

جبر خطی عددی

www.ketab.ir

تألیف: علی محمد نظری

سرشناسنامه	:	نظری، علی محمد، ۱۳۴۵ شهریور-
عنوان و نام پدیدآور	:	جبر خطی عددی / تألیف علی محمد نظری؛
مشخصات نشر	:	اراک: دانشگاه اراک، ۱۴۰۰.
مشخصات ظاهری	:	خ، ۲۸۱ ص: مصور، نمایه.
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۷۷۳۱-۷۶-۵
وضعیت فهرست نویسی	:	فیا
موضوع	:	جبر خطی -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	:	Algebras, Linear -- Study and teaching (Higher)
موضوع	:	جبر خطی -- مسائل، تمرین ها و غیره (عالی)
موضوع	:	Algebras, Linear -- Problems, exercises, etc. (Higher)
موضوع	:	ماتریس ها -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	:	Matrices -- Study and teaching (Higher)
موضوع	:	ماتریس ها -- مسائل، تمرین ها و غیره (عالی)
موضوع	:	Matrices -- Problems, exercises, etc. (Higher)
شناسه افزوده	:	دانشگاه اراک
رده بندی کنگره	:	۵۱۲/۵
رده بندی دیویی	:	۵۱۲/۵
شماره کتابشناسی ملی	:	۸۵۳۶۱۹۸

جبر خطی عددی

دکتر علی محمد نظری

ناشر	:	دانشگاه اراک
شمارگان	:	۱۰۰۰
نوبت چاپ	:	اول - ۱۴۰۰
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۷۷۳۱-۷۶-۵
قیمت	:	۶۵۰۰۰ تومان

حق چاپ برای ناشر محفوظ است

پیشگفتار

الهی در این دیار تنهایی تو را دارم و تو بودی و هستی و خواهی بود دستگیرم. درود و سلام خدا بر جمله پیامبران الهی و مهتر آنان حضرت خاتم النبیین و اصحاب و یارانش و درود و برکات خدا بر ائمه هدی و منت خدای رحمان را که دست تقدیر سرنوشت مرا از تدریس در کلاس درس دانشگاه اراک به شاگردی در پشت میزهای دانشگاه دولتی مسکو رساند و توفیقی خدا نصیب کرد که چهار سال و سه ماهی را شاگرد ریاضیدان تاجیک الاصل روس آقای حکیم داداجانویچ ایکراموف^۱ بوده و چون رشته ایشان جبر خطی بود به جبر خطی روی آورم. او فارسی می دانست و صحبت نکرد تا شاگردش زبان روسی بیاموزد. ایران را می شناخت و دوست داشت و با فرهنگ و آیین ایران زمین آشنایی کامل داشت و اخبار و رویدادهای کشورمان را پیگیری می کرد. راستش رفته بودم تا رشته دیگری بیجویم. یعنی بیشتر دنبال بهینه سازی بودم، اما با همکاری ایوان پتروویچ^۲ استاد دوره زبان تخصصی ام با آقای ایکراموف آشنا شدم و شد آنچه باید بشود و از این بابت خدا را بارها شکر کرده ام.

دیوید هیلبرت^۳ ریاضیدان بزرگ قرن بیستم می گوید «انزاری که به عنوان واسطه بین نظریه و عمل، بین فکر و مشاهده عمل می کند، ریاضیات است. این ریاضیات است که پل های پیوند دهنده را ایجاد می کند و اشکال معتبرتری را ارائه می دهد. از این رو به وجود آمده است که کل فرهنگ معاصر ما، به همان اندازه که مبتنی بر نفوذ فکری و بهره برداری از طبیعت باشد، پایه های خود را در ریاضیات بنا کند». او در جای دیگری در باره ریاضیات می گوید: «یکی از خصوصیات ذاتی ریاضیات این است که هر پیشرفت واقعی با کشف و توسعه روش های جدید و ساده سازی روش های قبلی همراه است ... ویژگی یک پارچه ریاضیات در ذات خودش نهفته است. در واقع، ریاضیات پایه و اساس تمام علوم طبیعی است». مردی چنین سرشار از فرهیختگی در عالم ریاضی کم زاده شده است. کارهای جبر خطی این ریاضیدان بزرگ حاوی نکات بسیار ارزنده ای است.

چند سالی است که درس جبر خطی عددی به دروس اصلی رشته ریاضیات و کاربردها اضافه شده است و نگارنده بر آن شد تا برای دوره کارشناسی مطالبی را که در این چند سال از مقالات و کتاب های مختلف جمع آوری کرده است و یا خودش بعضی از آن ها را بدست آورده، در قالب کتابی به رشته تحریر در آورد. نوشتن سخت است و مسئولیت آفرین و در نتیجه خیال نوشتن و

¹Khakim Dadanjanovich Ikramov

²Ivan Petrovich

³David Hilbert

تعهد بعد از آن چون هولی بر پنجره ذهن مشتم می‌گوبد. کتاب ارزشمند نویسنده هندی الاصل مقیم ایالات متحده جناب بیسوا داتا^۱ توسط استاد ارجمند خانم دکتر توتونیان ترجمه گردیده و نگارنده از آن بهره وافی برده است. الگوریتم‌های عددی که در این کتاب با روانی هرچه تمامتر نوشته شده باعث استفاده بیش از اندازه کتاب با استفاده از کامپیوتر گردیده است. احساس می‌کنم که داتا برای نوشتن این کتاب بیش از ۱۰۰۰ مقاله را مورد بررسی قرار داده است. کتاب ایشان دارد قدیمی می‌شود و نوشته جدیدی به آن روانی سالهاست که منتظران را بیشتر منتظر کرده است. شاید خورده‌ای که می‌توان به کتاب داتا گرفت این باشد که بعضی از مثال‌هایش با دست قابل انجام نیستند و برای یک کتاب آموزشی جبرخطی عددی زینده آن است که دانشجو بتواند با دست مثال‌ها را بدست آورد تا بر مفاهیم تسلط یابد. سعی بر این شده است که حتی المقدور مثال‌ها دارای چنین مشخصه‌ای باشند. کتاب آنالیز عددی^۲ از انتشارات پیام نور نوشته آقای دکتر محمد باقر احمدی نیز مورد توجه اینجانب بوده است و آن را بارها در پیام نور تدریس کرده‌ام. دو کتاب نظریه ماتریس‌های فوژن زانگ^۳ و آنالیز عددی ماتریسی نوشته ایسن^۴ مورد استفاده‌ام بوده‌اند. اینجا ما سعی بیشتر در بیان روش‌ها داشته‌ایم تا بخواهیم خود را درگیر الگوریتم‌ها نماییم، اما وقتی روش‌ها را مطرح کرده‌ایم سعی نموده‌ایم بیشتر در مورد روش کار بحث کنیم تا بتوانیم تعداد عملیات‌های آن روش را محاسبه نماییم. در هر فصل بنا به سنت همه کتاب‌های آموزشی چند تمرین مطرح شده است. حل تعدادی از مسائل را در انتهای کتاب به عنوان ضمیمه آورده‌ایم تا دانشجو با آمادگی بیشتری به حل سایر مسائل بپردازد. بعضی تمرین‌ها را در خود فصل‌ها حل کرده‌ام و لازم است که دانشجویان زمانی که به کلمه تمرین روبرو شدند، خودشان دست به کار گردیده و شروع به حل نمایند و بعد راه حل ارائه شده را ملاحظه کنند.

این کتاب در شش فصل گردآوری شده است. در فصل اول مقدمه و مطالب مقدماتی که یک دانشجو باید در مورد جبرخطی به یاد داشته باشد، آورده شده است. البته فرض را بر این قرار داده‌ایم که دانشجو درس مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی را گذرنده است و با مفاهیم ماتریس‌ها و مقادیر ویژه بیگانه نمی‌باشد. به علت کاربرد بسیار وسیع ماتریس‌های معین مثبت و زیبایی آن‌ها یک بخش جداگانه در این فصل به آن‌ها اختصاص داده شده است. اگرچه می‌شد خیلی از این خواص را به عنوان تمرین به دانشجو واگذار کرد، اما نگرانی از آن که دانشجویان کمتر به حل آن‌ها بپردازند، مرا بر آن داشت تا بیشتر خواص این ماتریس‌ها را با اثبات بیاورم.

فصل دوم را به حل دستگاه معادلات خطی اختصاص داده‌ایم و تقریباً روش‌های معروف را جمع کرده‌ایم که با سرفصل شورای عالی برنامه ریزی انطباق دارد. هم روش‌های کلاسیک مثل حذفی گاوس آورده شده و هم تعدادی از روش‌های تکراری را مطرح کرده‌ایم. منتها در ابتدای فصل دوم مقدمه‌ای بر نمایش اعداد در کامپیوتر آورده شده است که بیشتر از کتاب داتا است. هر چه باشد کتاب از دید عددی قرار است به جبرخطی بپردازد، به همین منظور سعی شده است در بخش اول فصل دوم به این مهم پرداخته شود. اختراع کامپیوترهای کوانتومی که در حین نوشتن آخرین صفحات این کتاب رخ داد و چنین سرعت شکفت آوری که کار ۱۰ هزار سال محاسبه را

^۱Biswa Nath Datta^۲Fuzhen Zhang

به سه دقیقه و اندی کاهش داده امیدی در دل‌ها را زنده می‌کند که مسائلی که قبلاً هیچ کامپیوتری توان حل آن را نداشت، حالا قابل حل شده‌اند و این یعنی تغییراتی شگرف در آنالیز عددی و جبر خطی عددی که باید در فاصله نه‌چندان دور شاهد بروز کتاب‌هایی در این زمینه باشیم.

در فصل سوم به ماتریس‌های جالب و متعامد هوس هولدر^۱ و گینوز^۲ پرداخته‌ایم که کار این ریاضیدان اهل ایالات متحده کمک بسیار زیادی را به جبر خطی عددی کرده است. آنقدر کار این دو اهمیت دارد تا نگارنده را بر آن داشت تا فصلی مجزا با توضیح و تفسیر بیشتر به آنان اختصاص دهد. این دو تقریباً با چند سال اختلاف در اوایل قرن بیستم بدنیا آمدند و در اواخر قرن بیستم با اختلافی کم از دنیا رفتند، اما یادگار آنان جبر خطی عددی را وسعت بخشید.

فصل چهارم را به پیدا کردن عددی مقادیر ویژه اختصاص داده‌ایم و البته یافتن مقادیر ویژه از مسائلی است که سال‌هاست بزرگان علم جبر خطی را به خود مشغول کرده است. هنوز که هنوز است روش شش‌دانگی که بتواند خیال ما را در بدست آوردن عددی مقادیر ویژه آسوده کند بدست نیامده و بعید است که بدست آید.

در فصل پنجم به قضیه تجزیه مقدار تکین پرداخته‌ایم و این قضیه بسیار مهم را مطرح و مقداری از کاربردهای این قضیه را مطرح کرده‌ایم. نگارنده در دوره دکتری خویش بسیار از این قضیه استفاده کرده است.

فصل ششم فصل اختصاصی کارهای جدید نگارنده است. مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های نامنفی و کاربرد آنان سال‌هاست مورد توجه ریاضیدانان جبر خطی عددی قرار گرفته است و کاربرد آنان در فرآیندهای تصادفی بر کسی پوشیده نیست. مقالات متعددی نگارنده در این باره نوشته است و خواستم برای آشنایی دانشجویان کارشناسی با گوشه‌ای از مطالب جدید و استفاده احتمالی دانشجویان کارشناسی ارشد، خلاصه‌ای از کارهای دیگران و خویش را در این فصل را اضافه کنم. مساله‌ای با صورت بسیار ساده و جواب بسیار پیچیده که فقط با بعد پنج مورد بررسی قرار گرفته است. امید دارم که با همت بلند ریاضیدانان و مخصوصاً تعداد زیادی از هموطنان گرانقدرم که در این وادی سعی بسیار نموده‌اند، گره از کار فرو بسته این مساله نیز گشوده گردد. می‌توان این بخش را برای دوره کارشناسی بصورت اختیاری در نظر گرفت.

تعدادی از برنامه‌های کامپیوتری لازم به زبان‌های Maple و Matlab را بنا به سفارش داور محترم این کتاب در بخش ضمیمه با توضیحات لازم آورده‌ام تا دانشجویان یاد بگیرند که الگوریتم‌های این کتاب را روی کامپیوترهای خویش پیاده نمایند و از زیبایی‌های جبر خطی و ترکیب آن با کامپیوتر لذت ببرند.

از جناب آقای دکتر بهنام سپهریان همکار ارجمند گروه ریاضی دانشگاه اراک که با صبر و حوصله فراوان و پراستاری این کار را به انجام رساندند و نکات ارزشمندی را گوشزد کردند سپاسگزاری می‌نمایم. از سرکار خانم عطیه نظامی که در رسم شکل‌ها کمک کرده و بازخوانی متن نهایی را عهده‌دار شدند و در نوشتن تعدادی از برنامه‌های کامپیوتری نکات جالبی را گوشزد نمودند، قدرانی کرده و از انتشارات دانشگاه اراک که در چاپ این کتاب اینجانب را یاری نمودند تشکر فراوان می‌نمایم.

¹Householder

²Givens

فهرست مطالب

پیشگفتار

پ

۱	مقدمات جبر خطی	۱
۱	مطالبی که یاد خواهیم گرفت	۱.۱
۲	مقدمه‌ای بر ماتریس‌ها	۲.۱
۱۰	خواص ماتریس معین مثبت	۳.۱
۱۶	بعضی خواص دیگر ماتریس‌ها	۴.۱
۲۴	نرم برداری و ماتریسی	۵.۱
۲۵	چند نرم برداری ساده	۶.۱
۲۶	هم ارزی نرم‌های برداری	۷.۱
۲۷	فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت	۸.۱
۲۹	نرم ماتریسی	۹.۱
۳۷	ماتریس‌های همگرا و همگرایی ماتریسی	۱۰.۱
۳۹	همگرایی سری‌های ماتریسی	۱۱.۱

۵۱	حل دستگاه‌های معادلات خطی	۲
۵۱	نمایش اعداد در کامپیوتر	۱.۲
۵۵	حل دستگاه معادلات خطی مثلثی	۲.۲
۵۶	حل دستگاه به روش حذفی گاوس	۳.۲
۵۹	۱.۳.۲ پایداری در روش حذفی گاوس	
۶۰	محوری گیری	۴.۲
۶۱	۱.۴.۲ روش محوری گیری جزئی	
۶۲	۲.۴.۲ محوری گیری کلی	
۶۵	روش حذفی گاوس روی ماتریس‌های سه قطری	۵.۲
۶۷	دستگاه‌های هسبرگی	۶.۲
۶۹	پیدا کردن وارون یک ماتریس	۷.۲
۷۱	عدد وضعیت یک ماتریس	۸.۲

۷۳	بدوضعی مقادیر ویژه	۱.۸.۲
۷۴	یک دستگاه بدوضع	۲.۸.۲
۷۷	اختلال در حل دستگاه‌های معادلات خطی	۹.۲
۷۷	اختلال در بردار سمت راست	۱.۹.۲
۷۹	اختلال در ماتریس ضرایب	۲.۹.۲
۸۱	تجزیه‌های یک ماتریس	۱۰.۲
۸۱	تجزیه LU به روش دولیتل:	۱.۱۰.۲
۸۲	تجزیه LU به روش کروت	۲.۱۰.۲
۸۵	تجزیه LU با استفاده از محوری‌گیری	۳.۱۰.۲
۸۸	تجزیه چولسکی	۴.۱۰.۲
۹۰	تجزیه تثولیتز	۱۱.۲
۹۱	تجزیه قطبی	۱۲.۲
۹۳	روش تصفیه تکراری برای حل دستگاه معادله‌ی خطی	۱۳.۲
۹۵	روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی	۱۴.۲
۹۶	روش گوس	۱.۱۴.۲
۹۹	روش گاوس-ژوردن	۲.۱۴.۲
۱۰۶	روش SOR	۳.۱۴.۲

۳ ماتریس‌های هوس هولدر و گیونز

۱۱۵	ماتریس هوس هولدر	۱.۳
۱۲۰	ماتریس‌های گیونز	۲.۳
۱۲۵	تجزیه QR با استفاده از ماتریس‌های گیونز و هوس هولدر	۳.۳

۴ محاسبه عددی مقادیر ویژه

۱۳۷	مقدمه	۱.۴
۱۳۷	قضایای گرشگورین در مورد موقعیت مقادیر ویژه	۲.۴
۱۵۴	تعیین چندجمله‌ای مشخصه برای یک ماتریس	۳.۴
۱۵۸	روش کرایلف	۱.۳.۴
۱۶۰	روش لوریر	۲.۳.۴
۱۶۲	روش ضرایب نامعین	۳.۳.۴
۱۶۴	روش‌های تکراری برای پیدا کردن مقادیر ویژه	۴.۴
۱۶۶	سرعت بخشیدن به روش توانی	۵.۴
۱۶۸	روش توانی معکوس	۱.۵.۴
۱۷۰	پیدا کردن سایر مقادیر ویژه	۲.۵.۴
۱۷۲	بزرگترین مقدار ویژه تکراری و مختلط	۶.۴
۱۷۸	کاهش ماتریس به صورت QR	۷.۴