



توپولوژی‌های تعمیم‌یافته و عملگرهای بستار

www.ketab.ir

قاسم میرحسین‌خانی

دانشیار دانشگاه صنعتی سیرجان

انتشارات دانشگاه صنعتی سیرجان

۱۴۰۰

سرشناسه	: میرحسین خانی، قاسم، ۱۳۵۲ -
عنوان و نام پدیدآور	: توپولوژی‌های تعمیم‌یافته و عملگرهای بستار/قاسم میرحسین خانی.
مشخصات نشر	: سیرجان: دانشگاه صنعتی سیرجان، انتشارات، ۱۴۰۰.
مشخصات ظاهری	: ۲۲۷ ص.
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۹۵۷۱۴-۴-۶
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
یادداشت	: Generalized topologies and closure operators. ص.ع. به انگلیسی:
یادداشت	: واژه‌نامه.
یادداشت	: کتاب‌نامه: ص. [۲۱۳]-۲۱۷.
یادداشت	: نمایه.
موضوع	: توپولوژی - مسایل، تمرین‌ها و غیره
	: Topology - Problems, exercises, etc.
شناسه افزوده	: دانشگاه صنعتی سیرجان. انتشارات
رده‌بندی کنگره	: QA۶۱۱
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۴
شماره کتابشناسی ملی	: ۸۷۱۰۲۶۳
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: ۱۴۰۰/۰۶/۰۱
تاریخ درخواست	: ۸۷۰۹۸۰۰
کد پیگیری	



توپولوژی‌های تعمیم‌یافته و عملگرهای بستار

نویسنده: قاسم میرحسین خانی

چاپ اول (۱۴۰۰)

شمارگان: ۲۰۰

طراحی و آماده‌سازی: انتشارات دانشگاه صنعتی سیرجان

چاپ و صحافی: چاپ فاطر

قیمت: ۶۰۰۰۰ تومان

سیرجان - کیلومتر اول جاده بافت - دانشگاه صنعتی سیرجان

تلفن: ۰۳۴-۴۱۵۲۲۰۷۶ فاکس: ۰۳۴-۴۲۳۳۶۹۰۰

ایمیل: press@sirjantech.ac.ir

وب سایت: <http://press.sirjantech.ac.ir>

پیش‌گفتار

توپولوژی یکی از رشته‌های مهم ریاضیات است که اساساً از هندسه و آنالیز نشأت گرفته شده است. از جنبه تاریخی توپولوژی در سال ۱۸۴۷ توسط لیچینگ^۱، یکی از شاگردان گاوس معرفی شده است. تحقیقات ریاضیدانان در زمینه‌های مختلف توپولوژی، منجر به گسترش دامنه‌ی آن و تاسیس شاخه‌های متنوعی از آن مانند توپولوژی عمومی، توپولوژی جبری، توپولوژی دیفرانسیل، و غیره شده است. با مطالعه تاریخ توپولوژی، می‌بینیم که ریاضیدانان بسیاری سعی کرده‌اند تا چیزی بزرگتر یا کوچکتر از یک فضای توپولوژی با خود توپولوژی بسازند و در نتیجه توسیع یا تعمیم‌های متنوعی در این راه به‌دست آمده است.

یکی از این تعمیم‌های مناسب و کاربردی، توپولوژی‌های تعمیم‌یافته است. یادآوری می‌کنیم خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعه X ، یک توپولوژی خوانده می‌شود اگر شامل دو مجموعه تهی و X باشد و نسبت به اجتماع دلخواه و اشتراک متناهی بسته باشد. در فضاهای توپولوژی تعمیم‌یافته لزومی به برقراری همه شرط‌های بالا نیست. توپولوژی تعمیم‌یافته در حالت کلی با جایگزین کردن زیرخانواده‌ای دلخواه از مجموعه توانی $P(X)$ بجای خانواده مجموعه‌های باز بدست می‌آید. آغاز توپولوژی‌های تعمیم‌یافته به نوعی به سال ۱۹۶۳ باز می‌گردد؛

^۱J.B. Listing

زمانی که لوین^۱، سعی کرد مفهوم توپولوژی را با جایگزین کردن مجموعه‌های نیم‌باز به جای مجموعه‌های باز، تعمیم دهد [۳۶]. بعد از او نیز کارهایی مشابه مانند معرفی مجموعه‌های α -باز، β -باز، ضعیف‌باز و پیش‌باز انجام شد [۳۸، ۴۰، ۴۱، ۵۰]. سرانجام، در سال ۲۰۰۲ چاسار^۲، تا اندازه‌ای به این گوناگونی‌ها نظم بخشید و مفهومی کلی‌تر به نام توپولوژی تعمیم‌یافته معرفی کرد [۱۵]. او زیرخانواده‌ای از $P(X)$ ، که شامل مجموعه‌ی تهی است و نسبت به اجتماع دلخواه بسته است، را یک توپولوژی تعمیم‌یافته نامید.

هدف از تصنیف این کتاب، معرفی مفاهیم اساسی و بنیادی توپولوژی تعمیم‌یافته، خصوصاً مطالبی که ارتباط تنگاتنگی با مفاهیم اساسی توپولوژی عمومی دارد و توسط چاسار و دیگر پژوهشگران، من جمله کارهایی که توسط نویسنده در سالهای اخیر در این زمینه انجام شده است، با توجه به اینکه در زمینه‌ی مباحث تکمیلی و تعمیم فضاهای توپولوژی معمولی در سطح کارشناسی کتابی به زبان فارسی بندرت یافت می‌شود، بنابراین سطح این کتاب به گونه‌ای نوشته شده است که برای دانشجویان دوره کارشناسی رشته ریاضی به عنوان یک درس اختیاری و برای دانشجویان دوره‌های تحصیلات تکمیلی گرایش‌های هندسه، توپولوژی و آنالیز ریاضی به عنوان یک درس اصلی قابل استفاده باشد. از طرف دیگر، به دلیل اینکه عملگرهای یکنوا، خصوصاً عملگرهای بستر نقش اساسی در ساختار توپولوژی‌های تعمیم‌یافته دارند، بنابراین سعی شده است بیشتر کارهای نویسنده که در مورد فضاهای بستر انجام شده است در این کتاب آورده شود و چون عملگرهای بستر در سایر علوم مرتبط با ریاضی خصوصاً علوم کامپیوتر کاربرد دارند، این کتاب منبع مناسبی هم می‌تواند برای دانشجویان این رشته‌ها باشد.

کتاب حاضر شامل شش فصل و یک پیوست می‌باشد. در فصل اول، مفاهیم و مقدمات اولیه، شامل معرفی فضاهای تعمیم‌یافته، انواع پیوستگی تعمیم‌یافته، فضاهای هم‌بند و ناهم‌بند تعمیم‌یافته ارائه شده است و همچنین با آوردن مثال‌هایی تفاوت‌ها با فضاهای معمولی مشخص شده است.

در فصل دوم، یک رده‌بندی رسته‌ای مناسبی از فضاهای توپولوژی و توپولوژی تعمیم‌یافته برحسب عملگرهای یکنوا، خصوصاً عملگرهای بستر که کاربردهای وسیعی در سایر علوم دارند معرفی و بعضی ساختارهای رسته‌ای مانند ریخت‌های ابتدایی، انتهایی، باز، بسته و خارج‌قسمتی

را در این رسته‌ها بررسی کرده‌ایم. همچنین یک رسته مناسبی از فضاهای بستر که با رسته‌ی فضاهای توپولوژی تعمیم‌یافته یکریخت است معرفی شده است.

اصول جداسازی در نظریه توپولوژی معمولی نقش بسیار مهمی در شناختن فضاها ایفا می‌کنند. در فصل سوم و چهارم، اصول جداسازی را برای فضاهای تعمیم‌یافته و فضاهای بستر مورد مطالعه قرار داده‌ایم. تعمیم‌های زیادی از اصول جداسازی کلاسیک روی فضاهای توپولوژی معمولی و فضاهای تعمیم‌یافته توسط نویسندگان زیادی کار شده است. در فصل سوم اصول جداسازی شناخته شده‌ی کلاسیک $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ را برای فضاهای تعمیم‌یافته تعریف و با استفاده از علائم و نمادگذاری‌های ساده ریاضی مشخصه‌های جالبی برای این فضاها معرفی و با ارائه بعضی مثال‌ها، تفاوت‌های موجود با توپولوژی معمولی را بیان کرده‌ایم. یکی دیگر از این تعمیم‌های جالب، جداسازی‌ها فضاهای تعمیم‌یافته توسط رابطه‌ها، خصوصاً رابطه‌های هم‌ارزی در این فصل مورد مطالعه قرار گرفته است و در فصل سوم ویژگی‌های اصول جداسازی کلاسیک توسط روابط کولموگوروف³ و روی فضاهای بستر مورد بررسی قرار داده‌ایم.

در فصل پنجم، ویژگی‌های فضاهای تعمیم‌یافته از منظر مفاهیم شبکه‌ای مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده‌ایم که گردایه‌ی تمام توپولوژی‌های تعمیم‌یافته روی یک مجموعه‌ی ناتهی، یک شبکه است که خاصیت توزیع‌پذیر و متمم را ندارد. همچنین یک اتصال گالوایی پادورد و هم‌ورد بین شبکه‌های عملگرهای یکنوا و توپولوژی‌های تعمیم‌یافته روی یک مجموعه‌ی ناتهی معرفی شده است.

فصل ششم در مورد مفاهیم هم‌ارزی شبکه‌ای و شبه‌همسان‌ریختی در فضاهای تعمیم‌یافته است. چون نتایج بدست آمده در مورد هم‌ارزی شبکه‌ای فضاهای توپولوژی معمولی براساس مجموعه‌های بسته است، بنابراین ما تعمیم این مفاهیم را در رسته‌ی فضاهای بستر معرفی و ویژگی‌های آن‌ها را شرح داده‌ایم.

در پایان، با توجه به اینکه در فصل دوم برخی مفاهیم اساسی رسته را برای توپولوژی‌های تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار داده‌ایم، از این رو در پیوست برخی مفاهیم و مطالب مورد نیاز از نظریه رسته را آورده‌ایم. برای درک بیشتر مفاهیم برهان گزاره‌های ساده آورده شده است اما برهان گزاره‌های که از حوصله‌ی این پیوست خارج است حذف و خواننده علاقمند می‌تواند برای

³ Kolomogorov

مطالعه و جزئیات بیشتر به [۶] رجوع کند.
امید است که خوانندگان گرامی، نظرها و پیشنهادهای خود را با ما در میان گذاشته تا در چاپ‌های بعدی موجب غنی‌تر شدن کتاب گردد.

قاسم میرحسین‌خانی
دانشیار دانشگاه صنعتی سیرجان
۱۴۰۰

فهرست مطالب

ث

پیش‌گفتار

۱	توپولوژی تعمیم‌یافته	۱
۲	۱.۱ توپولوژی تعمیم‌یافته	۱.۱
۶	۲.۱ پیوستگی تعمیم‌یافته	۲.۱
۱۱	۳.۱ هم‌بندی تعمیم‌یافته	۳.۱
۱۶	۴.۱ شدیداً ناهم‌بند تعمیم‌یافته	۴.۱
۲۳	۵.۱ مثالها	۵.۱
۲۶	تمرین‌ها	
۲۹	۲ رده‌بندی رسته‌ای	۲
۲۹	۱.۲ رسته‌های تعمیم‌یافته‌ای از فضاهاى توپولوژى	۱.۲
۳۲	۲.۲ ریخت‌های ابتدایی و انتهایى	۲.۲
۴۰	۳.۲ ریخت‌های باز و بسته	۳.۲

۴۹	ریخت‌های خارج‌قسمتی
۵۳	تمرین‌ها

۵۵	۳ ج‌داسازی‌ها
۵۶	۱.۳ اصول ج‌داسازی کلاسیک
۷۱	۲.۳ اصول ج‌داسازی R_1 و R_0
۷۷	۳.۳ اصول ج‌داسازی ضعیف
۸۱	۴.۳ ج‌داسازی توسط رابطه‌ها
۹۶	۵.۳ ج‌داسازی توسط رابطه‌های هم‌ارزی
۹۹	۶.۳ ج‌داسازی توسط توابع
۱۰۴	تمرین‌ها

۱۰۷	۴ اصول ج‌داسازی فضاهای بستار
۱۰۷	۱.۴ رابطه‌ی اول کولموگروف
۱۱۵	۲.۴ رابطه‌ی دوم کولموگروف
۱۱۹	۳.۴ رابطه‌ی سوم کولموگروف
۱۲۴	تمرین‌ها

۱۲۵	۵ مشبکه‌ی توپولوژی‌های تعمیم‌یافته
۱۲۵	۱.۵ مشبکه‌ی توپولوژی‌های تعمیم‌یافته
۱۳۰	۲.۵ متمم و مجموع مستقیم
۱۳۷	۳.۵ مشبکه‌ی عملگرهای یکنوا
۱۴۴	۴.۵ کران‌های بالایی و پایینی
۱۴۸	۵.۵ متمم و مجموع مستقیم
۱۵۲	تمرین‌ها

۱۵۵	۶ هم‌ارزی نیم‌مشبکه‌ای فضاهای بستار
-----	-------------------------------------

۱۵۶	شبه همسان ریختی و هم‌ارزی نیم‌مشبکه‌ای
۱۶۰	فضای بستار سوپر
۱۶۳	فضای بستار انعکاسی T_0
۱۶۶	هم‌ارزی نیم‌مشبکه‌ای القاء شده
۱۷۴	تمرین‌ها

آ یادآوری از نظریه رسته‌ها ۱۷۷

۱۷۸	۱. مفاهیم اولیه‌ی رسته
۱۷۸	۱.۱. رسته و زیررسته
۱۸۱	۲.۱. انواع ریخت‌ها
۱۸۵	۲. ساختارهای جهانی
۱۸۶	۱.۲. شئ ابتدایی و شئ انتهایی
۱۸۷	۲.۲. ضرب و هم‌ضرب
۱۹۰	۳.۲. برابر ساز و هم‌برابر ساز
۱۹۵	۴.۲. پول‌بک و پوش‌اوت
۱۹۹	۳. تابعگون‌ها و تبدیلات طبیعی
۱۹۹	۱.۳. تابعگون
۲۰۴	۲.۳. تبدیلات طبیعی
۲۰۸	۳.۳. حد و رسته‌های کامل
۲۱۱	۴.۳. تابعگون‌های الحاقی

منابع ۲۱۳

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۲۱۹

نمایه ۲۲۵