



۱۵ - ه ل م ت

# مبانی برنامه‌ریزی ریاضی و بهینه‌سازی در مهندسی

لیف: ۹۳۷ - ۷۷۹  
۴۰۸-۲۲۵۵-۵۵۵-۸۷۹  
۵۱۲-۶۸۵  
۹۳۱۵  
۵۶۷-۷۷۸

www.ketab.ir

دکتر حسین صیادی

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهندس علی سوهانی

۷۶۰۱۸۸۸  
۷۷۷۷۷۷۷۷



شماره ۵۱۰

سرشناسه: صیادی، حسین، ۱۳۵۰ -

عنوان و نام پدیدآور: مبانی برنامه‌ریزی ریاضی و بهینه‌سازی در مهندسی/تالیف حسین صیادی، علی سوهانی.

مشخصات نشر: تهران: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، انتشارات، ۱۴۰۰.

مشخصات ظاهری: ۴۴۲ص: مصور، جدول.

فروست: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی؛ شماره ۵۱۰.

شابک: 978-622-6655-90-3

وضعیت فهرست نویسی: فیپا

یادداشت: کتابنامه: ص. ۴۲۳ - ۲۴۶.

موضوع: بهینه‌سازی ریاضی / Mathematical optimization/

موضوع: مهندسی -- الگوهای ریاضی / Engineering -- Mathematical models/

موضوع: بهینه‌سازی ریاضی -- برنامه‌های کامپیوتری / Mathematical optimization -- Computer programs/

شناسه افزوده: سوهانی، علی، ۱۳۶۹

رده‌بندی کنگره: QA۴۰۲/۵

رده‌بندی دیویی: ۵۱۹/۶

شماره کتابشناسی ملی: ۸۷۷۰۳۵۰

press.kntu.ac.ir



ناشر: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

عنوان: مبانی برنامه‌ریزی ریاضی و بهینه‌سازی در مهندسی

مؤلفان: دکتر حسین صیادی و مهندس علی سوهانی نوبت

چاپ: اول

تاریخ انتشار: اسفند ۱۴۰۰

شمارگان: ۲۰۰ جلد

ویرایش: ویراستار دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

چاپ: سعید

صحافی: گرنامی

قیمت: ۱۲۰۰۰ تومان

تمام حقوق برای ناشر محفوظ است

خیابان میرداماد غربی - شماره ۴۷۰ - انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - تلفن: ۸۸۸۸۱۰۵۲

میدان ونک - خیابان ولی عصر (ع) - بالاتر از چهارراه میرداماد - شماره ۲۶۲۶ - مرکز پخش و فروش انتشارات

تلفن: ۸۸۷۷۲۲۷۷ رایانامه: press@kntu.ac.ir - تارنما (فروش برخط): press.kntu.ac.ir

## فهرست مطالب

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| فصل اول: مقدمه                                        | ۱  |
| ۱.۱ تاریخچه بهینه‌سازی                                | ۱  |
| ۲.۱ مدل‌سازی در مسائل بهینه‌سازی                      | ۳  |
| ۱.۲.۱ متغیرهای تصمیم و توابع هدف                      | ۴  |
| ۲.۲.۱ قیود                                            | ۵  |
| ۳.۲.۱ مدل                                             | ۶  |
| ۴.۲.۱ درجه آزادی                                      | ۱۳ |
| ۳.۱ دسته‌بندی انواع مسائل در بهینه‌سازی               | ۱۸ |
| ۱.۳.۱ دسته‌بندی براساس وجود یا عدم وجود قید           | ۱۸ |
| ۲.۳.۱ دسته‌بندی براساس نوع متغیرهای تصمیم             | ۱۹ |
| ۳.۳.۱ دسته‌بندی براساس ساختار فیزیکی مسأله            | ۲۱ |
| ۴.۳.۱ طبقه‌بندی براساس نوع معادلات درگیر              | ۲۳ |
| ۵.۳.۱ طبقه‌بندی براساس قابلیت جداسازی توابع           | ۲۳ |
| ۶.۳.۱ طبقه‌بندی برحسب نوع متغیرهای تصمیم              | ۲۳ |
| ۷.۳.۱ طبقه‌بندی براساس تعداد توابع هدف                | ۲۴ |
| ۷.۳.۱ نام‌گذاری‌های متداول (مخفف) در مسائل بهینه‌سازی | ۲۵ |
| ۴.۱ اهمیت ساده‌سازی در مسائل بهینه‌سازی               | ۲۵ |
| تمرینات                                               | ۲۸ |
| فصل دوم: مبانی بهینه‌سازی                             | ۳۰ |
| ۱.۲ پیوستگی و ناپیوستگی                               | ۳۰ |
| ۱.۱.۲ مفهوم در فضای یک‌بعدی                           | ۳۰ |

|    |                                                                               |
|----|-------------------------------------------------------------------------------|
| ۳۲ | ۲.۱.۲ مفهوم در فضای بیش از یک بعد                                             |
| ۳۸ | ۲.۲ یک‌نمایی و چندنمایی بودن                                                  |
| ۳۸ | ۱.۲.۲ مفهوم در فضای یک‌بعدی                                                   |
| ۴۲ | ۲.۲.۲ مفهوم در فضای بیش از یک بعد                                             |
| ۴۳ | ۳.۲ نقطهٔ بهینهٔ موضعی و کلی                                                  |
| ۴۳ | ۴.۲ مروری بر جبر ماتریس‌ها                                                    |
| ۴۴ | ۱.۴.۲ تعاریف                                                                  |
| ۴۷ | ۲.۴.۲ جمع و تفریق و ضرب و برابری ماتریس‌ها                                    |
| ۴۸ | ۳.۴.۲ ماتریس افزوده و ماتریس معکوس                                            |
| ۵۰ | ۳.۴.۲ دترمینان، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه                                   |
| ۵۳ | تمرینات                                                                       |
| ۵۵ | فصل سوم: تئوری تحدّب                                                          |
| ۵۵ | ۱.۳ تعریف تابع محدب                                                           |
| ۵۸ | ۲.۳ روش تعیین تحدّب و تقعر                                                    |
| ۵۸ | ۱.۲.۳ شرط لازم و کافی برای تحدّب یا تقعر توابع یک‌بعدی (دارای یک متغیر تصمیم) |
| ۶۰ | ۲.۲.۳ تعیین تحدّب و تقعر برای توابع چند بعدی                                  |
| ۶۷ | ۳.۳ نواحی محدب                                                                |
| ۷۰ | ۴.۳ مسائل برنامه ریزی محدّب                                                   |
| ۷۱ | تمرینات                                                                       |
| ۷۴ | فصل چهارم: تئوری بهینه‌سازی در مسائل نامقیّد                                  |
| ۷۴ | ۱.۴ شروط لازم و کافی برای بهینگی مسائل یک‌بعدی نامقیّد                        |
| ۷۵ | ۲.۴ شروط لازم و کافی برای بهینگی مسائل چندبعدی نامقیّد                        |
| ۸۱ | تمرینات                                                                       |

|     |                                                         |
|-----|---------------------------------------------------------|
| ۸۳  | فصل پنجم: بهینه‌سازی یک‌بعدی نامقید                     |
| ۸۳  | ۱.۵ طبقه‌بندی روش‌ها در مسائل بهینه‌سازی یک‌بعدی نامقید |
| ۸۴  | ۲.۵ روش نیوتن                                           |
| ۸۸  | ۳.۵ روش سکانت                                           |
| ۹۱  | ۴.۵ روش‌های جستجوی مستقیم                               |
| ۹۶  | تمرینات                                                 |
| ۹۸  | فصل ششم: بهینه‌سازی چندبعدی نامقید                      |
| ۹۹  | ۱.۶ روش‌های جستجوی مستقیم                               |
| ۱۰۰ | ۱.۱.۶ روش‌های جستجوی تصادفی                             |
| ۱۰۰ | ۱.۱.۱.۶ روش پرش تصادفی                                  |
| ۱۰۳ | ۲.۱.۶ روش گام تصادفی                                    |
| ۱۰۶ | ۳.۱.۶ روش گام تصادفی با جستجوی جهت                      |
| ۱۰۷ | ۴.۱.۶ مزایای روش‌های جستجوی تصادفی                      |
| ۱۰۸ | ۲.۱.۶ روش جستجوی یک‌تغییری                              |
| ۱۱۶ | ۳.۱.۶ روش جهات مزدوج                                    |
| ۱۲۲ | ۴.۱.۶ روش‌های جستجوی نمونه                              |
| ۱۲۳ | ۵.۱.۶ روش پاول                                          |
| ۱۳۰ | ۶.۱.۶ روش پاول تعدیل یافته                              |
| ۱۳۲ | ۷.۱.۶ روش هوک و جیویس                                   |
| ۱۳۴ | ۸.۱.۶ روش مختصات چرخان روزنبراک                         |
| ۱۳۹ | ۹.۱.۶ روش سیمپلکس                                       |
| ۱۵۱ | ۲.۶ روش‌های جستجوی غیرمستقیم (روش‌های شیبی)             |
| ۱۵۱ | ۱.۲.۶ روش گرادیان                                       |

|     |                                                                  |
|-----|------------------------------------------------------------------|
| ۱۵۶ | ۲.۲.۶ روش نیوتن .....                                            |
| ۱۶۰ | ۳.۲.۶ روش BFGS .....                                             |
| ۱۶۷ | تمرینات .....                                                    |
| ۱۶۹ | فصل هفتم: تئوری بهینه‌سازی مقید .....                            |
| ۱۷۰ | ۱.۷ شروط لازم و کافی در مسائل مقید .....                         |
| ۱۷۰ | ۲.۷ تعریف تابع لاگرانژ .....                                     |
| ۱۷۱ | ۳.۷ شروط لازم و کافی برای قیود به فرم تساوی .....                |
| ۱۷۳ | ۴.۷ شروط لازم و کافی برای قیود به فرم نامساوی .....              |
| ۱۷۷ | ۵.۷ شروط لازم و کافی برای حالت عمومی مسائل بهینه‌سازی مقید ..... |
| ۱۷۹ | تمرینات .....                                                    |
| ۱۸۱ | فصل هشتم: برنامه‌ریزی خطی .....                                  |
| ۱۸۱ | ۱.۸ مدل‌سازی مسأله .....                                         |
| ۱۸۵ | ۲.۸ فرمولاسیون کلی مسائل برنامه‌ریزی خطی .....                   |
| ۱۸۶ | ۳.۸ اشکال مختلف ریاضی نمایش مدل‌های مسائل برنامه‌ریزی خطی .....  |
| ۱۸۷ | ۱.۳.۸ شکل استاندارد .....                                        |
| ۱۸۸ | ۲.۳.۸ شکل متعارف .....                                           |
| ۱۹۰ | ۴.۸ روش سیمپلکس در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی .....                |
| ۱۹۰ | ۱.۴.۸ روش ترسیمی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی .....             |
| ۱۹۹ | ۲.۴.۸ شرط بهینگی .....                                           |
| ۲۰۰ | ۳.۴.۸ شرط شدنی بودن .....                                        |
| ۲۰۴ | ۴.۴.۸ خلاصه روش سیمپلکس .....                                    |
| ۲۰۵ | ۵.۴.۸ روش متغیر بزرگ M .....                                     |
| ۲۰۹ | ۶.۴.۸ روش دو فاز .....                                           |

|          |                                              |
|----------|----------------------------------------------|
| ۲۱۲..... | ۵.۸ حالات خاص در مسائل برنامه‌ریزی خطی       |
| ۲۱۳..... | ۱.۵.۸ تباہیدگی                               |
| ۲۱۵..... | ۲.۵.۸ جواب‌های بی‌کران                       |
| ۲۱۷..... | ۳.۵.۸ جواب‌های بهینه چندگانه (بی‌نهایت جواب) |
| ۲۱۹..... | ۴.۵.۸ مسأله جواب ندارد.                      |
| ۲۲۰..... | ۶.۸ مسائل دوگان                              |
| ۲۲۳..... | ۷.۸ روش سیمپلکس دوگان                        |
| ۲۲۸..... | ۸.۸ مدل ترابری                               |
| ۲۲۹..... | ۱.۸.۸ تعریف مدل ترابری                       |
| ۲۳۱..... | ۲.۸.۸ الگوریتم ترابری                        |
| ۲۳۲..... | ۳.۸.۸ تعیین جواب آغازین                      |
| ۲۳۲..... | ۱.۳.۸.۸ روش گوشه شمال غربی                   |
| ۲۳۴..... | ۲.۳.۸.۸ روش کمترین هزینه                     |
| ۲۳۵..... | ۳.۲.۸.۸ روش تقریب فوگل                       |
| ۲۳۷..... | تمرینات                                      |
| ۲۴۲..... | فصل نهم: برنامه‌ریزی غیرخطی                  |
| ۲۴۲..... | ۱.۹ مقدمه                                    |
| ۲۴۲..... | ۲.۹ روش گرادیان کلی کاهش یافته               |
| ۲۴۳..... | ۱.۲.۹ روش حذف صریح                           |
| ۲۴۵..... | ۲.۲.۹ روش حذف ضمنی (غیرصریح)                 |
| ۲۵۶..... | ۳.۹ روش SQP                                  |
| ۲۷۳..... | ۴.۹ روش تابع جریمه                           |
| ۲۸۰..... | ۵.۹ روش لاگرانژ                              |



|     |                                                                    |
|-----|--------------------------------------------------------------------|
| ۲۸۰ | تمرینات                                                            |
| ۲۸۴ | فصل دهم: برنامه‌ریزی اعداد صحیح و ترکیبی                           |
| ۲۸۴ | ۱.۱۰ مقدمه                                                         |
| ۲۸۵ | ۲.۱۰ تعاریف                                                        |
| ۲۸۶ | ۱.۲.۱۰ متغیرهای دو دویی                                            |
| ۲۸۸ | ۲.۲.۱۰ فرمول‌بندی یک مسئله برنامه‌ریزی اعداد صحیح                  |
| ۲۸۹ | ۳.۱۰ مدل‌سازی با بهره‌گیری از متغیرهای گسسته عدد صحیح              |
| ۲۹۲ | ۴.۱۰ روش شاخه‌ها و کران‌ها                                         |
| ۲۹۳ | ۱.۴.۱۰ رویکرد شاخه‌سازی                                            |
| ۲۹۸ | ۲.۴.۱۰ نمایش گرافیکی روش شاخه‌ها                                   |
| ۲۹۹ | ۳.۴.۱۰ روش کرانه‌سازی                                              |
| ۳۰۱ | ۴.۴.۱۰ ترتیب بررسی کردن گره‌ها در استفاده از روش شاخه‌ها و کران‌ها |
| ۳۰۷ | ۵.۴.۱۰ مقایسه رویکردهای محدودسازی عمقی و عرضی                      |
| ۳۰۷ | ۵.۱۰ مسائل MILP                                                    |
| ۳۰۸ | ۶.۱۰ مسائل MINLP                                                   |
| ۳۱۰ | تمرینات                                                            |
| ۳۱۲ | فصل یازدهم: روش‌های فرا ابتکاری در بهینه‌سازی                      |
| ۳۱۲ | ۱.۱۱ مقدمه                                                         |
| ۳۱۲ | ۲.۱۱ الگوریتم ژنتیک                                                |
| ۳۱۶ | ۱.۲.۱۱ پارامترهای تنظیم                                            |
| ۳۱۷ | ۲.۲.۱۱ کدگذاری داده‌ها به صورت ساختار کروموزومی                    |
| ۳۲۰ | ۳.۲.۱۱ تولید نسل جدید با استفاده از عمل‌گرهای ژنتیکی               |
| ۳۲۶ | ۴.۲.۱۱ رمزگشایی جمعیت نهایی برای یافتن پاسخ بهینه                  |
| ۳۲۶ | ۵.۲.۱۱ توصیه‌هایی درباره استفاده از الگوریتم ژنتیک                 |



## پیش‌گفتار

آدمی از دیرباز تاکنون با عطش سیری‌ناپذیری به دنبال ارتقای خود و محیط اطرافش است و در این راه، با شور و علاقه و تلاش تغییرات شگرفی را در زندگی خویش پدید آورده‌است. روحیهٔ کمال‌گرایی انسان سبب شده تا از تمام ابزارهای ممکن از جمله روش‌های ریاضی به‌منظور یافتن راهکارهای ارتقای پدیده‌ها و اختراعات بهره بگیرد که این، موجب توسعهٔ روش‌های بهینه‌سازی در طول تاریخ شده‌است.

سیستم‌های انرژی به‌صورت عمیقی در زندگی امروز انسان نقش دارند و از ساختمان حامل‌ونقل و صنعت و ارتباطات از آن‌ها استفاده می‌شود. این کاربرد متنوع و زیاد، در کنار بحران‌های انرژی و محیط‌زیستی و ضرورت استفادهٔ مقرون به‌صرفه از منابع، باعث شده تا پژوهشگران در طول سالیان اخیر، مطالعات خود را به‌منظور بهینه‌سازی این سیستم‌ها اختصاص دهند. توسعهٔ ابزارهای محاسباتی، به‌ویژه رایانه‌ها، باعث پیشرفت قابل توجهی در زمینهٔ بهینه‌سازی سیستم‌های انرژی شده‌است.

از آن جا که غالب منابع موجود، مربوط به بهینه‌سازی را با دیدگاه ریاضی صرف و با تمرکز بر روی یک یا چند بخش از موضوعات بهینه‌سازی مطرح می‌کنند، کتاب حاضر تلاش بر معرفی تمام مباحث مربوط به بهینه‌سازی با دیدگاهی کاربردی در مهندسی دارد. برای این منظور، در هر مبحث، ضمن ارائهٔ توضیحات، مثال‌هایی از کاربرد آن در مهندسی زده می‌شود؛ افزون بر آن که شرحی از مطالعات نویسندگان در یک فصل جداگانه ارائه می‌شود. همچنین، برای فراهم آوردن محیطی تا حد امکان کاربردی برای خوانندگان، شماری از بسته‌های نرم‌افزاری پرکاربرد در بهینه‌سازی و موارد مربوطه، از جمله تصمیم‌سازی نیز معرفی شده و چگونگی کار با آن‌ها شرح داده می‌شود.

کتاب با معرفی تعاریف اولیهٔ بهینه‌سازی در فصل ۱ آغاز می‌شود و مواردی مانند چگونگی مدل‌سازی، متغیرهای تصمیم، قیود، توابع هدف و انواع طبقه‌بندی مسائل بهینه‌سازی شرح داده می‌شوند. سپس، در فصل دوم، مبانی بهینه‌سازی از جمله پیوستگی و جبر ماتریس‌ها و پس از آن در فصل سوم تئوری تحدب ارائه می‌گردند. در فصل چهارم، تئوری بهینه‌سازی در مسائل نامقید، شامل شروط لازم و کافی برای بهینگی مسائل یک و چندبعدی توضیح داده می‌شود.

در ادامه، در فصل پنجم شرح داده می‌شود که چگونه مسائل یک بعدی نامقید می‌توانند با روش‌های عددی مانند روش‌های نیوتن و سکانت حل شوند که موجب به‌دست آوردن دید کاملی از آن‌ها می‌شود. خواننده با مطالعهٔ این فصل، می‌تواند شبیه‌سازی خوبی بین بهینه‌سازی یک‌بعدی،

به عنوان ملموس ترین نوع بهینه سازی، و بهینه سازی های پیچیده تر، از جمله بهینه سازی های چندبعدی و بهینه سازی های چندهدفه و مقید انجام دهد و درک عمیق تری را کسب نماید.

در فصل ششم، بهینه سازی چندبعدی نامقید و روش های مختلف آن مورد بحث و بررسی قرار می گیرند و از ساده ترین آن ها، که روش جستجوی تصادفی است تا روش های پیچیده که براساس مشتقات تابع هدف کار می کنند، پوشش داده می شود. تقریباً برای تمام روش های موجود در این بخش، کدهای کامپیوتری توسط نویسندگان توسعه داده شده است تا ایده های خوبی برای کدنویسی در مسائل بهینه سازی فراهم شود.

فصل هفتم، تئوری بهینه سازی مقید را بیان می کند تا روش تحلیلی حل چنین مسائلی بیان شود. سپس با کسب آگاهی از آن که روش تحلیلی یافتن نقطه بهینه به سادگی قابل استفاده در مسائل با قیود زیاد و مسائل واقعی غیرخطی نیست، مبانی برنامه ریزی خطی در فصل هشتم مورد توجه قرار می گیرد و روش سیمپلکس، به عنوان روش متداول مورد استفاده در این دسته از مسائل معرفی می شود. همچنین، چالش های موجود در حل مسائل بهینه سازی خطی و راهکارهای غلبه بر آن نیز در این فصل بیان می گردند.

مبانی برنامه ریزی غیرخطی موضوع نهمین فصل از کتاب پیش رو است که در آن روش های پرکاربرد حل مسائل غیرخطی از جمله روش گرادیان کلی کاهش یافته و روش تابع جریمه مورد بحث و بررسی قرار می گیرد. سپس، در فصل دهم با چگونگی برنامه ریزی اعداد صحیح و ترکیبی و مسائلی که با این دسته از متغیرهای تصمیم سر و کار دارند آشنا می شوید.

نظر به رشد چشمگیر روش های فراابتکاری به ویژه الگوریتم ژنتیک در مسائل بهینه سازی، فصل یازدهم کتاب، این روش ها را با بیانی ساده و همراه با مثال های متعدد معرفی می کند و در ادامه، نحوه حل مسائل بهینه سازی چندهدفه که در شمار زیادی از مباحث مهندسی وجود دارند در فصل دوازدهم شرح داده می شود. فصل دوازدهم شامل معرفی روش پاسخ های بهینه نامغلوب برای تعیین جبهه بهینه پارتو است. همچنین، از آن جا که برای انتخاب پاسخ نهایی از جبهه بهینه پارتو نیاز به یک روش تصمیم سازی است، روش تصمیم سازی سلسله مراتبی که قادر به در نظر گرفتن اهمیت نسبی گزینه ها نسبت به یکدیگر است بررسی می شود.

فصل سیزدهم، به معرفی نمونه هایی واقعی از به کارگیری روش های بهینه سازی برای سیستم های انرژی مختلف می پردازد. موارد بررسی شده در این فصل از پژوهش هایی که نویسندگان کتاب در طول سالیان اخیر در مجلات معتبر علمی به چاپ رسانده اند، و جزء مقالات پرارجاع به شمار می آیند انتخاب شده اند. سرانجام نیز در فصل چهاردهم، بسترهای نرم افزاری که با

کمک آن‌ها می‌توان بهینه‌سازی و تصمیم‌سازی را انجام داد، معرفی شده و چگونگی کار با آن‌ها ضمن ارائه مثال بیان می‌شود.

این کتاب حاصل سالیان متوالی تجربه نویسندگان در تدریس و انجام پروژه‌های صنعتی است و امید می‌رود که بستر مناسبی را برای معرفی مباحث بهینه‌سازی به‌صورت جامع و با زبان ساده و با دیدگاه مهندسی پدید آورد. در انتها، نویسندگان بر خود لازم می‌دانند که از همه کسانی که با پیشنهادها و بازخوردهای خود در افزایش کیفیت مطالب ارائه شده مؤثر بوده‌اند، به‌ویژه دانشجویان درس برنامه‌ریزی ریاضی پیشرفته در طول سال‌های اخیر، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشند. همچنین، به صورت ویژه از زحمات جناب آقای مهندس محمدحسن شاهوردیان در طول مراحل آماده‌سازی کتاب سپاسگزاری می‌شود. مزید امتنان خواهد بود که در صورت داشتن هر گونه پیشنهادی برای بهبود بیشتر کار، ما را از طریق راه‌های ارتباطی معرفی شده بهره‌مند نمایید تا در ویرایش‌های آتی کتاب در جهت بهبود آن به‌کار روند.

با آرزوی شادی و سلامتی و موفقیت روزافزون

حسین صیادی (sayyaadi@kntu.ac.ir)

علی سوهانی (asohani@mail.kntu.ac.ir)

www.ketab.ir