

آنالیز ریاضی

تألیف

دکتر اسماعیل انصاری

دانشیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان

انتشارات دانشگاه گیلان

۱۳۹۰

سرشناسه	: انصاری، اسماعیل، ۱۳۴۰
عنوان و نام پدیدآور	: آنالیز ریاضی / اسماعیل انصاری،
مشخصات نشر	: رشت: دانشگاه گیلان، ۱۳۹۰
مشخصات ظاهری	: ج :
شابک	: ۹۷۸-۹۶۴-۹۹۳۱-۷۶-۰
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
موضوع	: آنالیز ریاضی - - راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: آنالیز ریاضی - - مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
شناسه افزوده	: دانشگاه گیلان
رده بندی کنگره	: ۹۱۳۹۰ آلف / QAr۰۰
رده بندی دبی	: ۵۱۵
شماره کتابشناسی ملی	: ۲۴۷۵۵۶۰



شابک: ۰ - ۷۶ - ۹۹۳۱ - ۹۶۴ - ۹۷۸

انتشارات دانشگاه گیلان

نام کتاب	: آنالیز ریاضی
مؤلف	: دکتر اسماعیل انصاری
ویراستار جامع	: دکتر داود احمدی دستجردی
طرح روی جلد	: زهرا فره‌وشی
نوبت چاپ	: اول، ۱۳۹۰
چاپ متن	: انتشارات دانشگاه گیلان
ناشر	: انتشارات دانشگاه گیلان
شمار	: ۱۰۰۰ جلد
قیمت	: ۵۰۰۰۰ ریال

* هر گونه چاپ و تکثیر فقط در اختیار انتشارات دانشگاه گیلان است.*

فهرست مندرجات

۵		مقدمه	۱.۰
۷		تعریف ها و تفصیلهای مقدماتی دستگاه اعداد حقیقی	۱
۷		مقدمه	۱.۱
۸		مجموعه های کراندار	۲.۱
۸		اصل موضوع تمامیت	۳.۱
۱۰		مجموعه اعداد طبیعی	۴.۱
۱۳		خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی	۵.۱
۱۴		مجموعه اعداد صحیح	۶.۱
۱۴		مجموعه اعداد گویا	۷.۱
۱۵		فراوانی اعداد اصم	۸.۱
۱۸		توان حقیقی اعداد مثبت	۹.۱
۲۰		دستگاه گسترش یافته اعداد حقیقی	۱۰.۱

۱۱.۱	تعمیم مفهوم سوپریمم و اینفیمم به $\mathbb{R}^*$	۲۱
۱۲.۱	بازه های اعداد حقیقی	۲۱
۱۳.۱	چند نامساوی مهم و ساده	۲۳
۱۴.۱	میدان اعداد مختلط	۲۴
۱۵.۱	ترتیب ناپذیری اعداد مختلط	۲۷
۱۶.۱	تمرین های فصل اول	۲۸
۲	دنباله ها و سری های نامتناهی	۲۹
۱.۲	معرفی دنباله ها	۲۹
۲.۲	معرفی چند خاصیت در مورد دنباله ها	۳۰
۳.۲	رفتار دنباله ها	۳۱
۴.۲	چگونه همگرایی یا واگرایی دنباله را مشخص کنیم؟	۳۳
۵.۲	چگونگی همگرایی دنباله های یکنوا	۳۴
۶.۲	زیر دنباله ها	۳۶
۷.۲	حدود بالایی و پایینی دنباله های حقیقی	۳۷
۸.۲	رابطه همگرایی یک دنباله و شرط کشی	۴۰
۹.۲	همگرایی چند دنباله مهم	۴۳
۱۰.۲	معرفی سری ها	۴۶
۱۱.۲	چند آزمون برای مطالعه رفتار سری ها	۵۲

۵۵	۱۲.۲ جمع و ضرب سری ها
۵۷	۱۳.۲ خاصیت شگفت انگیز سری های اعداد
۶۲	۱۴.۲ تمرین های فصل دوم

۳ فضاهای اقلیدسی ۶۵

۶۵	۱.۳ مبانی توپولوژیکی $\mathbb{R}^k$
۷۴	۲.۳ دو خاصیت ویژه زیرمجموعه های اعداد حقیقی
۷۶	۳.۳ تعمیم مفاهیم مربوط به دنباله ها به فضاهای $\mathbb{R}^k$
۷۷	۴.۳ زیرمجموعه های فشرده $\mathbb{R}^m$
۸۵	۵.۳ خاصیت اشتراک متناهی مجموعه های فشرده
۸۷	۶.۳ تمرین های فصل سوم

۴ فضاهای مترى ۸۹

۸۹	۱.۴ مقدمه
۹۱	۲.۴ خواص فضاهای مترى
۹۱	۳.۴ تعمیم تعاریفی از فضاهای اقلیدسی برای فضاهای مترى
۹۷	۴.۴ فضاهای مترى تام
۹۹	۵.۴ مجموعه های همبند فضاهای مترى
۱۰۳	۶.۴ تمرین های فصل چهارم

۵ پیوستگی ۱۰۵

۱۰۵	مفاهیم مقدماتی	۱.۵
۱۰۶	حد و پیوستگی توابع بر فضاهاى مترى	۲.۵
۱۰۹	پیوستگی	۳.۵
۱۱۵	همیومورفیسم ها	۴.۵
۱۱۷	اتمام فضاهاى مترى	۵.۵
۱۱۸	پیوستگی یکشکل	۶.۵
۱۲۰	پیوستگی توابع با متغیر حقیقی و توابع حقیقی	۷.۵
۱۲۵	پیوستگی توابع یکپارچه	۸.۵
۱۲۸	حدود بالایی و پایینی توابع حقیقی با متغیر حقیقی	۹.۵
۱۳۰	توسیع توابع پیوسته یکشکل	۱۰.۵
۱۳۲	تمرین های فصل پنجم	۱۱.۵
۱۳۵	مشتق توابع	۶
۱۳۵	تعریف مشتق و خواص مقدماتی آن	۱.۶
۱۳۹	نقاط اکستریم توابع مشتق	۲.۶
۱۴۳	خاصیت میانی مشتق ها	۳.۶
۱۴۵	مشتق مراتب بالاتر	۴.۶
۱۴۷	قاعده هوییتال	۵.۶
۱۵۰	تمرین های فصل ششم	۶.۶

۱.۰ مقدمه

اولین سؤالی که نویسنده یک کتاب علمی در این سطح، باید به آن پاسخ دهد این است که با وجود کتابهای معتبر خارجی ترجمه شده به زبان فارسی، هدف مؤلف از تألیف چنین کتابی چیست؟ واقعیت این است که کتابهای ترجمه شده با همه تلاش و هنری که مترجمین محترم در کار خود به کار می‌برند، به خاطر التزام مترجم در وفاداری به متن اصلی، بوی ترجمه می‌دهند. برای اینجانب، بارها اتفاق افتاده است که برای درک مفهومی به ترجمه کتابی مراجعه نمودم ولی همان مفهوم را در مراجعه به متن اصلی بهتر درک کرده‌ام. این کار احتمالاً برای همکاران محترم و دانشجویان عزیز نیز اتفاق افتاده است. بنابراین لزوم تألیف کتاب در این سطح به صورتی که بتوان با دانشجویان زبان خودش صحبت کرد احساس می‌شود. بدیهی است این به معنی بی‌نیازی به کتابهای ترجمه شده نیست، به ویژه آشنایی با روش‌های متفاوت نویسندگان در ورود به مطلب، کار ضروری و پسندیده است.

از طرفی بر صاحب‌نظران پوشیده نیست که نوشتن کتابی در این سطح نمی‌تواند اثر کاملاً جدیدی باشد، اما در هر صورت برای تألیف یک اثر انگیزه لازم است. اینجانب در طول سالهای طولانی تدریس در دانشگاه‌های کشور که تقریباً در اکثریت قریب به اتفاق ترم‌های آن آنالیز ریاضی را از روی کتابهای معتبر این شاخه تدریس نموده‌ام، به این نتیجه دست یافته‌ام که اگر بتوان بین فصل‌های مختلف کتاب ارتباط ایجاد نمود و چگونگی تحول یک تعریف به تعریف جدید یا یک قضیه به قضیه جدید را حداقل با برداشت خود تشریح نمود، جذابیت جالبی برای خواننده ایجاد می‌شود، خصوصاً جرأت تحقیق و تبیین احیاناً تعریف‌های منطقی جدید را در دانشجویان عزیز ایجاد و تقویت می‌کند. مثلاً وقتی بین همگرایی یک دنباله و تولد شرط کشی و بین شرط کشی برای دنباله‌ها و شرط ریمان برای وجود انتگرالها به توان شباهت‌هایی پیدا کرد و به آنها اشاره نمود، تعریف‌ها و قضیه‌های ریاضی حالت خلق‌الساعه بودن و اینکه از ماساخته نیست را پیدا نمی‌کند. دانشجویان عزیز باید توجه داشته باشند که هیچ‌کدام از تعریف‌ها و قضیه‌ها دفعتاً ایجاد نشده‌اند بلکه هر کدام در نتیجه بررسی کارهای انجام شده و دقت در روابط مابین آنها و به مرور به وجود آمده‌اند.

از دیگر مشخصه‌های این کتاب، که در کتاب‌های مشابه کمتر دیده می‌شود در خواست از دانشجو جهت ساختن مثال و خصوصاً مثال‌های نقض است. چون تا دانشجو به مفهوم قضیه مسلط نباشد نمی‌تواند مثال، آن هم مثالی ساده ارائه کند. این کار به دانشجویان جهت بهتر فهمیدن مفاهیم کمک می‌کند. در ابتدا قصد بر این بود که کتابی جهت تدریس آنالیز ریاضی ۱ و ۲، به گونه‌ای که سرفصل‌های مورد نظر شورای عالی برنامه‌ریزی را پوشش دهد، تدوین شود اما چون دانشجویان برخی از رشته‌ها مانند آمار در دوره تحصیل فقط آنالیز ریاضی ۱ را می‌گذرانند، و همچنین برای جلوگیری از حجیم شدن کتاب، در ابتدا مفاهیم مربوط به آنالیز ریاضی ۱ تحت عنوان آنالیز ریاضی جلد اول تنظیم و در ادامه جلد دوم، جهت پوشش آنالیز

ریاضی ۲ ارائه می‌گردد.

در فصل اول تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی و در عین حال بنیادی دستگاه اعداد حقیقی به اجمال بررسی شده‌اند و در پایان فصل نگاهی گذرا نیز به دستگاه اعداد مختلط داشته ایم.

در فصل دوم در مورد دنباله‌ها و سری‌های اعداد حقیقی و رفتار آنها بحث شده است که

بعضی از مفاهیم عیناً برای دنباله‌ها و سری‌های اعداد مختلط نیز برقرارند.

در فصل سوم فضاهاى اقلیدسى $\mathbb{R}^n$ به عنوان اولین تعمیم از دستگاه اعداد حقیقی معرفی و مورد مطالعه قرار می‌گیرند. شایسته است دانشجویان عزیز درس جبر خطی را هم زمان با این

درس داشته باشند تا در فهم این فصل راحت‌تر باشند.

در فصل چهارم فضاهاى مترى معرفی می‌شوند. فضاهاى مترى که در واقع، از یک نگاه،

اولین تعمیم مجرد دستگاه اعداد حقیقی هستند تقریباً تمام مفاهیم فضای اقلیدسى $\mathbb{R}^n$ را به فضاهاى مجرد مورد بررسی قرار می‌دهند.

در فصل پنجم، مفاهیم بنیادی آنالیز ریاضی یعنی حد و پیوستگی توابع بر فضاهاى مترى به طور نسبتاً مبسوط مطالعه می‌شوند.

در فصل ششم، که فصل پایانی است، در مورد مشتق توابع که مفهوم بنیادی دیگری است بحث می‌شود. در دو فصل اخیر، مفاهیمی را که دانشجویان در دروس ریاضی عمومی گذرا آنها را مطالعه کرده‌اند به صورت کیفی مورد باز خوانی قرار می‌دهیم.

در پایان هر استدلال نظیر آنچه در کتاب‌های ریاضی مرسوم است علامت $\square$ گذاشته شده است تا از تکرار جمله‌های مشابه جلوگیری شود.

در هر صورت این اثر خدمتی ناچیز است که امیدوارم مقبول درگاه حضرت حق واقع و کمکی

برای جوانان دانشجویان باشد. در خاتمه لازم می‌دانم از دانشجویان عزیزی که کراراً تألیف چنین کتابی را خواسته و مشوق اینجانب در تدوین اثر شده‌اند قدر دانی نمایم. همچنین لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر داود احمدی که ویرایش این کتاب را پذیرفتند و از سرکار خانم سولماز نوری که زحمت تایپ و آرایش کتاب را، با استفاده از نرم افزار FarsiTeX که متون ریاضی را زیباتر جلوه می‌دهد، علیرغم همه سختی‌ها با محبت پذیرا شدند و از سرکار خانم مینو خوش اقبال که بازخوانی نسخه تایپ شده اولیه را با حوصله و دقت زیاد انجام داده‌اند، همچنین از انتشارات دانشگاه گیلان و حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه که مجدانه پیگیر انتشار این اثر بوده‌اند صمیمانه تشکر و قدر دانی نمایم.

اسماعیل انصاری

دانشیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان