبارت درجه دوم تجزیه‌ناپذیر غیر تکراری ۱۶۵
- ۴-۲-۸ تابع $Q(x)$ شامل عبارت درجه دوم تجزیه‌ناپذیر تکراری ۱۷۲
- ۳-۸ انتگرال توابعی که با تغییر متغیر به توابع گویای کسری تبدیل می‌شوند ۱۸۹

فصل ۹

انتگرال گیری از توابع گویای سینوس و کسینوس

- ۹-۱ تغییر متغیر نصف کمان ۲۰۴
 ۹-۲ حالت‌های خاص تغییر متغیر نصف کمان ۲۰۸
 ۹-۳ روش ضرایب مجهول ۲۱۵

فصل ۱۰

انتگرال رابع گنگ

- ۱۰-۱ انتگرال‌هایی به صورت $\int f(x, \sqrt{R(x)}) dx$ ۲۲۰
 ۱۰-۲ تغییر متغیر اولر ۲۲۷
 ۱۰-۳ حالت‌های خاص ۲۳۴
 ۱۰-۴ انتگرال‌هایی به صورت $\int \frac{p_m(x)}{\sqrt{ax^r + bx + c}} dx$ ۲۴۱
 ۱۰-۵ انتگرال‌هایی به صورت $\int p_n(x) \sqrt{ax^r + bx + c} dx$ ۲۴۲
 ۱۰-۶ انتگرال‌هایی به صورت $\int f(x) \left(x \sqrt{x} \right) dx$ ۲۴۴
 ۱۰-۷ انتگرال‌هایی به صورت $\int x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{r}} dx$ ۲۴۶
 ۱۰-۸ انتگرال‌هایی به صورت $\int x^{m+n-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{r}} dx$ ۲۵۳
 ۱۰-۹ انتگرال‌هایی به صورت $\int x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{r}+1} dx$ ۲۵۴
 ۱۰-۱۰ محاسبه انتگرال‌ها در حالت‌های خاص ۲۵۷

فصل ۱۱

انتگرال توابع هیپربولیک

۲۶۲	۱-۱۱ تعریف
۲۶۴	۲-۱۱ فرمول‌های اساسی انتگرال‌گیری هیپربولیک
۲۶۷	۳-۱۱ محاسبه انتگرال $\int \sec^n x \cdot \tan^m x \, dx$ به کمک توابع هیپربولیک
۲۶۹	۴-۱۱ انتگرال توابعی که به معکوس توابع هیپربولیک می‌انجامد
۲۷۲	۵-۱۱ تغییر متغیر توابع هیپربولیک

فصل ۱۲

انتگرال معین

۲۷۸	۱-۱۲ تعریف
۲۸۱	۲-۱۲ یافتن محدوده‌های انتگرال
۲۸۶	۳-۱۲ انتگرال معین
۲۹۲	۴-۱۲ ویژگی‌های انتگرال معین
۲۹۸	۵-۱۲ ویژگی‌های مقایسه‌ای انتگرال معین
۳۰۲	۶-۱۲ قضیه مقدار میانگین برای انتگرال معین
۳۰۶	۷-۱۲ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل انتگرال
۳۱۵	۸-۱۲ محاسبه برخی حدها به کمک انتگرال معین
۳۱۸	۹-۱۲ تغییر متغیر در انتگرال معین
۳۲۱	۱۰-۱۲ محاسبه انتگرال‌های معین به کمک شکل هندسی
۳۲۴	۱۱-۱۲ محاسبه انتگرال معین توابع معکوس مثلثاتی و هیپربولیک
۳۲۶	۱۲-۱۲ محاسبه انتگرال‌های شامل قدر مطلق
۳۲۹	۱۳-۱۲ محاسبه انتگرال‌های شامل جزء صحیح
۳۳۲	۱۴-۱۲ محاسبه انتگرال‌های شامل تابع علامت SGN
۳۳۴	۱۵-۱۲ محاسبه انتگرال‌های $\int_r^{\pi} \cos^n x \, dx$, $\int_r^{\pi} \sin^n x \, dx$
۳۳۸	۱۶-۱۲ تکنیک‌های محاسبه انتگرال معین

فصل ۱۳

انتگرال‌های ناسره

۳۵۶	 ۱-۱۳ انتگرال‌های ناسره
۳۵۷	 ۱-۱-۱۳ انتگرال ناسره نوع اول
۳۵۸	 ۲-۱-۱۳ انتگرال ناسره نوع دوم
۳۶۱	 ۳-۱-۱۳ انتگرال ناسره نوع سوم
۳۶۳	 ۱-۱۳ آزمون‌های تشخیص رفتار انتگرال‌های ناسره
۳۶۴	 ۳-۲-۱۳ آزمون P
۳۶۵	 ۱-۱۳ آزمون مقایسه
۳۶۶	 ۱۳-۲-۴ آزمون خازن (نسبت حدی)
۳۶۸	 ۱۳-۲-۵ آزمون هری
۳۷۰	 ۱۳-۲-۶ آزمون همگرایی مضرب و همگرایی مشروط

فصل ۱۴

تابع گاما

۳۸۰	 ۱-۱۴ تابع گاما
۳۸۱	 ۱۴-۱-۳ خواص گاما

فصل ۱۵

تابع بتا

۳۹۰	 ۱-۱۵ تابع بتا
۳۹۲	 ۱۵-۱-۲ تعمیم تابع بتا توابع مثلثاتی
۳۹۴	 ۱۵-۱-۳ تعمیم بازه انتگرال به بازه دلخواه

فصل ۱۶

کاربرد تبدیل لاپلاس در محاسبه انتگرال

۳۹۸	 ۱-۱۶ تعریف تبدیل لاپلاس
۴۰۴	 ۲-۱۶ محاسبه انتگرال با استفاده از تبدیل لاپلاس
۴۰۸	 ۳-۱۶ مشتق و تبدیل لاپلاس
۴۱۱	 ۴-۱۶ انتگرال و تبدیل لاپلاس
۴۱۷	 ۵-۱۶ انتقال در تبدیل لاپلاس
۴۲۱	 ۶-۱۶ تعمیم محاسبه انتگرال با استفاده از تبدیل لاپلاس
۴۲۳	 ۷-۱۶ کانولوشن و تبدیل لاپلاس

فصل ۱۷

سؤالات دانشگاهی برتر ایران و جهان

۴۳۰	 ۱-۱۷ دانشگاه‌های برتر ایران
۴۳۶	 ۲-۱۷ دانشگاه‌های برتر جهان
۴۳۸	 ۳-۱۷ پاسخ سؤالات دانشگاه‌های برتر ایران
۴۶۷	 ۴-۱۷ پاسخ سؤالات دانشگاه‌های برتر جهان

پیوست

۴۷۷	 پیوست (الف)
۴۷۸	 پیوست (ب)
۴۸۱	 پیوست (ج)

۵۰۹	 کتابنامه
-----	----------------

۵۱۱	 واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
-----	----------------------------------

۵۱۵	 واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
-----	----------------------------------

۵۱۹	 نمایه
-----	-------------