



# مبحثی در منطق ریاضی

شاهی موهان ریواستاوا

ترجمه رحیم مشتاق نظم

مرکز نشر دانشگاهی



*A Course on Mathematical Logic*

Shashi Mohan Srivastava

Second Edition

Springer 2013

مبثی در منطق ریاضی

تالیف شاشی موهان سریواستاوا

ترجمه رحیم مشتاق‌نظم

ویراستار: نیلوفر مهدی

نسخه‌پرداز: نادیا فرهادی

حروفچینی و صفحه‌آرایی: بهمن وحید زهرا صاعدافضل

طراح جلد: سمیه عابدینی

مرکز نشر دانشگاهی

چاپ اول ۱۳۹۷

تعداد ۱۰۰

چاپ و صحافی: توس

۱۷۰۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، روبه‌روی سینما سیده، پاساژ خیبری، تلفن: ۶۶۴۱۰۶۸۶، ۶۶۴۰۸۸۹۱  
نشانی فروشگاه و نمایشگاه دائمی: خیابان دکتر بهشتی، خیابان خاندان مری، نشانی خیابان دهم، شماره ۵۰، تلفن: ۸۷۷۵۹۵۴



17152164402930011111

فروش اینترنتی: [www.bookiup.ir](http://www.bookiup.ir)

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

سرشناسه: سریواستاوا، شاشی موهان (Srivastava, S. M. (Shashi Mohan)

عنوان و نام پدیدآور: مبثی در منطق ریاضی / شاشی موهان سریواستاوا؛ ترجمه رحیم مشتاق‌نظم.

مشخصات نشر: تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۹۷

مشخصات ظاهری: ۲۵۰ ص.

فروست: مرکز نشر دانشگاهی: ۱۵۲۷، ریاضی: ۱۸۱.

شابک: 978-964-01-1527-5

وضعیت فهرست‌نویسی: فیا

یادداشت: عنوان اصلی: [2013]. *A course on mathematical logic*

موضوع: منطق ریاضی - کتاب‌های درسی

Logic, Symbolic and mathematical-Textbooks

شناسه افزوده: مشتاق، رحیم، ۱۳۵۶ - مترجم

شناسه افزوده: مرکز نشر دانشگاهی

شناسه افزوده: Iran University Press

رده‌بندی کنگره: ۱۳۹۷ ۴۲ س/ ۹ QA

رده‌بندی دیویی: ۵۱۱/۶

شماره کتابشناسی ملی: ۵۱۷۰۳۳۷

بسم الله الرحمن الرحيم

## فهرست

| صفحه | عنوان                           |
|------|---------------------------------|
| ۱    | مقدمه                           |
| ۵    | ۱ قواعد منطق مرتبه اول          |
| ۵    | ۱.۱ زبانهای مرتبه اول           |
| ۸    | ۲.۱ ترمهای زبان                 |
| ۱۱   | ۳.۱ فرمولهای زبان               |
| ۱۵   | ۴.۱ نظریه‌های مرتبه اول         |
| ۲۱   | ۲ اصول معنایی زبانهای مرتبه اول |
| ۲۲   | ۱.۲ ساختارهای زبانهای مرتبه اول |
| ۲۳   | ۲.۲ درستی در ساختار             |
| ۲۵   | ۳.۲ مدلها و رده‌های مقدماتی     |

|    |                               |
|----|-------------------------------|
| ۲۸ | ۴.۲ نشاندنها و یکریختیها      |
| ۳۴ | ۵.۲ چند مثال                  |
| ۳۹ | ۶.۲ ساختارهای همگن            |
| ۴۲ | ۷.۲ قضیه کاهشی لونهایم-اسکولم |
| ۴۶ | ۸.۲ تعریف پذیری               |

### ۳ منطق گزاره‌ها

|    |                                      |
|----|--------------------------------------|
| ۵۴ | ۱.۳ نحو منطق گزاره‌ها                |
| ۵۵ | ۲.۳ معنانشناسی منطق گزاره‌ها         |
| ۵۶ | ۲.۳ قضیه فشردگی در منطق گزاره‌ها     |
| ۶۰ | ۴.۳ اثبات در منطق گزاره‌ها           |
| ۶۴ | ۵.۳ فراقضیه‌ها در منطق گزاره‌ها      |
| ۶۵ | ۶.۳ قضیه تولووی بر روی منطق گزاره‌ها |
| ۶۹ |                                      |

### ۴ قضیه تمامیت در منطق مرتبه اول

|    |                                  |
|----|----------------------------------|
| ۷۲ | ۱.۴ اثبات در منطق مرتبه اول      |
| ۷۲ | ۲.۴ فراقضیه‌ها در منطق مرتبه اول |
| ۷۴ | ۳.۴ سازگاری و تمامیت             |
| ۸۳ | ۴.۴ اثبات قضیه تمامیت            |
| ۸۶ | ۵.۴ تعبیرها در هر نظریه          |
| ۹۳ | ۶.۴ توسیع با تعریفها             |
| ۹۵ | ۷.۴ بعضی از فراقضیه‌ها در حساب   |
| ۹۸ |                                  |

### ۵ نظریه مدل

|     |                                 |
|-----|---------------------------------|
| ۱۰۲ | ۱.۵ کاربردهای قضیه تمامیت       |
| ۱۰۲ | ۲.۵ قضیه فشردگی                 |
| ۱۰۴ | ۳.۵ قضیه لونهایم-اسکولم افزایشی |
| ۱۰۷ | ۴.۵ فراضرب مدلها                |
| ۱۰۸ |                                 |

|     |                                      |
|-----|--------------------------------------|
| ۱۱۴ | ۵.۵ بعضی کاربردها در جبر             |
| ۱۱۷ | ۶.۵ توسیعیهای نگاشتهای جزئی مقدماتی  |
| ۱۲۱ | ۷.۵ حذف سورها                        |
| ۱۲۸ | ۸.۵ کاربردهای حذف سورها              |
| ۱۳۱ | ۹.۵ میدانهای بسته حقیقی              |
| ۱۴۰ | ۱۰.۵ کاربردهایی در جبر و هندسه       |
| ۱۴۶ | ۱۱.۵ نوعهای مجزا و حذف انواع         |
| ۱۵۲ | ۱۲.۵ انواع نسبی                      |
| ۱۵۸ | ۱۳.۵ مدلهای ارن و مدلهای اتمی        |
| ۱۶۳ | ۱۴.۵ مدلهای اشباع                    |
| ۱۷۱ | ۱۵.۵ نظریه‌های بنادر                 |
| ۱۷۷ | ۶ توابع بازگشتی و حسابی سازی نظریه   |
| ۱۷۸ | ۱.۶ توابع بازگشتی و محمولهای بازگشتی |
| ۱۹۱ | ۲.۶ محمولهای نیمه بازگشتی            |
| ۱۹۴ | ۳.۶ حسابی سازی نظریه‌ها              |
| ۲۰۳ | ۴.۶ نظریه‌های تصمیم‌پذیر             |
| ۲۰۸ | ۷ قضیه‌های ناتمامیت و نمایش‌پذیری    |
| ۲۰۸ | ۱.۷ نمایش‌پذیری                      |
| ۲۱۸ | ۲.۷ اولین قضیه ناتمامیت              |
| ۲۱۰ | ۳.۷ مجموعه‌های حسابی                 |
| ۲۳۱ | ۴.۷ توسیعیهای بازگشتی حساب پتانو     |
| ۲۳۸ | ۵.۷ دومین قضیه ناتمامیت              |
| ۲۴۳ | مراجع                                |

## مقدمه

این کتاب در صد و سی سال بعد از تولد کورت گودل<sup>۱</sup> (۱۹۰۶-۱۹۷۸)، پرشورترین منطقدان همه اعصار نوشته شده است که کتابش اصول ریاضیات را به لرزه در آورد. شیوه زیبایش در آزمودن تمامی عمارت ریاضیات درون همان ریاضیات، نه تنها به صورتی نمایشی، بلکه با روشهایی کاملاً دقیق، مشابه موسیقی باخ<sup>۲</sup> و نقاشیهای اشراف<sup>۳</sup> است. [۶]. کشفیاتش تأثیر عمیقی بر فیلسوفان و زیانسانان داشت. تا اندازه‌ای، این روش در عصر کامپیوتر راهگشا بوده است. ایده‌اش از حساب دستگاههای صوری به کشف برنامه کامپیوتری فراگیری منجر شد که همه برنامه‌ها را شبیه‌سازی می‌کند. بر پایه قضیه ناتمامیتش، فیزیکدانها نظریه‌هایی درباره هوش مصنوعی را مسئله تن و روان مطرح کرده‌اند [۱۳]. هدف اصلی این کتاب، بیان و اثبات قضایای ناتمامیت گودل<sup>۴</sup> با عبارتهای دقیق ریاضی است. این شیوه ما را به ارائه مقدمه‌ای کوتاه، ممتاز به روش ریچان انگیز از منطق ریاضی برای دانشجویان کارشناسی ارشد و دانشجویان پیشرفته کارشناسی منطق، نظریه مجموعه‌ها، نظریه بازگشت و علوم کامپیوتر قادر می‌سازد. هر ریاضیدانی که علاقه‌مند است قضایای منطق ریاضی را بداند که به یادگیری قضایای مشهور تمامیت و ناتمامیت می‌انجامد، دقیقاً این کتاب را مناسب خواهد یافت. شیوه بحث کاملاً ریاضی‌وار است و کل مبحث به هر شاخه دیگر ریاضیات شباهت دارد. تلاشهای بسیاری صورت گرفته است تا کتاب برای هر دو هدف خودآموزی و آموزشی کلاسی مناسب باشد. هدف این آن نیست که دایره‌المعارفی فراگیر از منطق باشد، یا اینکه برای مخاطبانی از زیانسانان و فیلسوفان انتشار یابد؛ با این حال، اساساً همه مفاهیم و نتایج پایه‌ای منطق ریاضی را ارائه می‌کند.

1. Kurt Gödel 2. Bach 3. Escher

4. Gödel's completeness and incompleteness theorems

پیش‌نیاز اصلی این کتاب علاقه‌مندی به فعالیت در سطحی معقول از دقت و عمومیت ریاضی است. ولی، دانستن ریاضیات مقدماتی، به‌ویژه، نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها و جبر نیاز است. ما [۱۷، صفحات ۱۵-۱] را برای پیش‌نیازهای ضروری نظریهٔ مجموعه‌ها پیشنهاد می‌کنیم. [۱۰] برای جبر مورد نیاز به‌منظور یادگیری مثالها و کاربردها، منبع خوبی خواهد بود.

دانشجویانی که می‌خواهند در موضوعات اساسی متخصص شوند باید تمامی کتاب را مطالعه کنند و، به‌منظور درک بهتر، باید روی همهٔ مسائل کار کنند. گاهی، تنها طرحی از برهان را ارائه کرده‌ایم و تکمیل استدلالهای سراسر را به خواننده واگذار کرده‌ایم. دانشجویان علوم کامپیوتر می‌توانند از بخشهای از نظریهٔ مدل و مجموعه‌های حسابی بگذرند. ریاضیدانهای فعال در شاخه‌های دیگر ریاض و کسانی که فقط می‌خواهند قضایای تمامیت و ناتمامیت را یاد بگیرند، می‌توانند این بخشها را حذف کنند. با این وجود، بخشهایی از نظریهٔ مدل کاربردهایی از منطق در ریاضیات را ارائه می‌کنند. [۱۱] [۱۲] به‌جز بخش ۲-۴ و بخشهای ۵-۱ و ۵-۴ برای دانشجویان کارشناسی باید دوره‌ای مطمئن در منطق ریاضی باشد.

این کتاب دانشجویان را برای شاخه‌های گوناگونی از ریاضیات، که به اصول ریاضیات و محاسبه‌پذیری مربوطاند (مانند: منطق، نظریهٔ مدل، نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها، تعریف‌پذیری، نظریهٔ بازگشت و محاسبه‌پذیری) آماده می‌کند. کتاب اخیر هینمن<sup>۱</sup> [۵] کتاب بسیار جامعی در همهٔ این زمینه‌هاست. هنوز کتاب شوئفیلد<sup>۲</sup> [۱۰] کتابی مناسب در زمینهٔ منطق است. برای نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها به‌ویژه کتابهای کانز<sup>۳</sup> [۹] و یخ<sup>۴</sup> [۸] را پیشنهاد می‌کنیم. برای نظریهٔ مدل، خوانندگان باید چانگ و کیسلر<sup>۵</sup> [۳] و مارکر [۱۱] را مطالعه کنند. برای نظریهٔ بازگشت، مرجع [۱۲] را پیشنهاد می‌کنیم.

مقدمهٔ ویرایش دوم، در دومین ویرایش، برای نظریهٔ مدل، دیل<sup>۶</sup> را نسبتاً آبرومند ارائه کرده‌ایم. این بخش نشان می‌دهد که منطق، در ارتباط با بخشهای دیگر ریاضیات، وضعیتی جالب توجه است. کار تارسکی، جولیا رابینسون، ووت<sup>۷</sup>، مورلی، شلاه<sup>۷</sup>، و دیگران این حقیقت را که نظریهٔ مدل به خودی خود موضوعی زیبا و عمیق است، تصدیق می‌کند. اثبات خروفسفسکی از حدس مُردل-لنگ-تایچ-میدان [۷]، اثبات حدس مَنین-مامفورد توسط پیلا و زائیر [۱۵] و اثبات پیلا برای حدس آندره-اورت [۱۴] برخی از کاربردهای تماشایی نظریهٔ مدل در هندسه و نظریهٔ اعدادند.

اهداف دومین ویرایش این کتاب ارائهٔ مقدمه‌ای ابتدایی از بخشهای ساده‌تر نظریهٔ مدل است. ولی، این کتاب در نظریهٔ مدل اصلاً کتاب کاملی نیست. ولی، امیدواریم کتابی باشد که انگیزه

خواننده را برای مطالعه مطالب بیشتر در این زمینه تشدید کند و او را در این زمینه آماده سازد. در فصل دوم، بخشی درباره ساختارهای همگن و بخشی درباره تعریف‌پذیری افزوده‌ایم. سه بخش نخست (شامل اثبات قضیه تمامیت در منطق مرتبه اول) و بخش آخر فصل پنجم در ویرایش اول را به فصل چهارم برده‌ایم. فصل پنجم در این ویرایش کاملاً جدید است و منحصرأ به نظریه مدل اشاره دارد.

مطالب مهم افزوده‌شده شامل فراضرب مدلها، حذف سورها، انواع و مدلهای اتمی، اشباع و پایدار است. برای توضیح روشهایمان، مثالهای جبری زیادی مطالعه کرده‌ایم. مطالعه اساسی میدانهای بسته حقیقی مثال جدید بسیار مهمی از جبر است. چندین کاربرد در میدانهای بسته جبری و میدانهای بسته حقیقی، مانند قضیه چوالی، قضیه صفرهای هیلبرت، اثبات ا. راینسون برای مسئله هفدهم هیلبرت و مانند آن ارائه کرده‌ایم. به جز از تغییرات صفحه‌آرایی و افزودن مثالها، باقی بخشها در ویرایش اول بدون تغییر باقی مانده‌اند.