با اسم دوست

فراتر از هندسه

ریاضیات جدید از فضا و فرم

دکتر جان تابک

مترجم

شبنم ضرغامی(دانشجوی دکترای ریاضی)

www.ketab.ir

۲۱۳ ۱۶۹۴سرشناسه : تاباک، جان
Tabak, John
عنوان و نام پدیدآور : فراتر از هندسه: ریاضیات جدید از فضا و فرم/ جان تاباک؛ مترجم شبنم ضرغامی.
مشخصات نشر : زنجان : قلم مهر، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری : ۲۰۰ ص.: مصور (رنگی).
شابک : 978-622-6494-81-6
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
یادداشت : عنوان اصلی: Beyond geometry : a new mathematics of space and form, c2011.
عنوان دیگر : ریاضیات جدید از فضا و فرم.
موضوع : توپولوژی
موضوع : Topology
موضوع : نظریه مجموعه‌ها
موضوع : Set theory
موضوع : هندسه
موضوع : Geometry
شناسه افزوده : ضرغامی، شبنم، ۱۳۶۰-، مترجم
رده بندی کنگره : QA۶۱۱
رده بندی دیویی : ۵۱۶
شماره کتابشناسی ملی : ۷۲۶۴۶۵۶

www.ketab.ir

انتشارات قلم‌مهر
www.tabassom.org

فراتر از هندسه؛ ریاضیات جدید از فضا و فرم

نویسنده: جان تاباک

مترجم: شبنم ضرغامی

ناشر: انتشارات قلم‌مهر

صفحه‌آرایی و تنظیم: موسسه فرهنگی هنری تبسم قلم مهر

شابک: ۶-۸۱-۶۴۹۴-۶۲۲-۹۷۸

نوبت چاپ: اول ۱۳۹۹ شمارگان: ۱۰۰۰ جلد

چاپ و صحافی: پیشگام قیمت: ۴۰۰۰۰۰ ریال

فهرست

مقدمه ۷

فصل اول: توپولوژی؛ پیش از تاریخ ۱۱

اصول موضوعه اقلیدس ۱۲

تبدیلات اقلیدسی ۱۷

آغاز حسابان ۲۱

فصل دوم: شکست شهود ۲۹

یک جایگزین برای اصول بدیهی اقلیدس ۳۰

برنارد بولتزانو و محدودیت بیشتر در مورد استدلال هندسی ۳۴

فصل سوم: یک چشم‌انداز جدید ریاضی ۴۲

ریچارد ددکیند و پیوستگی ۴۳

جورج کانتور و نظریه مجموعه‌ها ۴۷

مجموعه‌های به ظاهر متفاوت، اما در واقع مشابه: قسمت اول ۵۵

مجموعه‌های ظاهراً مختلف، اما در واقع مشابه: قسمت دوم ۵۸

فصل چهارم: اولین فضاهای توپولوژیکی ۶۴

فلیکس هاسدورف و اولین فضاهای توپولوژیکی انتزاعی ۶۵

تبدیلات توپولوژیکی ۷۷

نقش مثال‌ها و مثال‌های نقض در توپولوژی ۸۵

فصل پنجم: اصول استاندارد و سه خاصیت توپولوژیکی ۸۹

اصول موضوعه استاندارد ۹۰

فصل ششم: مدارس توپولوژی ۹۴

مدرسه لهستانی ۹۵

توپولوژی در دانشگاه تگزاس ۱۰۲

توپولوژی در ژاپن ۱۰۸

فصل هفتم: نظریه بُعد ۱۱۴

تعاریف استقرایی بُعد ۱۱۸

تعریف غیر استقرایی بُعد و نتایج بیشتر از نظریه بُعد ۱۲۷

www.ketab.ir

مفهومی دیگر از بُعد: بُعد هانوس دورف ۱۳۱
فصل هشتم: توپولوژی و موسسات مدرن ریاضی ۱۳۹
توپولوژی و زبان ریاضیات ۱۳۹
توپولوژی در آنالیزها (تحلیل ها) ۱۴۳
ساختارهای ریاضی و توپولوژی ۱۵۴
نتیجه گیری ۱۵۸
مصاحبه‌ای با پروفسور اِسکات ویلیامز ۱۶۰
رویداد نگاری ۱۷۱
واژه نامه ۱۸۸
منابع بیشتر ۱۹۵
کارهای مدرن ۱۹۵
کارهای اصیل ۱۹۷
منابع اینترنتی ۱۹۹
گاه نامه‌ها: از طریق مِیل و آنلاین ۲۰۰

www.ketab.ir

مقدمه

برای هزاران سال، هندسه اقلیدسی، هندسه یونانیان باستان، استانداردی برای دقت در مجموعه ریاضیات قرار گرفته است. هندسه اقلیدسی تنها شاخه‌ای از ریاضیات است که به طور اصل موضوعی توسعه داده شده است. هندسه اقلیدسی، با قبول اغلب فیلسوفان و ریاضیدانان، زبان ریاضیات بود. با این حال، در اوایل قرن نوزدهم، ریاضیدانان، هندسه بسیار متفاوتی از هندسه اقلیدسی را به سادگی با انتخاب اصول متفاوت استفاده شده توسط اقلیدس، معرفی کردند. این هندسه‌های جدید به طور داخلی سازگار است به این معنا که ریاضیدانان می‌توانند قضایایی در این هندسه مطرح کنند که می‌توان ثابت کرد هم درست و هم نادرست هستند. برخی از این هندسه‌های جایگزین حتی بینشی از جنبه‌های خاصی از فضاهای فیزیکی ارائه می‌کنند. با این حال، ریاضیدانان و فیلسوفان، که به مدت طولانی معتقد بودند که هندسه اقلیدسی تجسم حقیقت است، هندسه اقلیدسی را به عنوان یکی سیستم اصل موضوعی در میان بسیاری از سیستم‌ها می‌بینند. با این وجود، نظم هندسه، به طور مناسب گسترش یافته، جایگاه خود را در مرکز تفکر علمی تا آخرین دهه از قرن نوزدهم نگه داشته است.

با این وجود، ثابت می‌شود که هندسه نسبت به انتظارات موجود از آن، در حالت مناسبی است. به عنوان مثال، آنالیز، شاخه‌ای از ریاضیات است که در حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) دارد، در اصل به زبان هندسه بیان می‌شود، اما تلاش برای بیان ایده‌های آنالیزی در زبان هندسی منجر به مشکلات منطقی می‌شود. از لحاظ مفهومی، هندسه به اندازه کافی به عنوان پایه‌ای برای ریاضیات "جدید" که در طول نیمه دوم قرن نوزدهم توسعه داده شد، غنی نیست. در نتیجه، ریاضیدانان شروع به جستجوی یک زبان ریاضی کردند که با آن به بیان دیدگاه‌های خود بپردازند. آنها آن را در زبان مجموعه‌ها یافتند.

نظریه مجموعه‌ها با مطالعه مجموعه‌های نقاط هندسی، نقطه در فضا، نقطه در صفحه، و نقطه روی خط، آغاز شد اما ریاضیدانان به زودی کشف کردند که ایده‌های نظری مجموعه‌ها

www.ketab.ir

ل مجموعه توابع، مجموعه خطوط و مجموعه صفحات نیز کاربرد دارند. در واقع، بسیاری از
سیدانان توصیف هر گونه معنای فراتر از ریاضی در همه زمینه‌ها بر حسب نقاط را متوقف
ند. برای آنها، نقاط فقط عناصر مجموعه‌ها بودند، و آنها شروع به مطالعه "مجموعه‌های
ه مجرد" با یک ساختار تعرف شده روی آنها به نام توپولوژی کردند، ایده دیگری از
العه مجموعه‌هایی از نقاط هندسی ایجاد شد. این مجموعه‌ها از نقاط مجرد، هر یک مجهز
یک یا چند توپولوژی است، که به نام فضاهای توپولوژیک نامیده می‌شوند.

بسیاری از ریاضیدانان توجه خود را به مطالعه فضاهای توپولوژیک معطوف و بسیاری از
شافات جالب و سودمندی را ارائه کرده‌اند. ارزش این تحقیقات از این واقعیت سرچشمه
گیرد که زبان نظریه مجموعه‌ها به طور گسترده‌ای قابل اجرا است. کشف‌ها در مورد خواص
موعه‌های مجرد نیز در تنظیمات عملی نیز اعمال می‌شود. زبان نظریه مجموعه‌ها به زبان
ضیات تبدیل شد، و همراه با جبر و آنالیز، توپولوژی یکی از سه شاخه اصلی ریاضیات شد.

فراتر از هندسه توضیح می‌دهد که چگونه توپولوژی نظریه مجموعه توسعه یافته و چرا
ون یک جایگاه اصلی در ریاضیات دارد. چون این پیشگامان ریاضی، توپولوژی نظریه
موعه‌ها را در چشم انداز خود به طوری کلاسیک توسعه داده‌اند، شباهت مفهومی نزدیکی
ی توسعه توپولوژی نظریه مجموعه‌ها و هندسه وجود دارد. در نهایت، فصل ۱ توضیح
دهد که چگونه متخصصان آنالیز، تفکر هندسی را برای توسعه خود از حسابان استفاده
ده‌اند.

فصل ۲ شرح می‌دهد که چگونه تفکر هندسی کلاسیک نمی تواند بسیاری از پدیده‌هایی
تحقیقات قرن نوزدهم نشان می‌دهد به درستی بیان کند. ریاضیدانانی مانند جورج کانتور و
چارد ددکیند، با ایجاد یک نظریه مجموعه‌ها به این نقص پاسخ دادند. تلاش‌های آنها برای
سعه یک چارچوب مفهومی جدید برای ریاضیات در فصل ۳ شرح داده می‌شود.

کار کانتور و ددکیند در اوایل توسط متخصصان توپولوژی، به خصوص فلیکس هاسدورف
رسمیت شناخته شد. فضای توپولوژیک مجرد او، به عنوان یک مفهوم از خواص توپولوژیکی

www.ketab.ir

در بخش ۴ شرح داده می‌شود. خواص هندسی آن دسته از خواصی هستند که تحت تبدیل هندسی بدون تغییر باقی می‌مانند و خواص توپولوژیکی دقیقا آن خواصی هستند که تحت تبدیلات توپولوژیکی بدون تغییر می‌مانند. تبدیلات اقلیدسی برای توصیف نسبتا آسان هستند؛ تبدیلات توپولوژیکی کمتر بصری بوده اما به مراتب مفیدتر هستند. در حالی که هر تبدیل اقلیدسی یک تغییر و تبدیل توپولوژیکی است، اما بسیاری از تبدیلات توپولوژیکی تبدیلات اقلیدسی نیستند، و لذا خواصی که تحت تبدیلات توپولوژیکی حفظ می‌شوند کاملا متفاوت از خواص اقلیدسی هستند. ساخت این ایده‌های دقیق هدف فصل‌های ۴ و ۵ می‌باشد.

توپولوژی بیش از بسیاری از شاخه‌های ریاضیات، با جنجال همراه بوده است. این امر در بسیاری از مدارس که متخصص توپولوژی هستند، دیده می‌شود. مدرسه لهستانی از توپولوژی در مدت کوتاهی پس از پایان جنگ جهانی اول وقتی لهستان به عنوان یک ملت بازسازی شد، تاسیس شد. ریاضیدانان لهستانی که مشتاق حضور در عرصه بودند، تلاش‌های خود را در چند شاخه از ریاضیات متمرکز کردند. توپولوژی یکی از این شاخه‌ها بود. مدرسه توپولوژی که توسط آر ال مور در دانشگاه تگزاس تاسیس شد، مشهور بود زیرا بسیاری از توپولوژیست‌ها در آنجا تحت آموزش بودند، و همچنین این مدرسه به دلیل روش‌هایی که برای آموزش اتخاذ کرده بود، معروف بود. مور آنچه که به عنوان بهترین روش سقراطی از آموزش از آن یاد می‌شود، و با وجود انتقاد از ایده هایش، به کار می‌برد، با اندکی از موفقیت او به عنوان یک معلم ریاضیات عالی پیشی گرفته شده است. مدرسه ژاپنی مدت کوتاهی پس از پایان جنگ جهانی دوم توسط کیتی موریتا، یک محقق بسیار موفق در زمینه‌های جبر و توپولوژی تاسیس شد. به طور خود آموخته در توپولوژی، او الهام بخش یک نسل از ریاضیدانان ژاپنی به دلیل تلاش‌های خود در زمینه تحقیقات توپولوژیکی بود.

فصل ۷ یکی از شاخه‌های فرعی توپولوژی نظری به نام نظریه بُعد را تشریح می‌کند. اغلب به عنوان یکی از موفقیت‌های بزرگ توپولوژی نظریه مجموعه، نظریه بُعد آنچه به معنای یک فضای یک بعدی، دو بعدی، سه بعدی، یا به طور کلی، n بعدی است را به طور صریح نشان

www.ketab.ir

می‌دهد. مسدله بعد اساسی است، و شگفت آور آن که، مفهوم بعد را می‌توان به چند روش نا
هم‌ارز تعریف نمود.

فصل ۸ شرح می‌دهد که چرا توپولوژی به یک بخش ضروری از تفکر مدرن ریاضی تبدیل
شده است. متن مصاحبه با پروفسور اسکات ویلیامز، توپولوژیست و متفکر و مستقل به طور
گسترده‌ای منتشر شده.

توپولوژی متناقض است. شاید بیش از هر شاخه مهم دیگری از ریاضیات، توپولوژی نظریه
مجموعه به دنبال پاسخ به سوالاتی که خود می‌پرسد است و پاسخ‌ها اغلب بدون ارتباط با
جهان فیزیکی می‌باشند. برخلاف حسابان، که در آن سوالات اغلب به صورت پرتابه و
حجم‌های اشیاء هندسی تعبیر می‌شود، توپولوژی تقریبا به طور انحصاری مربوط به سوالات
بسیار مجرد است. با این حال، توپولوژی ارزش خود را در بسیاری از ریاضیات، حتی حسابان
ثابت کرده است، و امروز، بسیاری از شاخه‌های ریاضیات را نمی‌توان بدون ایده‌های
توپولوزیکی درک کرد. امید است که این کتاب آگاهی در مورد این زمینه حیاتی را افزایش
دهد و همچنین به عنوان یک مرجع با ارزشی باشد.

www.ketab.ir