

هندسة اعداد مختلط

هانس شور تفه گر

ترجمة محمد بهفروزی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



Geometry of Complex Numbers

Hans Schwerdtfeger

Dover Publications, Inc. 1979

هندسه اعداد مختلط
تألیف هانس شورته‌گر
ترجمه محمد بهفروزی
ویراسته دکتر محمدهادی شفیعیا
طراح جلد: آزاده اصغری‌نسب
نمونه‌خوان: فاطمه پیوندی
حروفچین: صدیقه مسعودی
ناظر چاپ: جواد خسروی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۸۴
تعداد ۱۰۰۰

لیتوگرافی: مردمک

چاپ و صحافی: معراج

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Schwerdtfeger, Hans

شورته‌گر، هانس

هندسه اعداد مختلط / تألیف هانس شورته‌گر؛ ترجمه محمد بهفروزی؛ ویراسته
محمدهادی شفیعیا. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۴.

هشت، ۲۶۲ ص. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۱۸۸، ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۱۴۲)

ISBN: 964-01-1188-0

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیبا.

Geometry of complex numbers: Circle geometry, عنوان اصلی:

Moebius transformation non euclidean geometry, 1979.

واژه‌نامه.

کتابنامه: ص. ۲۴۶-۲۵۳.

نمایه.

۱. اعداد مختلط. ۲. هندسه. ۳. توابع متغیر مختلط. ۴. توابع تحلیلی. الف. بهفروزی،

محمد، ۱۳۱۱ - مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی، ج. عنوان.

۵۱۶

۹۸۲۵۵/۹۸۹

۱۳۸۴

۸۴-۲۴۱۴

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار چاپ اول
۳	مقدمه
۹	۱. هندسه تحلیلی دایره‌ها
۹	۱.۱. نمایش دایره‌ها با ماتریسهای ارمیتی
۹	الف. یک دایره
۱۲	ب. دو دایره
۱۵	ج. دسته دایره
۱۷	مثالها
۱۹	۲. انعکاس
۱۹	الف. تعریف
۲۳	ب. ویژگیهای ساده انعکاس
۲۶	مثالها
۳۰	۳. تصویر گنجگاشتی
۳۰	الف. تعریف

۳۴	ب. ویژگیهای ساده تصویر گنجنگاشتی
۳۷	ج. تصویر گنجنگاشتی و ویژگی قطب و قطبی
۳۹	مثالها
۴۱	۴. دسته و کلاف دایره
۴۱	الف. دسته دایره
۴۳	ب. کلاف دایره
۴۵	مثالها
۴۶	۵. نسبت ناهمساز
۴۶	الف. نسبت ساده
۴۸	ب. نسبت مضاعف یا نسبت ناهمساز
۵۰	ج. نسبت ناهمساز در هندسه دایره
۵۲	مثالها
۵۶	۲ تبدیل مویوس
۵۶	۶. تعریف: خواص مقدماتی
۵۶	الف. تعریف و نمادگذاری
۵۸	ب. گروه همه تبدیلهای مویوس
۵۹	ج. انواع ساده تبدیلهای مویوس
۶۲	د. ویژگیهای نگاشت تبدیل مویوس
۶۵	ه. تبدیل یک دایره
۶۶	و. برگشت
۶۸	مثالها
۷۰	۷. روابط تصویری یک بعدی حقیقی
۷۰	الف. تصویرهای منظری (یا تصویرهای مرکزی)
۷۳	ب. روابط تصویری
۷۷	ج. تصویر منظری خط-دایره
۷۸	مثالها
۸۱	۸. مشابهت و رده بندی تبدیلهای مویوس
۸۱	الف. وارد کردن متغیری جدید

۸۳	ب. صورتهای نرمال تبدیلهای موبیوس
۸۷	ج. تبدیلهای هذلولوی، بیضوی، و ثابت زاویه‌ای
۹۱	د. زیرگروه تبدیلهای حقیقی موبیوس
۹۳	ه. متوازی‌الاضلاع مشخصه
۹۶	مثالها
۱۰۴	۹. رده‌بندی پادهمنگاریها
۱۰۴	الف. پادهمنگاری
۱۰۵	ب. پادبرگشتها
۱۰۸	ج. صورتهای نرمال پادهمنگاریهای نابرگشتی
۱۱۱	د. صورتهای نرمال ماتریسهای دوری و پادبرگشتها
۱۱۱	ه. تبدیلهای موبیوس و پادهمنگاریها به صورت حاصلضرب انعکاسها
۱۱۴	و. گروههای یک دسته
۱۱۵	مثالها
۱۱۹	۱۰. بارست یک تبدیل موبیوس
۱۱۹	الف. ملاحظات کلی درباره بارست
۱۲۱	ب. بارست یک تبدیل موبیوس
۱۲۲	ج. دنباله متناوب تبدیلهای موبیوس
۱۲۴	د. تبدیلهای موبیوس با بارست متناوب
۱۲۶	ه. بارست مسلسل
۱۲۷	و. بارست مسلسل یک تبدیل موبیوس
۱۳۲	مثالها
۱۴۱	۱۱. ویژگی هندسی تبدیل موبیوس
۱۴۱	الف. قضیه اساسی
۱۴۵	ب. تبدیلهای تصویری مختلط
۱۴۹	ج. نمایش در فضا
۱۵۴	مثالها
۱۵۸	۳ هندسه‌های نااقلیدسی دوبعدی
۱۵۸	۱۲. زیرگروههای تبدیل موبیوس

۱۵۸	الف. گروه دایره واحد $\mathbb{Z}$
۱۶۱	ب. گروه تبدیلهای دورانی موبیوس $\mathcal{M}$
۱۶۵	ج. صورتهای نرمال کلاف دایره
۱۶۶	د. گروههای کلافی
۱۶۸	ه. تریابی گروههای کلافی
۱۷۰	مثالها
۱۷۹	۱۳. هندسه یک گروه تبدیل
۱۷۹	الف. هندسه اقلیدسی
۱۸۱	ب. هندسه $\mathcal{G}$
۱۸۳	ج. تابع فاصله
۱۸۶	د. دایرههای $\mathcal{G}$ ای
۱۸۷	مثالها
۱۹۰	۱۴. هندسه هذلولوی
۱۹۰	الف. خطهای راست هذلولوی و فاصله
۱۹۲	ب. نابرابری مثلثی
۱۹۵	ج. دایرهها و خمهای هذلولوی
۱۹۶	د. مثلثات هذلولوی
۲۰۱	ه. کاربردها
۲۰۲	مثالها
۲۱۳	۱۵. هندسه کروی و بیضوی
۲۱۳	الف. خطهای راست کروی و فاصله
۲۱۵	ب. جمعپذیری و نابرابر مثلثی
۲۱۷	ج. دایرههای کروی
۲۱۸	د. هندسه بیضوی
۲۲۱	ه. مثلثات کروی
۲۲۵	مثالها

۲۳۱	پیوستها
۲۳۲	پیوست ۱ یکتایی نسبت ناهمساز
۲۳۴	پیوست ۲ قضیه‌ای از ه. هاروکی
۲۳۶	پیوست ۳ کاربردهای چندجمله‌ای مشخصه
۲۴۴	پیوست ۴ اعداد مختلط در هندسه
۲۴۶	کتاب‌شناسی
۲۵۲	کتاب‌شناسی تکمیلی
۲۵۴	واژه‌نامه
۲۵۸	نمایه

پیشگفتار چاپ اول

این کتاب بخشهایی از مجموعه درسهایی از نظریه توابع متغیر مختلط است که مؤلف بارها در طی بیست سال اخیر در چندین دانشگاه در استرالیا و کانادا تدریس کرده است. پاره‌ای از مندرجات آن جزء مطالب استانده این درس نیست. ولی به نظر می‌رسد که برای درک عمیق نظریه هندسی توابع تحلیلی و ارتباط آن با شاخه‌های دیگر هندسه مفید باشد.

دو فصل اول برای دانشجویانی است که اطلاعات کافی از جبر اعداد مختلط و مقدمات هندسه تحلیلی و جبر خطی دارند و به علاوه در جریان مطالعه، در صورت لزوم، از راه مراجعه به یک کتاب مقدماتی جبر جدید گرایشی به فراگیری مفاهیم اساسی نظریه (غیر بینهایت کوچک) گروههای تبدیلیا پیدا می‌کنند.

در فصل سوم، مبانی هندسه ناقلیدسی برای دانشجویانی که قبل از همه علاقه به جبر و آنالیز دارند ارائه شده است. طبیعتاً این فصل بر پایه دو فصل قبلی تدوین یافته، ولی نیازمند گرایش تخصصی‌تری از سوی خواننده است.

به دنبال هر بخش مجموعه‌ای از مثالها آورده شده است. به جای اینکه مطالب درس را سنگین کنیم، این مسائل را طرح کرده‌ایم تا اطلاعات بیشتری را که ممکن نبوده است به آسانی در متن اصلی بگنجانیم، به خواننده منتقل کنیم. برای همکاری و مشارکت خواننده در این مثالها، آوردن برهانهای ساده به عهده وی گذاشته شده و اشارات توضیحی کوتاهی داده شده تا بتواند بخشی از استدلال را به تفصیل تکمیل نماید.

عمده توجه این کتاب به اشتراک هندسه و آنالیز و جبر است که معمولاً در سطح نسبتاً پیشرفته

با نگرشهای خاص به تحقیقات تازه عرضه شده است و همواره به بیان دقیق جزئیات و بسط روش جبری مناسب تأکید دارد.

منظور ما این نبوده که کتابنامه کاملی عرضه کنیم. دو نوع مرجع در اینجا آورده ایم: (۱) کتابها و مقاله‌هایی که در تدوین متن مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این کتابها بر حسب نام مؤلف و عددی در داخل کروشه ثبت شده‌اند. مراجع اصلی در این رده، کتابهای کاراتودوری (Caratheodory) [۳] و ا. کارتان (E. Cartan) [۲]^۱ هستند. (۲) کتابها و مقاله‌هایی هستند که در متن از آنها اقتباسی نشده و شامل مطالبی درباره موضوع مورد بحث هستند که ممکن است برای خواننده جالب باشند.

تعدادی از دوستان و همکارانم در دانشگاه تورنتو در نقد و اصلاح نوشته‌های این کتاب مرا یاری کرده‌اند که بدین وسیله از همه آنها سپاسگزاری می‌نمایم.

در پایان مایلیم مراتب سپاس خود را از پشتیبانی و تشویقی که از من به عنوان عضو تابستانی انستیتو تحقیقات کنگره ریاضی کانادا در کینگستون در ۱۹۵۸، و به طور کلیتر، به عنوان عضو جدید جامعه ریاضی کانادا به عمل آمده شکر کنیم. تشکرات ویژه خود را از هیأت تحریریه سلسله انتشارات ریاضی دانشگاه تورنتو که در نهایت لطف کتاب مرا در عداد سلسله انتشارات خود قرار داده‌اند تقدیم می‌دارم.

هانس شوئنفهگر

آوریل ۱۹۶۰

۱. تنها پس از تکمیل دستنویس کتاب حاضر با تمام جزئیات اساسی‌اش از کتابهای جالب R. Deaux ([۶] یا [۷]) آگاه شدم. روشها و بیشتر موضوعها در هر دو کتاب متفاوت‌اند. هدف هر دو کتاب نمایش محتوای هندسی مفاهیم دستگاه اعداد مختلط است.

مقدمه

نکاتی درباره اصطلاحات و علائم

در اکثر شاخه‌های ریاضی، از جمله مبحثی که در اینجا به آن خواهیم پرداخت، توافقی کلی برای اصطلاحات و قراردادها صورت نگرفته و شاید هم چنین توافقی مطلوب نباشد. ولی مؤلف کوشیده است این‌گونه نمادها و اصطلاحات را به صورتی که مورد توافق اکثر نویسندگان هندسه اعداد مختلط بوده ارائه کند. در عین حال از تأکید بر اصطلاحاتی که تعبیر خاصی را موجب می‌شوند، اجتناب ورزیده است. از این رو است که ما پیوسته از «دواین» سخن به میان می‌آوریم و از اصطلاح «زنجیر» احتراز می‌کنیم.

توضیحات زیر بر اساس هندسه تحلیلی یا به کارگیری مختصات دکارتی x و y نقاط در صفحه آغاز می‌شود. این مختصات اعداد حقیقی دلخواهی هستند. با توجه به منظور ما مناسب این است که نقطه (x, y) را با عدد مختلط $z = x + iy$ ، $i = \sqrt{-1}$ ، نمایش دهیم. $x = \operatorname{Re} z$ را جزء حقیقی و $y = \operatorname{Im} z$ را جزء انگاری z می‌نامیم. همچنین $\bar{z} = x - iy$ را مزدوج z و فقط و فقط زمانی صفر خواهد بود که $z = 0$. جبر مقدماتی اعداد مختلط را دانسته^۱ فرض می‌کنیم.

با استفاده از مختصات قطبی r و θ ، می‌توان عدد مختلط z را به صورت مثلثاتی

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

۱. رک. به فصل II کتاب R. Courant و H. Robbins [۶]، یا فصل III کتاب G. H. Hardy [۷].

نوشت. عبارت $\cos \theta + i \sin \theta$ را «عامل زاویه‌ای» z می‌نامند. این عامل عددی است مختلط با قدر مطلق یک، و آن را معمولاً با $e^{i\theta}$ نمایش می‌دهند. این نماد نمایی با اتحاد

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

توجیه می‌شود، یعنی یک معادله تابعی از تابع نمایی که نتیجه صوری قضایای جمع در مثلثات مقدماتی^۱ است. آگاهی از نظریه توابع متغیر مختلط دانسته فرض نشده است، ولی ما مفاهیم پیوستگی و مشتق‌گیری را که گاه‌گاهی از آنها استفاده می‌کنیم، در اینجا بیان نخواهیم کرد.

گاهی لازم می‌آید به جای عامل زاویه پی عدد مختلط z ، یعنی $e^{i\theta}$ ، خود زاویه θ را به صورت تابعی از z وارد کنیم. در این‌گونه موارد، زاویه θ به صورت

$$\theta = \arg z = \arg e^{i(\theta + 2k\pi)} \quad (k \text{ عدد درست})$$

نمایش داده می‌شود، که به ازای همه اعداد $z \neq 0$ با تقریب مضارب جمعی صحیحی از 2π تعریف می‌شود. این مضرب را به راحتی می‌توان طبق قرارداد از مبدأ عدد z اختیار نمود. اما اغلب دامنه مقادیر $\arg z$ به بازه‌ای به طول 2π محدود می‌شود. مثلاً: $-\pi < \theta \leq \pi$ (مقدار اصلی $\arg z$) و یا $0 \leq \theta < 2\pi$ ؛ تابع $\arg z$ به ترتیب در طول قسمت منفی یا مثبت محور حقیقی (محور x) ناپیوسته خواهد بود. مقدار افزایش در طول این محور بر حسب جهتی که z این محور را قطع می‌کند $\pm 2\pi$ خواهد بود.

اطلاعات اساسی از جبر خطی تا حدی که از مقدار لازم برای درک مطالب حساس مقدمات هندسه تحلیلی^۲، از جمله مختصات همگن، تجاوز نکند (پیوست شماره ۱، ج. خ) مورد نیاز است. از قوانین صوری جبر ماتریسها سخت استفاده خواهیم نمود (بخشهای ۱۲ و ۱۳، ج. خ)، ولی در مراحل اولیه فقط ماتریسهای دو سطری را که عناصر آنها اعداد مختلطاند به کار خواهیم برد. چنین ماتریسهایی را با حروف بزرگ سیاه آلمانی نمایش خواهیم داد. مثلاً

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ولی قبول می‌کنیم که نماد $\mathfrak{F}$ را همزمان هم برای ماتریس و هم برای تبدیل

$$Z = \frac{az + b}{cz + d} = \mathfrak{F}(z) \quad (1)$$

۱. رک. به صفحات ۴۷۷ تا ۹ کتاب Robbins و Courant [۱] یا صفحات ۲۳۲ تا ۳ کتاب Hardy [۱].

۲. رک. به فصول مربوطه در هر کتاب درسی جبر خطی، به ویژه آنکه مؤلفش [۲] است که در ج. خ آمده است.

به کار خواهیم برد و آن را تبدیل مویوس $\mathcal{K}$ می خوانیم. در عین حالی که تبدیل مویوس به طور یکتا با ماتریس $\mathcal{K}$ تعریف می شود، عکس آن درست نیست. وقتی تبدیل مویوس داده شده باشد، ماتریس آن $\mathcal{K}$ ، با اختلاف ضربی از یک عدد مختلط $q \neq 0$ تعیین می شود. از این رو ممکن است ماتریسهای $\mathcal{K}$ و $q\mathcal{K}$ ، هر دو فقط یک تبدیل مویوس را نمایش دهند. ولی، در بسیاری موارد ما ترجیح می دهیم فقط در معادلات دقیق ماتریسی عامل q نامعین بماند.

ترانهاده ماتریس $\mathcal{C}$ را با $\mathcal{C}'$ ، یعنی با $\mathcal{C}' = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ نمایش می دهیم و مزدوج آن را $\bar{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix}$ با $\mathcal{C}$ ، اگر $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}'$ را ارمیتی می گویند. (بخش ۲۰، ج. خ). در بخش ۱ نشان می دهیم که هر ماتریس ارمیتی $\mathcal{C}$ (به تعبیری) معرف یک دایره است، $\lambda \mathcal{C}$ ، λ حقیقی و $\lambda \neq 0$ معرف دایره واحدی هستند. از این رو ما از «دایره $\mathcal{C}$ » صحبت به میان می آوریم. دترمینان یک ماتریس مربع $\mathcal{K}$ را با $|\mathcal{K}|$ نمایش می دهیم. ولی قدرمطلق $|\mathcal{K}|$ را با $|\det \mathcal{K}|$ نمایش می دهیم.

در بحث ما تبدیلهای نقش عمده ای دارند. تبدیل $Z = f(z)$ ، با تابع مختلط مقدار $f(z)$ ، که به هر نقطه z از صفحه اعداد مختلط (یا در یک جزء این صفحه) یک عدد مختلط Z را مربوط می سازد، که به صورت نقطه ای در همان صفحه، یا در صفحه دیگری با یک دستگاه مختصات هم نهشت، ظاهر می شود. همچنین می گویم که این تبدیل نقطه z را به نقطه Z می برد (رک به بخش ۱۰، ج. خ).

در بسیاری موارد، مجموعه ای از تبدیلهای مربوط به یک مبحث هندسی یک گروه تشکیل می دهند. (رک به بخش ۲۲، ج. خ) در آن منظور از ضرب گروهی، ترکیب دو تبدیل از مجموعه مفروض برای تشکیل تابعی از یک تابع است. عنصر واحد در چنین گروهی تبدیل همانی $Z = z$ است که هر نقطه را به خودش بدل می کند. بجز شناختی از مفهوم کلی یک گروه که هنگام کار با گروههای خاص تبدیلهای به دست آمده در این کتاب حاصل می شود، اطلاع بیشتری از نظریه گروهها لازم نخواهد شد.

دستگاههای همه اعداد گویا، همه اعداد حقیقی و یا همه اعداد مختلط به معنی جبری هیأت اند. معنی این گفته این است که در داخل این دستگاهها اعمال مقدماتی حساب — جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، (غیر از تقسیم بر صفر) — را می توان انجام داد، به طوری که مجموع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج قسمت هر دو عدد از یکی از دستگاهها، باز عددی از همان دستگاه است. غیر

از هیأت‌هایی که در بالا عنوان شد، هیأت‌های عددی بسیاری وجود دارند که همه آنها در هیأت اعداد مختلط قرار دارند که خود آنها نیز به صورت یک زیر هیأت اعداد گویا هستند (بخش ۱۴، ج.خ). تنها در یک مورد خواننده باید دریابد که هیأت‌هایی وجود دارند که عناصر آنها عدد نیستند. مثلاً هیأت‌هایی که تعدادی متناهی عنصر دارند (مثال ۱.۱۶، ج.خ). در چنین هیأت‌هایی اعمال مقدماتی طوری تعریف شده‌اند که قوانین حساب یعنی وجود و یکتایی عناصر صفر و واحد، همین‌طور قرینه و عکس و شرکتپذیری و تعویضپذیری و قوانین توزیعی برقرارند.

دو هیأت $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ را یکریخت (بخش ۱۴، ج.خ) گویند، اگر بتوان بین عناصر $a_1, b_1, \dots$ و $a_2, b_2, \dots$ آنها یک تناظر یک-به-یک $a_1 \leftrightarrow a_2, b_1 \leftrightarrow b_2, \dots$ برقرار کرد به طوری که: $a_1 + b_1 \leftrightarrow a_2 + b_2$ و $a_1 b_1 \leftrightarrow a_2 b_2$. عناصر صفر و واحد $\mathcal{H}_1$ به ترتیب با عناصر صفر و واحد $\mathcal{H}_2$ متناظر خواهند بود.

هر یکریختی یک هیأت بر روی خودش (یعنی حالتی که $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ معرف یک هیأت باشند) خودریختی نام دارد. همه خودریختیهای یک هیأت، تشکیل یک گروه می‌دهند. در مورد هیأت همه اعداد گویا و هیأت همه اعداد حقیقی این گروه متشکل از فقط عنصر همانی: $a \leftrightarrow a$ است (مثال ۸.۱۴، ج.خ). در هیأت همه اعداد مختلط، به آسانی دیده می‌شود که تناظر $\bar{z} \leftrightarrow z$ یک خودریختی غیر از خودریختی همانی است.

از مفاهیم اولیه و احکام مسلم توپولوژی استفاده خواهد شد. برای توضیحات و براهین، خواننده را به نوشته‌هایی در این زمینه، بالاخص به کتابهایی که شامل فصول مقدماتی هستند ارجاع می‌دهیم.^۱ برای پاره‌ای از مثالهای فصل ۳، انتگرالهای منحنی الخط و انتگرالهای سطح دانسته فرض شده‌اند. کتابهای مرجع هم معرفی خواهند شد.

سرانجام می‌توان به معدودی از اصطلاحات که مزاحم جلوه می‌کنند اشاره کرد. بیشتر دشواریهای آنها عمدتاً، تا آنجا که مضمونهای مختلف معمولاً با یک واژه مشخصی بیان می‌شوند، زبانی هستند. در هندسه معانی متفاوتی برای هر یک از واژه‌های «حقیقی» و «انگاری» قائل شده‌اند. اعداد حقیقی، اعداد مختلطی هستند که به نقاط محور حقیقی (یا واقع بر محور حقیقی) از صفحه‌ای مختلط، که آن را صفحه گاوس (یا صفحه آرگان) نیز می‌نامند، وابسته‌اند. به همین طریق، اعداد انگاری محض به نقاط حقیقی محور انگاری وابسته‌اند. (نقطه و عدد مختلط وابسته به آن همواره با یک نماد نشان داده می‌شود.) همه نقاط واقع در صفحه (اعداد مختلط) یا صفحه $\mathbb{R}$ ، که

۱. Caratheodory [۳]، جلد I بخش II، Courant و Robbins [۱]، فصل V، Hilbert و Cohn-Vossen [۱]،

هر کدام با یک عدد مختلط مشخص می‌شوند «نقاط حقیقی» هستند. بجز شکلهایی که از نقاط حقیقی تشکیل می‌شوند، باید شکلهایی (فقط به صورت موجودات جبری محض) مانند «دایره‌های انگاری» را که «دایره‌های آرمانی» هم نام دارند (رک Deaux [۱] صفحه ۴۹)، و نقاط (غیرحقیقی) آنها مختصات دکارتی غیرحقیقی دارند، نیز در نظر گرفت. این دایره‌های انگاری فقط به وسیله منعکسهای مربوط به آنها تعبیر هندسی حقیقی پیدا می‌کنند (رک، بخش ۲). «نقاط انگاری» تنها به وجود نخواهند آمد. همین‌طور ملاحظه می‌کنیم که دایره‌های حقیقی نقاط انگاری دارند. یک دایره حقیقی ممکن است فصل مشترک غیرحقیقی (انگاری) با محور حقیقی داشته باشد. از این رو حتی بر محور حقیقی هم نقاط غیرحقیقی وجود دارند.

می‌توانیم چند کلمه‌ای هم درباره استفاده از صفت‌های «هذلولوی»، «سه‌موی»، و «بیضوی» سخن بگوییم. در واقع بدون مراجعه به هندسه‌های ناقلیدسی که استفاده از این صفات در آنها اکنون جنبه تاریخی به خود گرفته است، برای این صفات توجه مختصری وجود دارد. از این رو دسته دایره و کلاف دایره هذلولوی، سه‌موی و بیضوی هم داریم. اما تبدیلهای هذلولوی، سه‌موی و بیضوی، مویوس و انعکاس، و تبدیلهای پادهمنگاری مویوس هم وجود دارند که فقط در همان‌جاهایی که در این کتاب می‌آیند، از آنها صحبت خواهد شد و استفاده از این اصطلاحات کلاسیک در هندسه ناقلیدسی، کم‌وبیش منسوخ شده است. ولی به نظر می‌رسد که توافق کلی برای این تعاریف وجود دارد و بنابراین جدای از این تغییر جزئی که در پانوش شماره ۴، بخش ۸-ج، توضیح داده می‌شود، آنها را پذیرفته‌ایم.