

---

---

# مباحثی در نظریه جبرهای لی

دکتر فرشید سعیدی

عضو هیأت علمی گروه ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

ویژه دانشجویان تحصیلات تکمیلی رشته ریاضی

---

---

|                     |                                                 |
|---------------------|-------------------------------------------------|
| سرشناسه             | : سعیدی، فرشید، ۱۳۴۸.                           |
| عنوان و نام پدیدآور | : مباحثی در نظریه جبرهای لی / مولف فرشید سعیدی. |
| مشخصات نشر          | : مشهد: سخن گستر، ۱۳۹۴.                         |
| مشخصات ظاهری        | : ۴۰۸ ص.                                        |
| شابک                | : ۹۷۸-۶۰۰-۲۴۷-۵۱۳-۸                             |
| وضعیت فهرست نویسی   | : فیپا                                          |
| یادداشت             | : واژه نامه.                                    |
| یادداشت             | : کتابنامه.                                     |
| یادداشت             | : نمایه.                                        |
| موضوع               | : جبر لی                                        |
| رده بندی کنگره      | : ۱۳۹۴ ۷۲ م ۳/ QA۲۵۲                            |
| رده بندی دیویی      | : ۵۱۲/۴۸۲                                       |
| شماره کتابشناسی ملی | : ۴۱۷۹۲۷۶                                       |



#### انتشارات سخن گستر

مشهد - خیابان ابن سینا - مقابل ابن سینا ۱۲ - شماره ۱۰۰

تلفن: ۳۸۴۳۹۵۵ (۰۵۱)

نام کتاب: مباحثی در نظریه جبرهای لی

مولف: فرشید سعیدی

نوبت چاپ: اول / ۱۳۹۴

شمارگان: ۵۰۰ جلد

چاپ: میثاق

قیمت: ۳۰۰۰۰ تومان

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۲۴۷-۵۱۳-۸

# سخن مؤلف

کتاب حاضر حاصل تجربه چندین ساله مؤلف در امر تدریس مفاهیم جبر لی با دیدگاه نظریه گروه‌ها برای دانشجویان مختلف در مقاطع دکتری و کارشناسی ارشد و نیز سال‌ها پژوهش و تألیف مقالات و کتاب‌هاگون مرتبط می‌باشد. دانشجویان مخاطب این کتاب، در دانشکده‌های علوم پایه و ریاضی می‌بایست دروسی مانند جبر خطی را گذرانده باشند و از آن جا که رویکرد مؤلف در نگارش این کتاب بر ترفته اندیشه‌های نظریه گروه‌هاست، لذا آشنایی با مفاهیم نظریه گروه‌ها می‌تواند تاثیر شایانی در درک مطالب آن داشته باشد.

این کتاب مشتمل بر پانزده فصل می‌باشد که به جز فصول آغازین آن که به منظور آشنایی با مفاهیم اساسی و پایه‌ای ساختار جبرهای لی گردآوری شده‌اند، در سایر فصل‌ها مؤلف خود صاحب ایده و دستاوردهای پژوهشی جدید می‌باشد. مقالات مربوطه در مجلات معتبر منتشر شده است.

کتاب حاضر نه تنها به منظور تدریس در یک نیم سال تحصیلی ۱۶ هفته‌ای و برای ۴ واحد درسی بسیار مناسب است بلکه مطالب آن به گونه‌ای است که می‌تواند مرجعی مناسب جهت یادگیری و ایجاد تسلط هر چه بیشتر بر مفاهیم جبرهای لی باشد و عنوان یک کتاب مرجع برای محققین که به موضوعات کتاب مراجعه می‌کنند و علاقه‌مند هستند، توصیه می‌گردد.

امید است که این کتاب گامی موثر در پیشبرد اهداف والای پژوهشگران و دانشجویان باشد.

فرشید سعیدی

زمستان ۱۳۹۴

# فهرست مطالب

|    |                                     |       |
|----|-------------------------------------|-------|
| ۵  | تألیخچه                             |       |
| ۱۳ | مقدمه                               |       |
| ۲۱ | جبرهای لی                           | فصل ۱ |
| ۲۱ | آشنایی با جبرهای لی                 | ۱.۱   |
| ۲۹ | همریختی‌ها                          | ۲.۱   |
| ۳۲ | جبر                                 | ۳.۱   |
| ۳۴ | اشتقاق                              | ۴.۱   |
| ۴۲ | جبرهای لی خارج قسمتی                | ۵.۱   |
| ۴۳ | قضایای یکریختی                      | ۶.۱   |
| ۵۲ | حل پذیری و پوچ توانی جبرهای لی      | ۷.۱   |
| ۶۵ | دسته بندی جبرهای لی از بعد ۱، ۲ و ۳ | فصل ۲ |
| ۶۵ | جبرهای لی از بعد ۱                  | ۱.۲   |
| ۶۶ | جبرهای لی از بعد ۲                  | ۲.۲   |
| ۶۷ | جبرهای لی از بعد ۳                  | ۳.۲   |

|       |                                                             |     |
|-------|-------------------------------------------------------------|-----|
| فصل ۳ | جبرهای لی کمینا و تقریباً کمینا                             | ۷۹  |
| ۱.۳   | جفت‌های کمینا                                               | ۷۹  |
| ۲.۳   | جبرهای لی کمینا پوچ توان از رده دو                          | ۸۳  |
| ۳.۳   | جبرهای لی کمینا پوچ توان از رده سه                          | ۸۸  |
| ۴.۳   | کرانی برای رده پوچ توانی جبرهای لی کمینا                    | ۹۴  |
| ۵.۳   | جبرهای لی تقریباً کمینا                                     | ۹۷  |
| فصل ۴ | ضربگر جبرهای لی                                             | ۱۰۳ |
| ۱.۴   | جبر ل آزاد و ضربگر شور در جبر لی و جفت از جبرهای لی         | ۱۰۳ |
| ۲.۴   | دسته بندی جبرهای لی                                         | ۱۱۸ |
| فصل ۵ | $n$ -آیزو کلینسمی در جبرهای لی                              | ۱۲۳ |
| ۱.۵   | آیزو کلینسم در جبر لی                                       | ۱۲۴ |
| ۲.۵   | $n$ -آیزو کلینسم در جبرهای لی                               | ۱۲۹ |
| ۳.۵   | پوشش و توسیع های تحویل ناپذیر در جبرهای لی                  | ۱۳۱ |
| فصل ۶ | عکس قضیه شور در جبر لی                                      | ۱۳۵ |
| ۱.۶   | عکس قضیه شور با شرط متناهی مولد بودن خارج قسمت مرکزی جبر لی | ۱۳۶ |
| ۲.۶   | عکس قضیه شور برای جبرهای لی توانا                           | ۱۴۲ |
| ۳.۶   | عکس قضیه بنر در جبرهای لی                                   | ۱۵۲ |
| فصل ۷ | پوشش و توسیع های مرکزی نسبی تحویل ناپذیر برای جفت جبرهای لی | ۱۵۷ |
| ۱.۷   | ضربگر شور جفت جبرهای لی                                     | ۱۵۸ |
| ۲.۷   | پوشش جفت جبرهای لی                                          | ۱۶۰ |
| ۳.۷   | توسیع های مرکزی نسبی تحویل ناپذیر و اولیه از جفت جبرهای لی  | ۱۶۸ |

|     |                                                            |     |
|-----|------------------------------------------------------------|-----|
| ۴.۷ | نامساوی ها و یکریختی هایی درباره ضربگر شور جبرهای لی       | ۱۷۷ |
| ۵.۷ | قضیه شور و عکس آن در جبر لی و خواصی از ضربگر شور جبرهای لی | ۱۸۳ |

## فصل ۸ $n$ -ایزوکلینیسیم نسبی در جبرهای لی

|     |                                                                      |     |
|-----|----------------------------------------------------------------------|-----|
| ۱.۸ | ایزوکلینیسیم نسبی در جبرهای لی                                       | ۱۸۹ |
| ۲.۸ | مفهوم $n$ -ایزوکلینیسیم نسبی برای جفت جبرهای لی و بررسی ویژگی های آن | ۱۹۱ |
| ۳.۸ | جفت $n$ -تنه ای و بیان ویژگی های آن                                  | ۲۰۲ |

## فصل ۹ رده بندی جبرهای لی پوچ توان و فلیفرم جفت به وسیله ضربگر

|     |                                                               |     |
|-----|---------------------------------------------------------------|-----|
| ۱.۹ | تعاریف و قضایای مقدماتی                                       | ۲۱۳ |
| ۲.۹ | رده بندی جبرهای لی مستخرج توان با بعد متناهی به کمک ضربگر شور | ۲۱۸ |

## فصل ۱۰ مشخصه سازی جبرهای لی به کمک برخی از زیرجبرهای جبر اشتقاق

|      |                                                           |     |
|------|-----------------------------------------------------------|-----|
| ۱.۱۰ | معرفی برخی از زیرجبرهای جبر اشتقاق                        | ۲۳۹ |
| ۲.۱۰ | شرایط لازم و کافی برای تساوی برخی از زیرجبرهای جبر اشتقاق | ۲۵۲ |
| ۳.۱۰ | مشخصه سازی جبرهای لی تنه ای به کمک اشتقاق های مرکزی       | ۲۶۵ |
| ۴.۱۰ | جبرهای لی نیمه کامل                                       | ۲۷۲ |

## فصل ۱۱ دسته بندی جبرهای لی پوچ توان به کمک زیرجبر $\text{Der}_c(L)$ از جبر اشتقاق

|      |                                                 |     |
|------|-------------------------------------------------|-----|
| ۱.۱۱ | کرانی برای بعد $\text{Der}_c(L)$ بر حسب بعد $L$ | ۲۸۵ |
| ۲.۱۱ | دسته بندی جبرهای لی پوچ توان                    | ۲۸۹ |

---

**فصل ۱۲ آشنایی با  $n$ -جبرهای لی**

۲۹۹

۱.۱۲ مفاهیم مقدماتی در  $n$ -جبرهای لی ..... ۲۹۹

۲.۱۲ زیرجبرهای جبر اشتقاق  $n$ -جبرهای لی ..... ۳۰۵

---

**فصل ۱۳ ضربگر  $n$ -جبرهای لی**

۳۱۳

۱.۱۳  $n$ -جبرهای لی پوششی ..... ۳۱۴

۲.۱۳ ضربگر  $n$ -جبرهای لی ..... ۳۱۷

۳.۱۳ مختار  $n$ -جبرهای لی هایزنبرگ ویژه و بعد ضربگر آن‌ها ..... ۳۲۲

۴.۱۳ ضربگر  $n$ -جبرهای لی هایزنبرگ ویژه ..... ۳۲۵

۵.۱۳ نام‌آویز و  $n$ -جبرهای لی بعد ضربگر ..... ۳۲۷

---

**فصل ۱۴ طبقه‌بندی  $n$ -جبرهای لی پوچ توان به کمک ضربگر آن‌ها**

۳۳۵

۱.۱۴ دسته‌بندی  $n$ -جبرهای لی بر حسب تابع  $s$  ..... ۳۳۶

۲.۱۴ دسته‌بندی  $n$ -جبرهای لی نسبت به تابع  $t$  ..... ۳۴۴

---

**فصل ۱۵ بررسی خواص آیزوکلینیسیم در  $n$ -جبرهای لی**

۳۴۷

۱.۱۵ آیزوکلینیسیم در  $n$ -جبرهای لی ..... ۳۴۷

۲.۱۵ مجموعه سازه در  $n$ -جبر لی ..... ۳۵۳

۳.۱۵ عناصر جهانی ..... ۳۶۵

---

**پیوست: جداول دسته‌بندی برخی از جبرهای لی**

۳۷۱

---

**واژه‌نامه انگلیسی به فارسی**

۳۷۹

---

**واژه‌نامه فارسی به انگلیسی**

۳۸۱

# تاریخچه

در سال ۱۹۴۰ هال<sup>۱</sup> [۵۰] مفهوم آیزوکلینیسم<sup>۲</sup> را در گروه‌ها مطرح کرد. بعدها در سال ۱۹۷۶ یوک<sup>۳</sup> [۲۰] و بعد آن هکستر<sup>۴</sup> [۵۸] مفهوم  $n$ -آیزوکلینیسم را برای گروه‌ها مطرح کردند. در سال ۲۰۱۵ مقدم<sup>۵</sup> [۱۱۵] همکاران مفهوم خود آیزوکلینیسمی<sup>۶</sup> را در گروه‌ها بر پایه مفاهیم  $L(G)$  و  $K(G)$  مطرح کردند که  $L(G)$  و  $K(G)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$L(G) = \{x \in G \mid x^\alpha = x \ \forall \alpha \in \text{Aut}(G)\},$$

$$K(G) = \{[\alpha, \beta] \mid \alpha, \beta \in \text{Aut}(G)\}.$$

اما اولین بار مانین<sup>۷</sup> [۹۸] در سال ۱۹۹۴ مفهوم ایزوکلینیسم را برای جبر لی بیان کرد. دو جبر لی  $L$  و  $M$  را آیزوکلینیک<sup>۸</sup> گوئیم و با نماد  $M \sim L$  نمایش می‌دهیم هرگاه یکریختی‌های  $\alpha: L/Z(L) \rightarrow M/Z(M)$  و  $\beta: L^2 \rightarrow M^2$  موجود باشند به گونه‌ای که نمودار زیر جابجایی باشد.

<sup>۱</sup>P. Hall

<sup>۲</sup>Isoclinism

<sup>۳</sup>Bioch

<sup>۴</sup>Hekster

<sup>۵</sup>M. R. R. Moghaddam

<sup>۶</sup>Autoisoclinism

<sup>۷</sup>K. Moneyhun

<sup>۸</sup>Isoclinic

$$\begin{array}{ccc} \frac{L}{Z(L)} \times \frac{L}{Z(L)} & \xrightarrow{\rho} & L^2 \\ \alpha^r \downarrow & & \downarrow \beta \\ \frac{M}{Z(M)} \times \frac{M}{Z(M)} & \longrightarrow & M^2 \end{array}$$

نگاشت های  $\rho$  و  $\psi$  به صورت های زیر تعریف می شوند

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = [x_1, x_2],$$

برای هر  $\bar{x}_i = x_i + Z(L) \in L/Z(L)$

$$\psi(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = [y_1, y_2],$$

برای هر  $\bar{y}_i = y_i + Z(M) \in M/Z(M)$  جفت یکریختی های  $(\alpha, \beta)$  را آیزوکلینسم بین  $M$  و  $L$  می گوئیم. او همچنین نشان داد که دو جبر لی با بعد یکسان و متاهی آیزوکلینیک هستند اگر و تنها اگر آن ها یکریخت باشند. در سال ۲۰۰۸ سالمکار<sup>۹</sup> [۱۲۳] و همکاران شرایط معادل برای آیزوکلینسمی دو جبر لی را بررسی کردند. آن ها در سال ۲۰۱۰ در [۱۲۵] نیز مفهوم  $n$ -آیزوکلینسمی را با توجه به جبرهای پوچ تو از کلاس حداکثر  $n$  معرفی و مطالعه کردند. مقدم<sup>۱۰</sup> و همکاران [۹۶] در سال ۲۰۱۱ آیزوکلینسم در جفت جبرهای لی<sup>۱۱</sup> را مطرح کردند. همچنین آن ها در سال ۲۰۱۴ مفهوم  $n$ -آیزوکلینسم در جفت جبرهای لی را در [۹۷] معرفی کردند.

همچنین مانیهان زوج  $(K, M)$  از جبرهای لی را جفت معرف<sup>۱۲</sup> جبر  $M$  از بعد متاهی  $L$  نامید هرگاه  $M \subseteq Z(K) \cap K^2$  و  $L \cong \frac{K}{M}$  و ثابت کرد که بعد  $K$  و  $M$  متاهی<sup>۱۳</sup> در حالتی که بعد

<sup>۹</sup>Salemkar

<sup>۱۰</sup>M. R. R. Moghaddam

<sup>۱۱</sup>Pair of Lie Algebra

<sup>۱۲</sup>Defining pair

$K$  ماکزیمال<sup>۱۳</sup> باشد،  $M$  را ضربگر<sup>۱۴</sup> و  $K$  را پوشش<sup>۱۵</sup>  $L$  نامید. اگر  $\circ \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow L \rightarrow \circ$  یک نمایش آزاد<sup>۱۶</sup> برای جبر لی  $L$  باشد، در این صورت اگر  $L$  از بعد متناهی باشد آن گاه ثابت می شود که ضربگر جبر لی  $L$  که با نماد  $\mathcal{M}(L)$  نشان می دهیم، یکریخت با  $\frac{F^2 \cap R}{[R, F]}$  می باشد. او همچنین ثابت کرد که هر دو پوشش یک جبر لی از بعد متناهی آیزوکلینیک و لذا یکریخت اند. در سال ۱۹۹۶ بتن<sup>۱۷</sup>، مانیهان و استیتزینگر<sup>۱۸</sup> [۱۳] ثابت کردند که اگر  $A$  و  $B$  دو جبر لی از بعد متناهی<sup>۱۹</sup> باشند،

$$\dim \mathcal{M}(A \oplus B) = \dim \mathcal{M}(A) + \dim \mathcal{M}(B) + ab,$$

که در آن  $a = \dim A/B^2$  و  $b = \dim B/B^2$  بعد ضربگر جبرهای لی هایزنبرگ ویژه<sup>۲۰</sup> به عنوان دسته همی از جبرهای لی در [۱۴] به دست آمد. در سال ۱۹۹۸ هاردی<sup>۲۱</sup> و استیتزینگر [۵۲] برای جبرهای لی پوشان<sup>۲۲</sup> نامساوی  $\dim L^2 + \dim \mathcal{M}(L) \leq \frac{1}{4}n(n-1)$  را به دست آوردند. نیرومند<sup>۲۳</sup> و روسا<sup>۲۴</sup> در [۱۰۴] ثابت کردند که اگر  $K$  یک ایده آل مرکزی<sup>۲۵</sup> جبر لی  $L$  باشد، نامساوی زیر برقرار است.

$$\dim \mathcal{M}(L) + \dim(L^2 \cap K) \leq \dim \mathcal{M}\left(\frac{L}{K}\right) + \dim \mathcal{M}(K) + xy,$$

که در آن  $x = \dim K$  و  $y = \dim((L/K)/(L/K)^2)$ . همچنین نیرومند [۱۰۳] ثابت کرد

<sup>۱۳</sup>maximal

<sup>۱۴</sup>Multipleir

<sup>۱۵</sup>Cover

<sup>۱۶</sup>Free Peresentatio.

<sup>۱۷</sup>Batten

<sup>۱۸</sup>Stitzinger

<sup>۱۹</sup>Finite Dimensional

<sup>۲۰</sup>Heizenberg

<sup>۲۱</sup>Hardy

<sup>۲۲</sup>Nilpotent

<sup>۲۳</sup>P. Niroomand

<sup>۲۴</sup>Rucco

<sup>۲۵</sup>Central Ideal

که اگر  $L$  یک جبر لی پوچ توان از بعد متناهی با  $\dim L^2 = 2$  و  $\dim Z(L) = 1$  باشد، رابطه

$$\dim L^2 + \dim \mathcal{M}(L) \leq \dim \mathcal{M}\left(\frac{L}{L^2}\right) + ab,$$

برقرار است که در آن  $a = \dim L^2$  و  $b = \dim(L/Z_2(L))$  یکی دیگر از نامساوی‌هایی که در مورد ضربگر جبرهای لی پوچ توان با بعد متناهی وجود دارد توسط سالمکار در [۱۲۴] مطرح شده است. اگر  $L$  یک جبر لی پوچ توان با بعد متناهی و  $K$  یک جبر لی با بعد متناهی و ایده‌آل مرکزی  $Z$  چنان باشد که  $L \cong \frac{K}{Z}$  در این صورت

$$\dim(K^2 \cap Z(K)) \leq \dim \mathcal{M}\left(\frac{L}{L^2}\right) + \dim L^2 \left(d\left(\frac{L}{Z(L)}\right) - 1\right).$$

نتیجه خاصی از این رابطه قبلاً توسط یانکوفسکی<sup>۲۶</sup> [۱۵۸] در سال ۲۰۰۳ به صورت زیر بیان

شده بود

$$\dim \mathcal{M}(L) \leq \dim \mathcal{M}\left(\frac{L}{L^2}\right) + \dim L^2 \left(d\left(\frac{L}{Z(L)}\right) - 1\right).$$

لازم به ذکر است که مطالب کافی در مرجع [۷۲] در مورد ضربگر شور گروه‌ها بیان شده است. یکی دیگر از مسائل مهم در جبر لی در دسته‌بندی جبرهای لی است. دسته‌بندی جبرهای لی با بعدهای پایین یکی از مسایل اولیه در مطالعه جبرهای لی به شمار می‌آید. دسته‌بندی جبرهای لی با بعد حداکثر ۴ را می‌توان در کتب و مقالات جبر لی شاهان<sup>۲۷</sup> دید.

اولین گام برای دسته‌بندی جبرهای لی پوچ توان ۶ بعدی را ارملاف<sup>۲۸</sup> [۱۴۹] در سال ۱۸۹۱ برداشت. بعدها در سال ۱۹۵۰، مورزو<sup>۲۹</sup> [۹۹] دسته‌بندی جبرهای لی پوچ توان ۶ بعدی را روی میدانهای با مشخصه صفر منتشر نمود. بعد آن نیز دسته‌بندی‌هایی با بعدهای دیگر یا روی میدانهای دیگر مورد مطالعه قرار گرفت (ابعاد ۷ و ۸ و میدانهای متناهی، به طور جزئی، بسته، با مشخصه مخالف ۲ و با مشخصه ۲). جبرهای لی پوچ توان تا بعد ۵ کاملاً شناخته شده‌اند. در حد یکریختی یک جبر از بعد ۲، دو جبر از بعد ۳، سه جبر از بعد ۴ و نه جبر از بعد ۵ وجود دارند. دسته‌بندی جبرهای لی پوچ توان تا بعد ۵ مستقل از میدان است. شاید بتوان [۲۹] را کامل‌ترین کار در زمینه

<sup>۲۶</sup>Yankofsky

<sup>۲۷</sup>K. A. Umlauf

<sup>۲۸</sup>V. V. Morozov

دسته‌بندی جبرهای لی ۶ بعدی پوچ توان دانست. نوع دیگری از دسته‌بندی جبرهای لی بر اساس ضربگر جبرهای لی انجام شده است. بر اساس لم ۲۲ از [۹۸] برای هر جبر لی  $d$  بعدی  $L$  عدد صحیح نامنفی  $t(L)$  وجود دارد به‌طوری که

$$\dim \mathcal{M}(L) = \binom{n}{2} - t(L).$$

بن، مانیهان و استیتزینگر در [۱۳] ثابت کردند که  $t(L) = 0$  اگر و تنها اگر  $L$  آبلی باشد. آن‌ها همچنین جبرهای لی پوچ توان با شرط  $t(L) = 1, 2$  را دسته‌بندی نمودند (مساله دسته‌بندی جبرهای لی با شرط  $t(L) = 1, 2$  یک مساله حل نشده است).

هاردی، استیتزینگر در [۵۲] جبرهای لی پوچ توان با شرط  $t(L) = 3, 4, 5, 6$  را دسته‌بندی نمودند و بالاخره هاردی در [۵۳] جبرهای لی پوچ توان با شرط  $t(L) = 7, 8$  را دسته‌بندی نمود. (مساله دسته‌بندی جبرهای لی پوچ توان با شرط  $t(L) \geq 9$  یک مساله حل نشده است). در سال ۲۰۱۱، نیرومند و برسر در [۱۰۴] ثابت کردند که برای هر جبر لی پوچ توان  $n$  بعدی با  $\dim A^2 = m \geq 1$  رابطه

$$\dim \mathcal{M}(L) \leq \frac{1}{4}(n+m-2)(n-m-1) + 1, \quad (1)$$

برقرار است. بعلاوه آن‌ها ثابت کردند که در حالت  $m = 1$  تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر  $L \cong H(1) \oplus F(n-3)$  و با توجه به این که کران بالا بر حسب  $m$  نزولی است، بنابراین همواره  $s(L) \geq 0$  ای وجود دارد که

$$\dim \mathcal{M}(L) = \frac{1}{4}(n-1)(n-2) + 1 - s(L).$$

نیرومند در [۱۰۳] جبرهای لی پوچ توان را در حالت‌های  $t(L) = 0, 1, 2$  دسته‌بندی نمود.

سوالی که به صورت طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا تحقیقات انجام شده برای جبرهای لی در حالت کلی برای  $n$ -جبرهای لی قابل انجام هستند؟ قبل از پاسخ به این سوال، ابتدا به تحقیقات انجام شده در مورد  $n$ -جبرهای لی اشاره می‌کنیم. در سال ۱۹۸۵، فیلپوف<sup>۲۹</sup> [۴۳] مفهوم  $n$ -جبر لی را به عنوان یک نگاشت چندخطی همراه با براکت  $[x_1, \dots, x_n]$  که در اتحاد

<sup>۲۹</sup>Phillipov

ژاکوبی تعمیم یافته<sup>۳۰</sup> (که ما به اختصار آن را همان اتحاد ژاکوبی می نامیم) به صورت زیر صدق کند، معرفی نمود

$$[[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n].$$

بدیهی است که در حالت  $n = 2$  این مفهوم همان مفهوم جبر لی است. او چندین مثال از  $n$ -جبرهای لی ارائه نمود و همچنین مفاهیم ساده<sup>۳۱</sup> بودن و پوچتوانی را مطرح نمود و علاوه بر آن همه  $n$ -جبرهای لی از بعد  $n + 1$  را روی میدان های بطور جبری بسته<sup>۳۲</sup> از مشخصه<sup>۳۳</sup> صفر دسته بندی نمود. کاسیمو [۷۴] در سال ۱۹۸۷ مفاهیم پوچتوانی و حل پذیری<sup>۳۴</sup> را برای  $n$ -جبرهای لی معرفی کرد. در سال ۲۰۰۸، بای<sup>۳۵</sup> و همکاران در [۹] تمام  $n$ -جبرهای لی از بعد  $n + 1$  را روی میدان های با مشخصه ۲ دسته بندی نمودند و نشان دادند که هیچ  $n$ -جبر لی ساده از بعد  $n + 2$  وجود ندارد. در سال ۲۰۱۱، بای و همکاران در [۱۱] تمام  $n$ -جبرهای لی از بعد  $n + 2$  را روی میدان های طول جبر بسته از مشخصه صفر دسته بندی نمودند.

لازم به ذکر است که بعضی از نتیجه که در نظریه گروهها و جبرهای لی برقرارند در  $n$ -جبرهای لی برقرار نیستند. به عنوان مثال<sup>۳۶</sup> می دیم که اگر  $M_1$  و  $M_2$  دو ایده آل پوچ توان از جبر لی  $L$  باشند که  $L = M_1 + M_2$ ، در این صورت  $L$  پوچ توان است اما این موضوع در  $n$ -جبرهای لی برقرار نیست (برای جزئیات بیشتر در مورد بررسی از نگاه<sup>۳۷</sup> و همچنین تحقیقات انجام شده در  $n$ -جبرهای لی می توان منابع [۵]، [۸]، [۱۰]، [۱۷]، [۲۵]، [۴۶]، [۱۰۱]، [۱۱۷] و [۱۵۳] را مشاهده کرد). ما در به انجام رساندن این کتاب قصد داشتیم این موضوعات را در  $n$ -جبر لی تعمیم دهیم. البته این کار چندان هم ساده به نظر نمی رسید. زیرا در مورد  $n$ -جبرهای لی موضوعاتی که ما قصد دنبال کردن آن ها را داشتیم، یا انجام نشده بودند یا این که تحقیقات بسیار اندکی انجام شده بود. مثلاً در مورد آیزوکلینیس فقط یک تعریف در سال ۲۰۱۴ بیان شده بود. اما دنبال کردن

<sup>۳۰</sup> generalized Jacobi identity

<sup>۳۱</sup> Simple

<sup>۳۲</sup> Closed Closure

<sup>۳۳</sup> Characteristic

<sup>۳۴</sup> Solvable

<sup>۳۵</sup> Bai

این موضوع به روش مانیهان نیازمند مفاهیم دیگری بود که باید تعریف می شدند. همچنین در مورد ضربگر وضع بدتر از این هم بود. فرمول هایی که ما به دنبال پیدا کردن آن ها بودیم به شکل ترکیبیات ظاهر می شدند و یافتن آن ها در برخی موارد بسیار وقت گیر بودند. در پاره ای از موارد تحقیقات ما انجام نشد. به هر حال تحقیقات ما در این کتاب موضوعات متعددی را در زمینه  $n$ -جبرهای لی مطرح کرد. بحث آیزوکلینیسیم و ضربگر و دسته بندی  $n$ -جبرهای لی موضوعات قابل توجهی بودند که ما در این کتاب مطرح کردیم.

این کتاب را می توان به دو قسمت کلی طبقه بندی نمود: در فصول اول تا یازدهم به معرفی و دسته بندی جبرهای لی و از فصل دوازدهم تا انتها به بحث  $n$ -جبرهای لی پرداخته شده است.

www.ketab.ir

## مقدمه

یکی از قضیه‌های قدیمی و معروف در جبر قضیه شور می‌باشد، او در سال ۱۹۰۴ در [۱۲۸] ثابت کرد که اگر  $G$  گروهی باشد که خارج قسمت مرکزی آن متناهی باشد، آن گاه زیر گروه مشتق آن متناهی است. بعدها [۷] در سال ۱۹۳۸ قضیه شور را تعمیم داد و ثابت کرد که اگر  $[G : Z_i(G)]$  متناهی باشد، آن گاه مرتبه  $\gamma_{i+1}(G)$  نیز متناهی است. در سال ۱۹۹۴ هگارتی<sup>۲۷</sup> در [۵۵] قضیه شور را به صورت دیگری تعمیم داد، او ثابت کرد که اگر  $G$  گروهی باشد که مرتبه  $\frac{G}{L(G)}$  متناهی باشد آن گاه مرتبه  $K(G)$  متناهی است که در آن،

$$K(G) = \langle [x, \alpha] : x \in G, \alpha \in \text{Aut}(G), [x, \alpha] = x^{-1}\alpha(x) \rangle$$

$$L(G) = \{x \in G : x^{-1}\alpha(x) = 1, \forall \alpha \in \text{Aut}(G)\}$$

که  $L(G)$  مرکز مطلق گروه و  $K(G)$  زیر گروه خود جابجاگر کر، نام دارد، می‌توان نشان داد که  $L(G) \leq Z(G)$  و  $G' \leq K(G)$ . در ادامه پژوهشگران به یافتن کران برای زیر گروه مشتق بر حسب مرتبه خارج قسمت مرکزی گروه بوده‌اند، به عنوان نمونه بهترین کران در سال ۱۹۶۵ توسط وایگلد<sup>۲۸</sup> [۱۵۲] به دست آمد، وی ثابت کرد اگر  $[G : Z(G)] = n$  آن گاه  $|G'| \leq n^{\frac{1}{2} \log^2 n}$ . عکس قضیه شور در حالت کلی درست نیست، به عنوان مثال عکس قضیه شور برای  $p$ -گروه

<sup>۲۷</sup>R. Baer

<sup>۲۷</sup>P.V. Hegarty

<sup>۲۸</sup>J. Wiegold

های بسیار ویژه<sup>۳۹</sup> نامتناهی برقرار نیست.

اولین بررسی ها درباره عکس قضیه شور در حدود دهه ۶۰ میلادی انجام شد. در سال ۱۹۵۶ فلیپ هال<sup>۴۰</sup> ثابت کرد اگر  $\gamma_{i+1}(G)$  متناهی باشد، آن گاه  $\frac{G}{Z_{\gamma_i}(G)}$  متناهی است و همچنین نشان داد اگر مرتبه  $G'$  متناهی باشد، آن گاه کران بالایی برای اندیس دومین مرکز گروه  $G$  بر حسب مرتبه  $G'$  وجود دارد که می توان آن را در [۱۱۴] مشاهده کرد.

اما اولین کران صریح برای اندیس دومین مرکز گروه در سال ۱۹۶۱ توسط ماکدونالد<sup>۴۱</sup> [۸۱] ارائه شد. در ادامه هوشگران با قرار دادن شرایطی روی گروه  $G$ ، عکس قضیه شور را بررسی و ثابت کردند که این نتایج تقریباً از دهه ۹۰ شروع شد، از جمله می توان به کارهای هاینکن<sup>۴۲</sup> [۵۶]، نیکلوا<sup>۴۳</sup> و هاینکن [۵۷]، هیلتون<sup>۴۴</sup> [۵۳]، آیزاکس<sup>۴۵</sup> [۶۵]، پودسکی<sup>۴۶</sup> و زگدی<sup>۴۷</sup> [۱۰۸]، نیرومند<sup>۴۸</sup> [۱۰۳]، ساری<sup>۴۹</sup> [۱۴۰] و یاداو<sup>۵۰</sup> [۱۵۴] اشاره کرد.

واژه جبر لی به افتخار لی ریاضیدان وژی می باشد، تخصص اصلی او معادلات با مشتقات جزئی بوده است. رساله دکتری او تبدیلان خطی هندسی با عنوان تبدیلات تماسی<sup>۵۲</sup> بوده است. وی از روش تبدیلات تماسی بر روی روش<sup>۵۱</sup> برای به دست آوردن جواب های دیگر یک

<sup>۳۹</sup>Extera Special Groups

<sup>۴۰</sup>P. Hall

<sup>۴۱</sup>I.D. Macdonald

<sup>۴۲</sup>H. Heineken

<sup>۴۳</sup>D. Nikolova

<sup>۴۴</sup>P. Hilton

<sup>۴۵</sup>I.M. Isaacs

<sup>۴۶</sup>K. Podoski

<sup>۴۷</sup>B. Szegedy

<sup>۴۸</sup>P. Niroomand

<sup>۴۹</sup>B. Sury

<sup>۵۰</sup>M. Yadav

<sup>۵۱</sup>Lie

<sup>۵۲</sup>Contact transformation

معادله دیفرانسیل از روی یک جواب موجود، به ساختاری از مجموعه تبدیلات خطی دست یافته که آن را گروه تبدیلات بی نهایت کوچک نامید این ساختار در واقع گروه نبود و بعدها جبر لی نامیده شد.

این سیر تاریخی در جبر لی به سال ۱۹۹۴ بر می گردد، مانیهان [۹۸]<sup>۳</sup> ثابت کرد اگر  $L$  یک جبر لی باشد، به طوری که  $\dim \frac{L}{Z(L)} = n$  آن گاه  $\dim L^2 \leq \frac{1}{2}n(n-1)$  و جبر لی هایزبرگ  $H(1)$  نشان می دهد که این کران مناسب است. در جبر لی نیز عکس قضیه شور برقرار نیست، به عنوان مثال جبر لی هایزبرگ از بعد نامتناهی در عکس قضیه شور صادق نیست.

اولین تعمیم قضیه شور در جبر لی مشابه کار هگارتی که در بالا بیان شد، در سال ۱۹۹۹ توسط استیترزینگر<sup>۴</sup> و ترنر<sup>۵</sup> [۱۳۸] انجام شد و نتایج آن ها در سال ۲۰۱۳ توسط سعیدی<sup>۶</sup> [۱۱۷] در حالت کلی برای  $p$ -گروه ها انجام شده است.

در فصل دوم این رساله تحقیقات دیگری درباره عکس قضیه شور در جبر لی با قرار دادن شرایطی روی جبر لی  $L$  انجام شده است که می توان آن ها را در [۳] مشاهده کرد.

یکی دیگر از موضوعات مهم در نظریه گره ها و جبر لی، دسته بندی آن ها است. بدون شک یکی از مهمترین قضایای ریاضیات، قضایای مربوط به دسته بندی است، این قضایا به طور ساده چنین بیان می دارند که موجودات ریاضی، با خواص خاصی، باید شکل مشخصی داشته باشند. در نظریه گره ها و جبر لی به ترتیب دسته بندی  $p$ -گروه های متناهی و جبرهای لی پوچ توان در حالت کلی و خاص از اهمیت زیادی برخوردار بوده است. به عنوان نمونه درباره دسته بندی  $p$ -گروه های متناهی در حالت های کلی و خاص می توان به [۶، ۲۶، ۲۸، ۲۷، ۳۰، ۵۹، ۳۴، ۳۵] مراجعه نمود.

یک حالت ویژه برای دسته بندی  $p$ -گروه های متناهی، به وسیله ضربگر شور<sup>۷</sup> گروه ها است. در سال ۱۹۰۴، هنگامی که شور، روی نظریه نمایش تصویری گروه ها کار می کرد، مفهوم جدیدی را معرفی کرد که بعدها ضربگر شور نامیده شد. او با مطالعه بیشتر این مفهوم، توانست خواص

<sup>۳</sup>K. Moneyhun

<sup>۴</sup>E. Stitzinger

<sup>۵</sup>R.M. Turner

<sup>۶</sup>F. Saeedi

جالبی از آن را در [۱۲۸] به اثبات برسانند. سالها بعد رابطه این مفهوم، با دیگر نظریه های جبری مانند همولوژی<sup>۵۷</sup>، کوهمولوژی<sup>۵۸</sup> و نمایش آزاد گروه ها مشخص شد. ضربگر شور گروه ها، علاوه بر دسته بندی  $p$ -گروه های متناهی، کاربردهای دیگری نیز دارد، از جمله در نظریه جبری اعداد و همچنین با استفاده از این مفهوم می توان مثالهایی از گروه های نامتناهی با تولید متناهی ارائه داد که دارای زیرگروه هایی هستند که متناهی مولد نیستند. تعاریف، مفاهیم اولیه و دسته وسیعی از مقالات مهم در زمینه ضربگر شور گروه ها را می توان در مرجع [۴۳] مشاهده نمود.

فرض کنید  $G$  یک گروه باشد، در این صورت ضربگر شور گروه  $G$  را با نماد  $M(G)$  نمایش می دهیم، اگر  $1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$ ، یک نمایش آزاد برای گروه  $G$  باشد آن گاه

$$M(G) = \frac{F^2 \cap R}{[F, R]}$$

همان طور که بالا بیان شد، ضربگر شور یک گروه می تواند وسیله مناسبی برای دسته بندی  $p$ -گروه های متناهی در حالت ویژه باشد. اولین بار در سال ۱۹۵۶ گرین<sup>۵۹</sup> در [۴۷]، ثابت کرد که اگر  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی باشد، آنگاه  $|G| = p^n$ ، آن گاه

$$|M(G)| = p^{\frac{1}{2}n(n-1)-t(G)},$$

به ازای یک عدد صحیح نامنفی  $t(G)$  در سال ۱۹۹۰ برکوویچ<sup>۶۰</sup> [۱۸]، ثابت کرد که  $t(G) = 0$  اگر و تنها اگر  $G$  یک  $p$ -گروه آبلی مقدماتی باشد، همچنین تمام  $p$ -گروه های متناهی را به ازای  $t(G) = 1$  دسته بندی کرد.

در سال ۱۹۹۴ زوو<sup>۶۱</sup> [۱۵۹] این دسته بندی را به ازای  $t(G) = 2$  انجام داد، اما الیس<sup>۶۲</sup> [۳۸] در سال ۱۹۹۵، از راه ساده تری به ازای  $1, 2, 0$   $t(G)$  دسته بندی را انجام داد و همچنین به ازای  $t(G) = 3$  دسته بندی کرد.

<sup>۵۷</sup>Homology

<sup>۵۸</sup>Cohomology

<sup>۵۹</sup>J. A. Green

<sup>۶۰</sup>Ya. G. Berkovich

<sup>۶۱</sup>X. Zhou

<sup>۶۲</sup>G. Ellis

در ادامه این تحقیقات در سال ۲۰۰۹ رجب زاده مقدم<sup>۶۳</sup> و سعیدی [۷۵] و نیرومند [۱۰۶] مستقل از هم به ازای  $t(G) = 4$  دسته بندی  $p$ -گروه‌های متناهی را انجام دادند. همچنین نیرومند در [۱۰۲] به ازای  $t(G) = 5$  این دسته‌بندی را انجام داد.

در سال ۱۹۹۸ ایلس [۳۷] مفهوم یک جفت از گروه‌ها مانند  $(N, G)$  که  $N$  زیرگروه نرمال  $G$  است و ضربگر شور جفت از گروه‌ها را معرفی کرد و با نماد  $\mathcal{M}(N, G)$  نمایش داد. این کشف نقطه شروع برای تعمیم تحقیقات برکوویچ، زوو، رجب زاده مقدم، سعیدی، نیرومند و دیگران بود.

فرض کنید  $1 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow R \rightarrow 1$ ، یک نمایش آزاد برای گروه  $G$  باشد در این صورت با شرط داشتن اکمل برای  $N$  در  $G$ ، ثابت می‌شود که  $\mathcal{M}(N, G) \cong \frac{R \cap [S, F]}{[F, R]}$  که در آن  $G \cong \frac{F}{R}$  و  $N \cong \frac{S}{R}$  و در حالتی که  $N = G$  آن‌گاه  $\mathcal{M}(N, G) = \mathcal{M}(G)$  مشابه نتیجه گرین در [۴۷]، ایلس [۷] ثابت کرد که اگر  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی باشد به‌طوری که دارای زیرگروه نرمال  $N$  از مرتبه  $n$  و تبه گروه خارج قسمتی  $\frac{G}{N}$  برابر با  $p^m$  باشد آن‌گاه به ازای یک عدد صحیح نامنفی  $(N, G)$ ،  $|\mathcal{M}(N, G)| = p^{\frac{1}{2}n(n+2m-1)-t(N, G)}$ . در سال ۲۰۰۷ رجب زاده مقدم، سالمکار و سعیدی در [۹۱] به ازای  $t(N, G) = 0, 1$  و تحت شرایط خاصی جفت  $(N, G)$  را دسته‌بندی کردند، اما در سال ۲۰۱۱ مشایخی<sup>۶۴</sup>، محمدزاده<sup>۶۵</sup> و حکم آبادی<sup>۶۶</sup> در [۶۳] به ازای  $t(N, G) = 0, 1$  بدون هیچ شرطی دسته‌بندی را انجام دادند و همچنین به ازای  $t(N, G) = 2, 3$  و با شرط این که زیرگروه  $K$  ممکن  $N$  در  $G$  می‌باشد، زیرگروه نرمال  $G$  است، دسته‌بندی را انجام دادند. در ادامه آن‌ها در [۶۴] به ازای  $t(N, G) = 4, 5$  و با شرط نرمال بودن  $K$  در  $G$ ، جفت  $(N, G)$  را دسته‌بندی کرده‌اند.

از طرف دیگر معرفی جفت گروه‌ها و ضربگر شور آن توسط ایلس، موجب تعمیم برخی از مقالات از جمله مقالات جونز<sup>۶۷</sup> [۷۰، ۶۹، ۶۸] که در سالهای ۱۹۷۴-۱۹۷۲، انجام داد بود شد، در

<sup>۶۳</sup>M. R. R. Moghaddam

<sup>۶۴</sup>B. Mashayekhi

<sup>۶۵</sup>F. Mohammadzadeh

<sup>۶۶</sup>A. Hokmabadi

<sup>۶۷</sup>M. R. Jones

سال ۲۰۰۷ رجب زاده مقدم، سالمکار و چیتی<sup>۳۸</sup> [۳۱]، با استفاده از ضربگر شور جفت گروه‌ها، نتایج مقالات جونز را تعمیم دادند.

این سیر تاریخی در جبر لی به طور مشابه ادامه پیدا کرد، در جبر لی نیز دسته‌بندی جبرهای لی پوچ توان در حالت کلی و خاص، مورد توجه بوده است، جبرهای لی از بعد ۱، ۲ و ۳ در [۳۹] و جبرهای لی از بعد ۴ در [۲۳] در حالت کلی دسته‌بندی شده‌اند. اولین تحقیقات مهم درباره جبرهای لی پوچ توان در سال ۱۸۹۱ توسط اوملف<sup>۴۰</sup> در [۱۴۹] انجام شد، اما رساله دکترای او، اطلاعات چندانی درباره ساختار جبرهای لی پوچ توان به دست نمی‌دهد و فقط نتایج کلاسیک مانند قضیه انگل<sup>۴۱</sup> را مورد بررسی قرار می‌دهد.

در سال ۱۹۵۸ جبرهای لی پوچ توان از بعد  $n \leq 5$  توسط دیکسمر<sup>۴۲</sup> در [۳۶] دسته‌بندی شده‌اند. در سال ۱۹۵۸ مرزو<sup>۴۳</sup> در [۱۹]، تمام جبرهای لی پوچ توان از بعد ۶ را روی میدان با مشخصه صفر دسته‌بندی کرد، همچنین در سال ۱۹۸۹ آنکوچا<sup>۴۴</sup> و قوزه<sup>۴۵</sup> در [۱] جبرهای لی پوچ توان از بعد ۷ را دسته‌بندی کردند.

این تحقیقات برای جبرهای لی پوچ توان از بعد ۸ در حالت‌های ویژه که ایده‌آل‌های خاص مانند مرکز و ایده‌آل‌های ماکزیمال از جبر لی دارند، ابعاد مشخصی هستند، انجام شده‌اند، به عنوان نمونه می‌توان به مراجع [۱۴۷، ۱۴۸] مراجعه نمود. اما در سال ۲۰۱۲ اشنايدر<sup>۴۶</sup> و گراف<sup>۴۷</sup> در [۲۹] جبرهای لی پوچ توان از بعد ۶ را روی میدانی با هر مشخصه دلخواه، دسته‌بندی کردند و نیز دسته‌بندی جبرهای لی پوچ توان از بعد ۷ در [۴۵] روی میدان با مشخصه مخالف دو و میدان اعداد حقیقی، انجام شده است.

<sup>۳۸</sup>K. Chiti

<sup>۳۹</sup>K. Umlauf

<sup>۴۰</sup>Engle

<sup>۴۱</sup>J. Dixmier

<sup>۴۲</sup>V. V. Morozov

<sup>۴۳</sup>J. M. Ancochea

<sup>۴۴</sup>M. Goze

<sup>۴۵</sup>C. Schneider

<sup>۴۶</sup>W. A. de Graaf

مشابه آنچه درباره دسته‌بندی  $p$ -گروه‌های متناهی به وسیله ضربگر شور گروه بیان شد، در جبر لی نیز دسته‌بندی جبرهای لی پوچ توان به وسیله ضربگر شور آن‌ها مورد پژوهش قرار گرفته است. اولین بار در سال ۱۹۹۳ بتن<sup>۷۷</sup> [۱۶] ضربگر شور جبر لی را معرفی کرد. اگر  $L$  یک جبر لی باشد، ضربگر شور آن را با نماد  $\mathcal{M}(L)$  نشان می‌دهیم. مشابه نظریه گروه‌ها مانیهان [۹۸] ثابت کرد که اگر  $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow L \rightarrow 0$  یک نمایش آزاد برای جبر لی  $L$  از بعد متناهی باشد آن‌گاه  $\mathcal{M}(L) \cong \frac{F^2 \cap R}{[F, R]}$  همچنین او مشابه نتیجه گرین در [۴۷] را ثابت کرد، یعنی ثابت کرد که اگر  $L$  جبر لی دلخواه از بعد  $n$  باشد آن‌گاه  $\dim \mathcal{M}(L) = \frac{1}{2}n(n-1) - t(L)$  به ازای یک عدد صحیح نا منفی  $t(L)$  در سال‌های ۱۹۹۶ تا ۲۰۰۵ بتن، مانیهان، استیترینگر و هاردی<sup>۷۸</sup> در [۱۳، ۵۲، ۵۳] به رای  $t = 0, 1, 2, \dots, 8$  جبرهای لی پوچ توان را دسته‌بندی کردند. همچنین بوسکو<sup>۷۹</sup> در [۳۲] به رای  $t = 0, 1, 2, \dots, 16$  این دسته‌بندی را برای جبرهای لی فیلیرم که جبرهای لی پوچ توان از کلاس اکزیمال هستند انجام داد و آتوگبه<sup>۸۰</sup> در [۴] این دسته‌بندی را تا عدد  $t = 21$  انجام داده است.

در سال ۲۰۱۱ سعیدی و سالمکار [۱۱۴] ضربگر شور جفت  $(N, L)$  از جبرهای لی را که  $N$  ایده‌آل  $L$  است را معرفی کردند و مشابه کران بالایی که الیس برای مرتبه ضربگر شور جفت گروه‌ها در [۳۷] انجام داد را به دست آوردند. حقیقت آن‌ها کران مانیهان [۹۸] برای بعد ضربگر شور جبر لی را با قرار دادن شرط مکمل برای  $N$  در  $L$  تعمیم دادند. فرض کنید  $(N, L)$  یک جفت جبرهای لی با بعد متناهی باشد که  $N$  ایده‌آل  $L$  است.  $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow L \rightarrow 0$  یک نمایش آزاد برای  $L$  باشد، در این صورت ثابت می‌شود ضربگر شور جفت  $(N, L)$  که آن را با نماد  $\mathcal{M}(N, L)$  نشان می‌دهیم، با فرض داشتن مکمل برای  $N$  در  $L$  یکجمله است با  $\frac{R \cap [S, F]}{[F, R]}$  که برای هر  $N$ ،  $L \cong \frac{F}{R}$  و  $N \cong \frac{S}{R}$  در حالتی که  $N = L$  داریم  $\mathcal{M}(N, L) = \mathcal{M}(L)$  سعیدی و سالمکار در [۱۱۶] ثابت کردند که اگر  $(N, L)$  یک جفت از جبرهای لی با بعد متناهی و پوچ توان و زیر جبر  $K$  از  $L$ ، مکمل  $N$  در  $L$  باشد، به‌طوری که  $\dim K = m$  و  $\dim N = n$

<sup>۷۷</sup>P. Batten<sup>۷۸</sup>P. Hardy<sup>۷۹</sup>L. Bosko<sup>۸۰</sup>C. E. Attiogbe

آن‌گاه  $(n, L)$  در نتیجه به ازای یک عدد صحیح نامنفی  $t(N, L) \leq \frac{1}{2}n(n+2m-1)$  داریم  $\dim \mathcal{M}(N, L) = \frac{1}{2}n(n+2m-1) - t(N, L)$  بنابراین این کران موجب تعمیم نتایج مانیهان، استیتزینگر، بتن و هاردی [۱۳، ۵۲، ۵۳] و نتایج بوسکو [۲۲] و آتوگه [۴] شد، که در [۲] انجام شده است.

www.ketab.ir