

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

قابل استفاده توسط دانشجویان علوم پایه و فنی مهندسی

www.ketab.ir

تألیف:

دکتر مهدی رحیمی

زمستان ۱۳۹۷

سرشناسه	: رحیمی، مهدی، ۱۳۵۷ -
عنوان و نام پدیدآور	: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی: قابل استفاده توسط دانشجویان علوم پایه و فنی مهندسی/تالیف مهدی رحیمی.
مشخصات نشر	: قم: دانشگاه قم، انتشارات، ۱۳۹۸.
مشخصات ظاهری	: ۳۴۶ ص.
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۸۴۳۶-۴۰-۹
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
موضوع	: معادله‌های دیفرانسیل
موضوع	: Differential equations
موضوع	: معادله‌های دیفرانسیل — راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: Differential Equations -- Study and teaching (Higher)
موضوع	: معادله‌های دیفرانسیل — مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع	: Differential Equations -- Problems, exercises, etc. (Higher)
شناسه افزوده	: دانشگاه قم. انتشارات
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۸ ر ۶/۳۷۱ QA۳۷۱
رده بندی دیویی	: ۵۱۵/۳۵
شماره کتابشناسی ملی	: ۵۶۳۵۱۹۲



انتشارات دانشگاه قم

عنوان: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

نویسنده: مهدی رحیمی

چاپ و صحافی: هوشنگی

ناظر فنی: علیرضا معظمی

طراح جلد: احمد رضا حیدری

نوبت و سال چاپ: اول، بهار ۱۳۹۸

شمارگان: ۵۰۰

بهاء: ۳۵۰۰۰۰ ریال

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۸۴۳۶-۴۰-۹

آدرس الکترونیکی: Publication@Qom.ac.ir

کلیه حقوق مادی و معنوی برای ناشر محفوظ است.

قم، بلوار الغدیر، دانشگاه قم، اداره چاپ و انتشارات دانشگاه

تلفن: ۳۳۴۴ + ۳۳۱۰ - ۲۵ + ۳۳۴۵ + ۳۳۱۰ - ۲۵

پیشگفتار

درک ما از پدیده‌های بنیادی طبیعی تا حد زیادی مبتنی بر مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل در ریاضیات می‌باشد. به عبارت دیگر، مدل‌بندی ریاضی هر پدیده‌ی طبیعی معمولاً منجر به یک معادله‌ی دیفرانسیل می‌شود. به طور مثال، پدیده‌های ارتعاش جامدات، شارش مایعات، انتشار مواد شیمیایی، گرما و بو، ساختار مولکول‌ها، انتشار امواج الکترومغناطیسی و ... همگی به کمک معادلات دیفرانسیل قابل توصیف می‌باشند. در این بین، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نقش کلیدی را در به کارگیری ریاضیات مدرن در تحلیل پدیده‌های طبیعی بازی می‌کنند. این رویکرد در کارهای افرادی مانند اویلر، لاپلاس، فوریه، آبل، لیوویل و دورانت به اوج خود رسید و منجر به ایجاد پیشرفت‌های چشمگیری در آنالیز و هندسه نیز شد.

کتاب حاضر، نخستین درس در مورد معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که می‌تواند برای دانشجویان رشته‌های علوم پایه و فنی مهندسی مناسب باشد. متن این کتاب، حاصل از چندین سال تدریس درس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای دانشجویان دوره‌ی کارشناسی رشته‌ی ریاضی در دانشگاه قم می‌باشد. همچنین، علاوه بر درس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، می‌توان از مطالب این کتاب برای دروس ریاضی مهندسی و روش‌های ریاضی در فیزیک نیز استفاده نمود.

نویسنده تمام تلاش خود را نموده است که تجربه‌ی تدریس خود در این درس را در چیدمان مطالب درسی، نحوه‌ی ارائه‌ی مطالب و نکات آموزشی دیگر، با توجه به بازخورد آن‌ها در بین دانشجویان به کار گرفته و متنی تا حد امکان روان و قابل فهم را ارائه نماید. به علاوه، برای ایجاد مهارت بیشتر در استفاده از مفاهیم ارائه شده، مثال‌های حل‌شده‌ی فراوانی در کتاب گنجانیده شده است. این مثال‌ها در قالب مثال‌های متن درس و مثال‌های حل‌شده در انتهای هر فصل تدوین شده‌اند. لازم به ذکر است که کتاب‌های ارزنده‌ای به زبان انگلیسی در زمینه‌ی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وجود دارند [۱، ۴، ۶، ۷]. همچنین، در کنار این متون انگلیسی، کتاب‌های بسیار مفیدی نیز به زبان فارسی به صورت تألیف یا ترجمه

وجود دارند [۱۰، ۱۱، ۱۲]. درعین حال هریک از کتاب‌های موجود رویکرد ویژه‌ی خود را به موضوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارند. شیوه‌ی کتاب حاضر از نظر نحوه‌ی چیدمان و ارائه‌ی مطالب، مثال‌های حل‌شده و دسته‌بندی موضوعی مطالب با متون موجود متفاوت است. ساختار کتاب به صورت زیر می‌باشد:

۱. فصل اول اختصاص به مفاهیم و تعاریف اولیه دارد. دراین فصل معادلات خطی، نیم‌خطی و شبه‌خطی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. به‌علاوه، مدل‌بندی ریاضی چند پدیده‌ی فیزیکی به‌کمک معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه می‌شود. معادلات خطی مرتبه‌ی دوم دسته‌بندی شده و اصل ماکزیمم بیان می‌شود.

۲. فصل دوم اختصاص به مقدماتی از آنالیز ریاضی دارد. دراین فصل، مفاهیم و قضایای مورد استفاده دراین کتاب درموود نظریه‌ی سری فوریه، انتگرال فوریه و تبدیل فوریه به‌طور خلاصه ارائه شده‌است. بدیهی‌است که مطالب ارائه‌شده در حد نیاز بوده و برای مطالعه‌ی عمیق‌تر مراجع مناسب معرفی شده‌اند.

۳. فصل سوم به‌طور کامل به معادله‌ی موج اختصاص یافته‌است. دراین فصل معادله‌ی موج بر خط حقیقی، نیم‌خط حقیقی و نواحی نواری شکل حل شده‌اند.

۴. فصل چهارم به‌طور کامل به معادله‌ی انتشار اختصاص یافته‌است. دراین فصل معادله‌ی انتشار بر خط حقیقی، نیم‌خط حقیقی و نواحی نواری شکل حل شده‌اند. تابع خطا و کاربرد آن در نمایش جواب‌های معادله‌ی انتشار نیز مورد بحث قرار گرفته‌است.

۵. فصل پنجم به معادله‌ی لاپلاس و توابع همساز اختصاص داده شده‌است. به‌علاوه دراین فصل توابع گرین، اتحادهای گرین و حل معادله‌ی پواسن نیز مورد بحث قرار گرفته‌اند.

۶. فصل ششم به کاربرد تبدیل فوریه در حل معادلات دیفرانسیل خطی اختصاص یافته‌است.

۷. در انتها مطالب پیش‌نیاز مورد استفاده دراین کتاب به‌طور خلاصه در قسمت پیوست‌ها گنجانیده شده‌است.

فهرست مطالب

۱	مفاهیم مقدماتی و اصل ماکزیم	۱
۱	۱.۱ یک P.D.E چیست؟	۱
۶	۱.۱.۱ روش متجلی مشخصه	۶
۸	۲.۱.۱ منحنی‌های مشخصه و معادلات خطی غیرهمگن	۸
۱۶	۲.۱ معادلات شبه‌خطی مرتبه‌ی اول	۱۶
۱۶	۱.۲.۱ تفسیر معادلات شبه‌خطی مرتبه‌ی اول	۱۶
۱۷	۲.۲.۱ جواب عمومی معادلات شبه‌خطی مرتبه‌ی اول	۱۷
۳۲	۳.۲.۱ مدل‌بندی ریاضی چند پدیده‌ی فیزیکی	۳۲
۴۱	۴.۲.۱ شرایط اولیه و مرزی	۴۱
۴۳	۵.۲.۱ مسائل خوش‌وضع	۴۳
۴۴	۳.۱ دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم	۴۴
۴۷	۱.۳.۱ دسته‌بندی معادلات خطی مرتبه‌ی دوم در حالت کلی	۴۷
۴۸	۴.۱ اصل ماکزیم	۴۸
۵۴	۵.۱ مثال‌های حل شده	۵۴
۷۵	۲ سری فوری و انتگرال فوریه	۷۵
۷۵	۱.۲ توابع متناوب و سری فوریه	۷۵
۸۲	۲.۲ اتحاد پارسوال	۸۲
۸۴	۱.۲.۲ بسط فوریه‌ی کسینوسی و سینوسی بر نیم‌بازه	۸۴

۸۸	شکل مختلط سری فوری	۲.۲.۲
۸۹	سری فوری مضاعف سینوسی	۳.۲.۲
۹۰	انتگرال فوری	۳.۲
۹۶	تبدیل فوری	۴.۲
۱۰۰	خواص تبدیل فوری	۱.۴.۲
۱۰۲	ضرب پیچشی توابع	۲.۴.۲
۱۰۷	تبدیل فوری کسینوسی و سینوسی	۵.۲
۱۰۷	تبدیل فوری کسینوسی	۱.۵.۲
۱۰۸	تبدیل فوری سینوسی	۲.۵.۲
۱۱۷	مثال‌های حل شده	۶.۲

۱۳۹	معادله‌ی موج	۳
۱۳۹	معادله‌ی موج بر خط حقیقی	۱.۳
۱۴۴	معادله‌ی موج بر نیم خط حقیقی	۲.۳
۱۴۶	معادله‌ی موج بر نواحی نواری شکل با شرایط دیریکله	۳.۳
۱۵۱	معادله‌ی موج بر نواحی نواری شکل با شرایط نیومن	۴.۳
۱۵۴	معادله‌ی موج غیرهمگن بر خط حقیقی	۵.۳
۱۵۸	معادلات موج و انتشار دو بعدی	۶.۳
۱۶۲	مسائل با شرایط مرزی غیرهمگن	۷.۳
۱۶۸	انرژی برای معادله‌ی موج	۸.۳
۱۷۰	مثال‌های حل شده	۹.۳

۱۸۹	معادله‌ی انتشار	۴
۱۸۹	معادله‌ی انتشار یک بعدی بر نواحی نواری شکل با شرط دیریکله	۱.۴
۱۹۱	معادله‌ی انتشار یک بعدی بر نواحی نواری شکل با شرط نیومن	۲.۴
۱۹۳	معادله‌ی انتشار یک بعدی بر خط حقیقی	۳.۴
۱۹۷	تابع خطا	۱.۳.۴

۴.۴	معادله‌ی انتشار یک بعدی بر نیم خط حقیقی	۲۰۱
۵.۴	معادله‌ی انتشار غیرهمگن بر خط حقیقی	۲۰۴
۶.۴	معادله‌ی انتشار غیرهمگن بر نیم خط	۲۰۸
۷.۴	معادله‌ی انتشار دو بعدی	۲۱۱
۸.۴	مسائل با شرایط مرزی غیرهمگن	۲۱۴
۹.۴	مثال‌های حل شده	۲۱۶

۵ معادله‌ی لاپلاس و توابع همساز

۱.۵	معادله‌ی لاپلاس	۲۳۳
۲.۵	معادله‌ی لاپلاس در مختصات قطبی و کروی	۲۳۵
۳.۵	اتحادهای گرین	۲۵۳
۱.۳.۵	اتحادهای گرین و یکسانی جواب	۲۵۷
۲.۳.۵	اتحادهای گرین و توابع همساز	۲۵۸
۳.۳.۵	توابع گرین	۲۶۷
۴.۳.۵	حل معادله‌ی پواسن با شرایط مرزی همگن	۲۷۳
۵.۳.۵	حل معادله‌ی پواسن با شرایط مرزی غیرهمگن	۲۷۵
۶.۳.۵	تابع گرین متناظر با نواحی مستطیلی شکل	۲۷۵
۴.۵	مثال‌های حل شده	۲۷۸

۶ کاربرد تبدیل فوریه در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

۱.۶	خواص مورد استفاده	۲۸۹
۲.۶	حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بر خط حقیقی به کمک تبدیل فوریه	۲۹۲
۳.۶	هسته‌ی گاوسی و معادله‌ی انتشار	۲۹۹
۴.۶	حل معادلات بر نیم خط حقیقی به کمک تبدیلات فوریه‌ی کسینوسی و سینوسی	۳۰۴
۵.۶	مثال‌های حل شده	۳۰۸

۳۲۹	آ حساب دیفرانسیل و انتگرال
۳۲۹	۱.آ فضاهاى اقلیدسی
۳۳۱	۲.آ توابع اسکالر و مشتقات جزئى
۳۳۳	۳.آ گرادیان و مشتق جهتی
۳۳۵	۴.آ قضایای گرین و دیورژانس
۳۳۶	۵.آ مشتق‌گیری از انتگرال
۳۳۹	ب سری فوریه نسبت به پایه‌ی متعامد یکه
۳۳۹	۱.ب دستگاه‌های متعامد توابع
۳۴۱	۲.ب سری فوریه نسبت به یک دستگاه متعامد یکه
۳۴۵	پ معادلات دیفرانسیل معمولی
۳۴۵	۱.پ مفاهیم مقدماتی و معادلات خطی
۳۵۰	۲.پ معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت
۳۵۴	۳.پ معادله‌ی کشی-اولیر
۳۵۵	۴.پ معادلات خطی غیرهمگن با ضرایب غیرثابت
۳۵۹	جدول‌ها
۳۶۴	کتاب‌نامه
۳۶۷	نمایه‌ها