

بهبود سازی خطی

(تحقیق در عملیات)

مجدد سلیمانی دامنه
استاد دانشگاه تهران



شماره مسلسل ۱۰۷۲۴

شماره انتشار ۴۴۰۸

انتشارات دانشگاه تهران

سرشناسه	: سلیمانی دامنه، مجید، ۱۳۵۷-
عنوان و نام پدیدآور	: بهینه‌سازی خطی: (تحقیق در عملیات) / مجید سلیمانی دامنه.
مشخصات نشر	: تهران: دانشگاه تهران، مؤسسه انتشارات، ۱۴۰۰.
مشخصات ظاهری	: ص.
فروست	: انتشارات دانشگاه تهران؛ شماره انتشار ۴۴۰۸.
شابک	: 978-964-03-0193-7
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
عنوان دیگر	: تحقیق در عملیات.
موضوع	: برنامه‌ریزی خطی
موضوع	: Linear Programming
شناسه افزوده	: دانشگاه تهران. مؤسسه انتشارات. University of Tehran. Press
رده‌بندی کنگره	: T ۵۷/۷۴ ۱۴۰۰
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۹۷۲۲
شماره کتابشناسی ملی	: ۷۶۰۳۴۵۳

این کتاب مشمول قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان است. کتاب به هر روش اعم از فتوکپی، ریسوگرافی، تهیه فایل‌های pdf، لوح فشرده، بازنویسی در وبلاگ‌ها، سایت‌ها، مجله‌ها و کتاب، بدون اجازه کتبی ناشر مجاز نیست و موجب پیگرد قانونی می‌شود و تمامی حقوق برای ناشر محفوظ است.
(این کتاب با کاغذ حمایتی به چاپ رسیده است.)



عنوان: بهینه‌سازی خطی (تحقیق در عملیات)

تألیف: مجید سلیمانی دامنه

نوبت چاپ: اول

تاریخ انتشار: ۱۴۰۰

شمارگان: ۱۰۰ نسخه

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

چاپ و صحافی: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

«مسئولیت صحت مطالب کتاب با مؤلف است»

بها: ۱،۱۰۰،۰۰۰ ریال

خیابان کارگر شمالی - خیابان شهید فرش مقدم - مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

پست الکترونیک: press @ ut. ac. ir - تارنما: http://press.ut.ac.ir

پخش و فروش: تلفکس ۸۸۳۳۸۷۱۲

پیشگفتار

بهینه‌سازی (برنامه‌ریزی ریاضی) یکی از شاخه‌های بسیار کارآمد در علوم مختلف شامل ریاضیات کاربردی، مهندسی، مدیریت، اقتصاد و مالی است. یکی از پایه‌ای‌ترین مباحث در این زمینه، برنامه‌ریزی خطی (بهینه‌سازی خطی) است که به ماکزیمم/مینیمم کردن یک تابع خطی روی مجموعه جواب یک دستگاه معادلات و نامعادلات خطی می‌پردازد.

دانشجویان علاقه‌مند به ریاضیات، با مطالعه بهینه‌سازی خطی، کاربردهای جالبی از جبر خطی و نظریه ماتریس‌ها را در عمل خواهند دید. از طرفی دیگر، مطالعه برنامه‌ریزی خطی برای دانشجویان و محققانی که می‌خواهند در زمینه بهینه‌سازی، تحقیق در عملیات و کاربردهای آنها و شاخه‌های وابسته فعالیت علمی و عملی نمایند، بسیار ضروری است. مسائل برنامه‌ریزی خطی پایه‌ای‌ترین کلاس مسائل بهینه‌سازی هستند و ایده بخش زیادی از پیشرفت‌های حاصل در سایر شاخه‌های بهینه‌سازی و برنامه‌ریزی ریاضی، شامل برنامه‌ریزی صحیح، صفر و یک و ترکیبیاتی [۷۳، ۶۱، ۵۶، ۴۰، ۲۶، ۱۸]، برنامه‌ریزی غیرخطی [۷۰، ۱۱، ۹، ۶]، برنامه‌ریزی چندهدفه [۶۶، ۵۴، ۵۳، ۴۱، ۲۵] و بهینه‌سازی محدب [۱۵] از نظریه بهینه‌سازی خطی گرفته شده است. به علاوه، مسائل متعددی در دنیای (پروژه‌های) واقعی وجود دارند که می‌توان آنها را به صورت برنامه‌ریزی خطی مدل کرد [۵۶، ۲۰، ۴]. از این موارد، می‌توان به مساله حمل و نقل [۶۱، ۲۶]، مساله کوله‌پشتی [۶۱، ۴۴]، مساله ارزیابی عملکرد شعب بانک‌ها، سازمان‌های ورزشی، و دانشگاه‌ها [۷۲، ۴۸، ۱۹]، و مسائل مالی، اقتصادی و مدیریتی [۵۶، ۲۰، ۴] اشاره کرد. علاوه بر موارد کاربردی بالا، مسائل زیادی در سایر شاخه‌های ریاضیات مانند نظریه گراف و نظریه اعداد وجود دارد که می‌توان آنها را در قالب مدل‌های بهینه‌سازی خطی فرموله کرد [۵۷، ۳۱]. به چنین دلایلی، در اکثر دانشگاه‌های معتبر دنیا بهینه‌سازی خطی یکی از دروس الزامی رشته‌هایی چون ریاضی، مهندسی صنایع، مهندسی برق، مهندسی و علوم کامپیوتر، مدیریت صنعتی، اقتصاد و ... است. البته این مقوله در برخی رشته‌ها و دانشگاه‌ها با عنوان «تحقیق در عملیات» ارائه می‌شود.

کتاب حاضر در راستای پاسخ به نیاز دانشجویان و محققان فارسی‌زبان رشته‌های مورد اشاره به داشتن یک مرجع روان و جامع به زبان فارسی در زمینه بهینه‌سازی خطی، نگاشته شده است. این کتاب، که در هشت فصل تنظیم شده است، به معرفی نظری، الگوریتمی و محاسباتی بهینه‌سازی خطی می‌پردازد.

فصل اول کتاب، مفاهیم و قضایایی مقدماتی از آنالیز ریاضی و جبر خطی را در بردارد، که در فصل‌های

بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

فصل دوم به معرفی بهینه‌سازی خطی می‌پردازد و چند مدل‌سازی ساده را برای درک بهتر موضوع پیش روی خواننده قرار می‌دهد. به علاوه، این فصل نمایش‌های مختلف مسائل برنامه‌ریزی خطی، تعریف جواب و یک روش هندسی برای حل را در بر دارد.

فصل سوم در نقطه اشتراک بهینه‌سازی خطی و آنالیز محدب قرار دارد. در این فصل، مفاهیمی مانند مجموعه‌های محدب و چندوجهی معرفی و بررسی می‌شوند. نقاط راسی و چگونگی بدست آوردن آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند و سپس قضیه اساسی برنامه‌ریزی خطی، که نقشی کلیدی در طراحی الگوریتم سیمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دارد، بیان و اثبات می‌شود. مفاهیمی مانند جهت (شدنی/بهبود دهنده/دورشنونده/راسی) معرفی می‌شوند و جواب‌های پایه‌ای دستگاه‌های خطی مورد کنکاش قرار می‌گیرند. فصل چهارم به قضیه نمایش و نتایج آن پیرامون شرایط لازم و کافی برای وجود جواب بهینه می‌پردازد. در فصل پنجم، الگوریتم سیمپلکس برای حل مسائل بهینه‌سازی خطی، به همراه شرح مفصل تئوری و چگونگی اجرای آن با استفاده از جدول‌های سیمپلکس، آورده شده است. این الگوریتم از سه منظر جبری، هندسی و محاسباتی بررسی شده است. به تباهیدگی و اثرات آن بر الگوریتم سیمپلکس پرداخته شده و همگرایی الگوریتم مورد تحلیل قرار گرفته است. به چگونگی تشخیص و یافتن جواب‌های بهینه چندگانه با استفاده از الگوریتم سیمپلکس پرداخته شده است. پیچیدگی محاسباتی الگوریتم نیز به اختصار مورد اشاره قرار گرفته است.

فصل ششم، به یافتن جواب پایه‌ای شدنی آغازین و راه‌اندازی الگوریتم سیمپلکس با رویکرد استفاده از متغیرهای مصنوعی اختصاص یافته است. در این فصل، متغیرهای مصنوعی و نقش آن‌ها در بهینه‌سازی خطی به همراه روش‌های دوحله‌ای و M - بزرگ تشریح شده‌اند.

در فصل هفتم، برخی قضایای دگرین (چاره‌ای) بیان و اثبات شده و با استفاده از آن‌ها شرایط بهینگی کاروش - کان - تاکر (KKT) بدست آمده است.

فصل هشتم، به تعریف دوگان در برنامه‌ریزی خطی، قضایای دوگانی و نتایج آنها (شامل شرایط کمبود - مکمل و تحلیل حساسیت) و الگوریتم سیمپلکس - دوگان می‌پردازد. در این فصل، به معرفی چند نرم‌افزار و حل‌کننده موجود برای مسائل برنامه‌ریزی خطی نیز پرداخته‌ایم.

فهرست

۱	۱	نمادگذاری، مفاهیم و قضایای مورد نیاز
۱	۱.۱	علائم اختصاری
۱	۲.۱	بردارها و ماتریس‌ها
۴	۳.۱	مجموعه‌ها، توابع و دنباله‌ها
۱۰	۴.۱	تمرین‌ها
۱۲	۵.۱	واژه‌نامه
۱۳	۲	بهینه‌سازی خطی چیست؟
۱۳	۱.۲	تعریف مساله
۱۵	۲.۲	مدل‌سازی
۱۹	۳.۲	نمایش ماتریسی - برداری مسائل بهینه‌سازی خطی
۲۲	۴.۲	تعریف جواب و حل ترسیمی

۳۱	۵.۲ مسائل متعارفی و استاندارد
۳۶	۶.۲ مسائل حل شده
۳۹	۷.۲ تمرین‌ها
۴۲	۸.۲ واژه‌نامه
۴۵	۳ مجموعه‌های محدب و چندوجهی
۴۵	۱.۳ مجموعه‌های محدب
۵۲	۲.۳ نقاط راسی
۵۲	۱.۲.۳ مفهوم نقطه راسی
۵۸	۲.۲.۳ وجود نقطه راسی
۶۲	۳.۲.۳ بدست آوردن نقاط راسی یک مجموعه چندوجهی
۶۵	۳.۳ قضیه اساسی برنامه‌ریزی خطی
۶۶	۴.۳ برخی مفاهیم مرتبط با چندوجهی
۷۱	۵.۳ جهت‌ها
۷۲	۱.۵.۳ جهت بهبود دهنده
۷۲	۲.۵.۳ جهت شدنی
۷۶	۳.۵.۳ جهت دورشونده
۸۱	۴.۵.۳ جهت راسی
۸۶	۶.۳ جواب‌های پایه‌ای دستگاه‌های خطی
۸۶	۱.۶.۳ دستگاه $Ax = b$
۹۰	۲.۶.۳ دستگاه $Ax = b, x \geq 0_n$
۹۸	۷.۳ جواب‌های پایه‌ای تبه‌گن
۱۰۰	۸.۳ مسائل حل شده
۱۰۳	۹.۳ تمرین‌ها
۱۰۶	۱۰.۳ تحقیق کنید
۱۰۸	۱۱.۳ واژه‌نامه

۱۱۱	۴	قضیه نمایش و وجود جواب بهینه
۱۱۱	۱.۴	قضیه نمایش
۱۲۰	۲.۴	وجود جواب بهینه: شرط لازم و کافی
۱۲۴	۳.۴	قضیه نمایش برای مجموعه جواب‌های بهینه
۱۲۶	۴.۴	یک مساله حل شده
۱۲۷	۵.۴	تمرین‌ها
۱۲۸	۶.۴	تحقیق کنید
۱۲۹	۷.۴	واژه‌نامه
۱۳۱	۵	الگوریتم سیمپلکس
۱۳۱	۱.۵	یک چالش محاسباتی
۱۳۲	۲.۵	مقدمه و نمادگذاری
۱۳۲	۱.۲.۵	مقدمه
۱۳۳	۲.۲.۵	نمادگذاری و یک تعریف
۱۳۷	۳.۲.۵	خاصیت کانونی BFS ها
۱۳۸	۳.۵	تئوری الگوریتم سیمپلکس
۱۳۸	۱.۳.۵	مساله تقلیل یافته
۱۴۲	۲.۳.۵	دو نتیجه کلیدی
۱۴۷	۳.۳.۵	الگوریتم
۱۵۸	۴.۳.۵	یافتن یک BFS آغازین
۱۵۹	۵.۳.۵	الگوریتم سیمپلکس با استفاده از جدول
۱۶۷	۶.۳.۵	رابطه بین پایه و سایر کمیت‌ها قبل و بعد از محورگیری
۱۷۰	۷.۳.۵	اعتبار فرم جدولی الگوریتم
۱۷۲	۴.۵	جهت و طول گام حرکت
۱۷۷	۵.۵	تباهیدگی در الگوریتم سیمپلکس
۱۷۷	۱.۵.۵	اثرات محاسباتی تباهیدگی
۱۷۹	۲.۵.۵	تعداد پایه‌های متناظر با یک BFS
۱۸۱	۳.۵.۵	همگرایی الگوریتم

۱۸۶	۶.۵	جواب‌های بهینه دگرین در الگوریتم سیمپلکس
۱۹۴	۷.۵	چند موضوع تکمیلی
۲۰۳	۸.۵	مسائل حل شده
۲۰۷	۹.۵	تمرین‌ها
۲۱۵	۱۰.۵	تحقیق کنید
۲۱۵	۱۱.۵	واژه‌نامه
۲۱۹	۶	متغیرهای مصنوعی
۲۱۹	۱.۶	اضافه کردن متغیرهای مصنوعی
۲۲۱	۲.۶	روش دو مرحله‌ای
۲۲۱	۱.۲.۶	معرفی روش
۲۲۶	۲.۲.۶	چند مثال
۲۳۷	۳.۶	روش M - بزرگ
۲۴۵	۴.۶	یک مساله حل شده
۲۴۶	۵.۶	تمرین‌ها
۲۴۹	۶.۶	تحقیق کنید
۲۵۰	۷.۶	واژه‌نامه
۲۵۱	۷	قضایای دگرین و شرایط بهینگی
۲۵۱	۱.۷	قضایای دگرین (چاره‌ای)
۲۵۴	۲.۷	شرایط بهینگی
۲۵۵	۱.۲.۷	قضیه هندسی KKT
۲۵۹	۲.۲.۷	قضیه جبری KKT
۲۶۵	۳.۷	تمرین‌ها
۲۶۷	۴.۷	تحقیق کنید