

مقدمه‌ای بر نظریه گروه

کاربرد های آن در نظریه موسیقی ریاضی

نویسندگان:

فلور اسف-سانچ، استاوس ا. آگستین-آکویی تو، امیلیو لوئیس-پابلا،
ماریانا سونتال، حنین دوپله میس

مترجمین:

مسعود صباغان

حسن میرنوری

انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان

۱۳۹۷

شابک	978-964-1052-35-7 :
شماره کتابشناسی ملی	0127057V :
عنوان و نام پدیدآور	مقدمه‌ای بر نظریه گروه : کاربردهای آن در نظریه موسیقی ریاضی/مولفان فلور اسف -سانچ... [و دیگران] :
مشخصات نشر	مترجمان مسعود صباغان، حسن میرنوری :
مشخصات ظاهری	لاهیجان : دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان، ۱۳۹۷، ۱۸۲ ص. :
یادداشت	عنوان اصلی: An Introduction to Group Theory Applications to Mathematical Music Theory. :
یادداشت	مولفان فلور اسف -سانچ، اکتاوی آ. گکستین -کوبی تو، امیلیو لویس پابلو، ماریانا موتیل، جاتین دو پله سیس. :
یادداشت	کتابنامه. :
عنوان دیگر	کاربردهای آن در نظریه موسیقی ریاضی. :
موضوع	نظریه گروه‌ها :
موضوع	Group theory :
موضوع	ریاضیات :
موضوع	Mathematics :
موضوع	موسیقی :
موضوع	Music :
رده - دیوید	0127057V :
رده - برنارد	QA17472/م۷ ۱۳۹۷ :
شعبه جزوده	اسف-سانچس، فلور :
شعبه افزوده	Aceff-Sánchez, Flor :
شعبه : ده	صباغان، مسعود، مترجم :
شعبه افزوده	میرنوری، حسن، مترجم :
شعبه افزوده	دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان :
شعبه افزوده	Islamic Azad University, Lahijan Branch :
وضعیت فهرست نویسی	فبا :

عنوان کتاب: مقدمه ای بر نظریه گروه: کاربردهای آن در نظریه موسیقی ریاضی
 مؤلفین: فلور اسف - سانچ ... [و دیگران]
 مترجمین: مسعود صباغان، حسن میرنوری

نوبت چاپ : اول سال چاپ: ۱۳۹۷ تیراژ: ۲۰۰۰
 تعداد صفحات: ۱۸۲ قطع: وزیری شابک: ۷-۵۲۳۵-۱۰-۹۶۸-۹
 ناشر: دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان قیمت: ۴۲۰۰۰۰ ریال
 لیتوگرافی، چاپ و صحافی: سازمان چاپ و انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی

مرکز پخش: دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان - تلفن: ۳ - ۴۲۲۲۹۰۸۱ - ۰۱۳
 آدرس: لاهیجان، انتهای کوی شقایق، مجتمع دانشگاه آزاد، ص. پ. ۱۶۱۶
 کلیه حقوق قانونی و شرعی برای مولف و ناشر محفوظ می باشد و هیچ شخص حقیقی یا حقوقی حق تکثیر
 تمام یا قسمتی از این اثر را نداشته و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار خواهند گرفت.

پیشگفتار

موفقیت نظریه گروه شگفت‌انگیز و فوق‌العاده است. شاید، به دلیل نیرومندترین و موثرترین شاخه در همه ریاضیات باشد. نفوذ آن قویاً در همه علوم و زمینه‌های هنری (به‌خصوص، در موسیقی) و در خود ریاضیات احساس می‌شود. نظریه گروه مشخصه‌های اصلی موقعیت‌های ناهمگون که نوعی تقارن یا تبدیل در آن‌ها ظاهر می‌شود را استخراج می‌کند. یک مجموعه غیرتهی داده شده، یک عمل دوتایی روی آن تعریف می‌شود که اصول مشخصی را برآورده کند. یعنی، ارائه یک ساختار (ساختار گروه) می‌شود. مفهوم ساختار، و مفاهیم وابسته به ساختار مثل، تاریخچه، نقش مهمی در ریاضیات مدرن ایفا می‌کند.

نظریه عمومی اختارها یک ابزار نیرومند است. وقتی کسی ثابت کند که اشیاء مورد مطالعه اصول موضوع یک ساختار را برآورده می‌کند، فوراً همه نتایج معتبر آن نظریه را برای اشیاء خود بدست می‌آورد. به‌خصوص، نیازی به اثبات هر یک از نتایج نیست. در واقع، می‌توان گفت که ساختارها، دسته‌بندی شده‌های مختلف ریاضی (یا حتی اهداف مختلف در موسیقی) را ممکن می‌سازند.

کتاب حاضر بر اساس کتابی به زبان اسپانیایی تحت عنوان «Teoria de Grupos: un Primer curso» نوشته امیلیو لویس-پائوب لا^۱ است که توسط انجمن ریاضی مکزیک به چاپ رسیده است. این کتاب جدید شامل موضوعاتی است که به درسی در آن موضوع مربوط می‌شود که در گروه ریاضی دانشکده علوم دانشگاه ملی اوتاناما^۲ درصدمات مقدماتی اختیاری برای یک درس پایه در نظریه موسیقی ریاضی تدریس می‌شود.

این کتاب روش کتب دیگر امیلیو لویس-پائوب لا را در جبر خطی و جبر -روزنی دنبال می‌کند. ارائه جدیدی گزینش شده است، که زبان نمودارهای جابجایی و خاصیت‌های جهانی است، علاوه بر آن، همچنین موارد لازم در ریاضیات جدید، در فیزیک و علوم کامپیوتر معرفی می‌شوند.

۱-Emilio Lluis-Puebla

۲-Autonama

این کتاب ۴ فصل دارد. هربخش شامل تعدادی مسائل است که با خلاقیت با استفاده از مطالبی که آن‌جا ارائه شده قابل حل است. این مسائل یک قسمت اساسی کتاب را تشکیل می‌دهند. آن‌ها با هدف تقویت نگارش ریاضی دانشجویان طراحی شده‌اند. سرتاسر اولین ۳ فصل، مثال‌های تجسمی (که شماره‌دار نیستند) از کاربردهای نظریه گروه در نظریه موسیقی ریاضی برای دانشجویانی که از قبل دانش کمی از نظریه موسیقی دارند، گنجانده شده است.

در فصل ۴ که توسط ماریانا با دقت تهیه شده است، کاربردهای نظریه گروه در نظریه موسیقی به مفصل ارائه شده است. بعضی جنبه‌های اساسی نظریه موسیقی ریاضی تشریح می‌شوند، در ادامه، بعضی اجزاء اصلی هر دو حوزه به خواننده‌های با زمینه‌های متفاوت ارائه می‌شود. به این دلیل، مثلاً ما از بعضی از موضوعات نظری برجسته‌ی فصل‌های قبل دنبال می‌شویم. عبارات موسیقایی طولانی‌تر، معرکه می‌شوند که مورد نیاز هستند به‌طوری که خواننده‌ی بدون زمینه موسیقایی بتواند اساس رنگ ایجاد نظریه گروه برای تشریح روابط موسیقایی مشخصی را متوجه شود. از طرف دیگر، برای ارائه آشنا با فقط زمینه موسیقی، این فصل عناصر عینی، همچنین انگیزه، را برای شروع در نظریه گروه، بیان می‌کند.

مؤلف چهارم معلومات ویژه‌ای برای کمک ارزشمند در نسخه انگلیسی کتاب دکتر فلور اسف - سانچز ارائه می‌دهد، که علاوه بر سلامتی آن‌ها، به تلاش و علاقه خود را در جزء جزء این کتاب با نظرات موسیقایی و ریاضی آن‌ها، است. بدون ایشان، این کتاب هرگز بوجود نمی‌آمد.

فلور اسف-سانچ

دانشگاه ملی آتوناما در مکزیک

اوکتاوی آ. آگستین-آکوبی نو*

دانشگاه کانادا

فهرست

پیشگفتار

فهرست

فهرست نمودارها

مقدمه

مقدمه راجع

فصل ۱

۱-۱ عمل‌های دتایی

۱-۲ ساختمان‌های جبری

۱-۳ خواص مقدماتی

۱-۴ گروه‌های دوری

فصل ۲

۲-۱ دنباله‌های کامل

۲-۲ گروه‌های خارج‌قسمتی

۲-۳ قضایای یکریختی

۲-۴ حاصل ضرب‌ها

فصل ۳

۳-۱ گروه‌های آبدلی متناهی تولید شده

۳-۲ جایگشت‌ها، مدارها و قضایای سیلو

۳-۳ گروه‌های آزاد

۳-۴ حاصل ضرب تانسوری

فصل ۴

۴-۱ زمینه موسیقی

۴-۲ انتقال‌های I و T

۱۴۰	۴-۳ انتقال‌های P ، L و R
۱۴۶	۴-۴ یکریختی بین دو گروه PLR و TI
۱۵۰	۴-۵ دوگانی گروه‌های TI و PLR
۱۵۷	۴-۶ جواب‌های مسائل فصل ۴
۱۶۳	۵ نمادها
۱۶۵	۶ نمایه
۱۶۹	۷ واژه‌نامه
۱۷۶	۸ کتاب‌شناسی و مراجع
۱۷۸	۹ نویسنده‌ها و شرح همنسری از کتاب
۱۸۱	۱۰ ته‌نویس‌ها
	مشخصات مترجم

فهرست، نمودارها

۲۰	۱-۱ گام کروماتیک
۲۰	۱-۲ گام C ماژور (سمت چپ) و گام C مینور (سمت راست)
۲۸	۱-۳ موتیف‌ها با تقارن
۲۹	۱-۴ نمایش هندسی تقارن‌ها
۳۷	۱-۵ ضرب فاصله فرود $((p, v), -)$ در $((-1, 2))$ برای بدست آوردن $((1, 9), +)$
۸۴	۲-۱ موتیفی با سه نت
۱۳۱	۴-۱ نت‌هایی که به عناصر $\mathbb{Z}_{11}$ وابسته می‌شوند
۱۳۶	۴-۲ دوازده انتقال آکورد تریاد C ماژور $\{0, 4, 7\}$
۱۳۷	۴-۳ 12 معکوس آکورد تریاد C ماژور $\{0, 4, 7\}$
۱۴۰	۴-۴ طنین-شبکه (شبکه آهنگی) ریمان-آتینگن
۱۵۳	۴-۵ شرح موسیقایی تساوی $T_*(L(C)) = L(T_*(C))$
۱۵۴	۴-۶ شرح موسیقایی تساوی $I_*(R(a)) = R(I_*(a))$

مقدمه

ریاضیات از مراحل اول زندگی انسان وجود دارد. عملاً هر انسان به تعبیری یک ریاضیدان است، از آن‌هایی که از ریاضیات استفاده می‌کنند تا آن‌هایی که ریاضیات جدید را کشف و ایجاد می‌کنند. هر کس نیز، تا اندازه‌ای، یک فیلسوف ریاضی است. در واقع، کسانی که اندازه‌گیری کنند، مردم یا اشیاء را تشخیص دهند، بشمارند، یا بگویند «به روشنی دو بعلاوه دو مساوی چهار» ریاضیدان یا فیلسوف ریاضی است. با این حال، تعداد بسیار کمی از مردم در خلق، ایجاد، تدریس، تحقیق تا ریاضیات مورد پسند عامه متخصص می‌شوند.

ریاضیات یک رشته و بنیاد شهرنشینی ما است. از نیمه اول قرن ۱۹، با توجه به پیشرفت در زمینه‌های مختلف، علم ریاضی یکی شده است، و نام «ریاضیات» به عنوان یک رشته واحد تصدیق می‌شود. طبق نظر وژه ناس آریگو کن^۱ «mathema» یعنی «تبحر»، «manthanein» از مصدر «آموختن» است، ریشه «mendh» یعنی زمان مجهول «دانش». به عبارت دیگر، به آموختن وابسته است. به معنی تلوحی. «امیات یعنی «درست آموختن چیست؟» همچنین گفته می‌شود که ریاضیات «علم فضیلت» است.

با این حال، همچنین می‌توان گفت که انسان‌هایی هستند که اطلاعات کم و به روز شده‌ای در مورد شاخه‌ها و زیرشاخه‌های ریاضیات دارند. به عنوان مثال، میان سال‌های جوان زمان ما می‌توانند تصوّر تقریبی خوبی از الکترون‌ها، کهکشان‌ها، سیاه چاله، کد رتیک، و غیره داشته باشند. با وجود این، آن‌ها، به سختی، مفاهیم ریاضی را که قبل از نیمه اول قرن ۱۹ است را در می‌یابند. این به علت طبیعت مفاهیم ریاضیات است.

عقیده‌ی خیلی متداولی در جامعه هست که یک ریاضی‌دان کسی است که مجموعه‌ی بسیار بزرگی از اعداد طبیعی را در هر روز از زندگی خود با خود همراه دارد. همچنین معمول است که مردم فکر می‌کنند که یک ریاضی‌دان می‌داند که چگونه اعداد طبیعی را با سرعت زیاد جمع و ضرب نماید. اگر کمی درباره مفاهیمی که اکثر مردم درباره ریاضی‌دانان دارند فکر

کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که لازم نیست که به ریاضی‌دانان یک محاسبه‌گر جیبی داده شود که از عهده این کار برآیند.

وقتی کسی می‌پرسد «فرق بین یک ریاضیدان و یک حسابدار چیست؟» فرض می‌شود که این سوال با سوال «تفاوت بین x و y چیست؟» معادل است. یعنی، فرض می‌شود که آن‌ها یک کار انجام می‌دهند. اگر توضیح داده شود که تنها در موارد نادری ریاضیدان جمع و ضرب انجام می‌دهند، به نظر باورنکردنی است. همچنین باورنکردنی به نظر می‌رسد که تعداد زیادی از کتب ریاضات دشرفته معمولاً اعداد بزرگتر از ۱۰، به استثنای، شماره صفحه‌ها را، به کار نمی‌برند.

سال‌های متمادی، آموزش بچه‌ها آموختن جدول ضرب، محاسبه جمع‌های کلان، تفریق‌ها، حاصل‌ضرب‌ها، سیم‌ها و ریشه‌های دوم تأکید می‌شد، تا اعداد بسیار کوچک (با این وجود، اکثریت مردم، ایده $\sqrt{2}$ از برجستگی شخصیت آن‌ها دارند). بعد از آن، در نوجوانی، آن‌هایی که می‌توانستند جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها را انجام دهند، به نظر همکلاسی‌های خود نابغه به نظر می‌رسند، با این استعداد بالا در ریاضیات در نهایت، اگر خوش شانس بودند، به آن‌ها جمع و ضرب اعداد مختلط را آموزش می‌دادند.

بدین ترتیب، به نظر می‌رسد که، ریاضیدان کسی است که زندگی خود را با جمع و ضرب کردن (اعداد کوچک) می‌گذرانند، مثل کسی که متصدی حساب بانکداری در یک حرفه باشد. این تفکر در اکثریتی از مردم وجود دارد. اصلاً این‌طور نیست. ریاضیدانان کسانی نیستند که محاسبه یا چهار عمل اصلی حساب را انجام می‌دهند. آن‌ها کسانی هستند که به‌گونگی محاسبه کردن یا انجام عملیات را اختراع می‌کنند. ریاضیات، انجام دادن، صورت‌گرفتن، ساختن، و استدلال کردن است.

توانایی در شمارش، تا اندازه‌ای برای تجسم اعداد لازم بود، مثلاً، با انگشتان سپس چرتکه یک قدم به جلو را مجسم کرد، اگرچه شمارش با انگشتان محدود شده بود، اما باز هم در بعضی جاها استفاده می‌شد. بعداً، ماشین حساب که توسط پاسکال در سال ۱۶۴۲ اختراع شد به مردم اجازه داد تا جمع و تفریق را به صورت یک سیستم نوآورانه از ابزارها انجام دهند امروزه، ماشین

حساب جیبی به ما اجازه می‌دهد که، محاسباتی که قبلاً باید سال‌ها طول می‌کشید را در چند ثانیه انجام دهیم، و نیز به ما اجازه داد تا از جداول لگاریتم و روش اسلاید (slide rule) خلاص شویم.

با این حال، به‌طور کلی، دانشجویان و فارغ‌التحصیلان هر حوزه به سوال «حاصل جمع چیست؟» یا «جمع چیست» علازم گذراندن دوازده سال انجام دادن حاصل جمع، و این که حاصل جمع یک مفهوم اولیه است، شانه‌های خود را بالا می‌اندازند. همچنین معمول است که وقتی یک بچه، یا یک نوجوان یا یک سالمند با هر درجه شغلی با یک مسأله مواجه می‌شود، نمی‌داند آن جمع کند، تفریق کند، ضرب کند یا گریه کند.

مفهوم عمل دوتایی، قانون ترکیب، یکی از قدیمی‌ترین عمل در ریاضیات است و به زمان مصر قدیم و بابلیان [۸] بازمی‌گردد که آن‌ها همان وقت روشی برای محاسبه جمع و ضرب اعداد صحیح مثبت و اعداد گویای مثبت داشتند (فراموش نکنید که آن‌ها سیستم اعدادی که ما آن‌ها را به کار می‌بریم را نداشتند). با این حال، با گذشت زمان، ریاضی‌دانان دریافته‌اند که مهم‌ترین قسمت بدون شک جداول جمع یا ضرب «اعداد» نیست، و خود مجموعه و عمل دوتایی تعریف شده روی آن اهمیت دارد. عمل دوتایی همراه با خواص معینی که باید تعریف شوند، راهی برای مفهوم اساسی یک گروه ارائه می‌داد.

از نقطه نظر تاریخی، مفهوم عمل دوتایی، یا قانون ترکیب، به دو روش گسترش یافت، که در آن به‌طور حتم می‌توانیم شباهت بی‌تردیدی با حالت‌های عددی صریح و بابلیان [B] پیدا کنیم. مرحله اول توسط گاووس^۹ بود، وقتی او فرم‌های درجه دوم را با یک اصل صحیح مطالعه کرد، و دید قانون ترکیب با رده‌های هم‌ارزی خاصی قابل مقایسه است. مهم دوم در مفهوم گروه، در نظریه جایگزاری‌ها به اوج خود رسید (به واسطه توسعه ایده‌های لگرنژ^{۱۰} و اندرموند^{۱۱} در حل معادلات جبری). با این حال، این ایده‌ها به‌صورت سطحی باقی ماند تا زمان گالوا^{۱۲} که او مطالعه معادلات جبری را به مطالعه گروه جایگشت‌های وابسته به آن‌ها محدود کرد.

۸-Gauss

۹-Lagrange

۱۰-Vandermonde

۱۱-Galios