

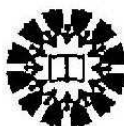
فرایندهای تصادفی پیشرفته و کاربردهای آن

(در اقتصاد، مدیریت و مهندسی مالی)

دکتر محمدحسین نورکاظمی

تهران

۱۳۹۸



سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت)

پژوهشکده تحقیق و توسعه علوم انسانی

سرشناسه: پور کاظمی، محمدحسین، ۱۳۲۳-
عنوان و نام پدیدآور: فرایندهای تصادفی پیشرفته و کاربردهای آن (در اقتصاد، مدیریت
و مهندسی مالی) / محمدحسین پور کاظمی.
مشخصات نشر: تهران: سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت)،
پژوهشکده تحقیق و توسعه علوم انسانی، ۱۳۹۸.
مشخصات ظاهری: ده، ۳۴۶ ص.: مصور، جدول.
فروست: «سمت»؛ ۲۳۱۵. اقتصاد؛ ۹۵.
شابک: ۵-۰۷۷۵-۰۲-۶۰۰-۹۷۸-۳۶۰۰۰۰ ریال

وضعیت فهرست‌نویسی: فیبا
یادداشت: پشت جلد به انگلیسی: Mohammad Hossein Pourkazemi. Advanced
Stochastic Processes and their Applications (in Economics, Management and
Financial Engineering).

داشت: واژه‌نامه.

یادداشت: کتابنامه.

یادداشت: نمایه.

موضوع: اگر دسی احتمالی، Stochastic Processes

موضوع: احتمالات، Probabilities

شناسه افزوده: سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت)،
پژوهشکده تحقیق و توسعه علوم انسانی.

The Organization for Researching and Composing University Textbooks in the
Humanities (SAMT), Institute for Research and Development in the Humanities.

رده‌بندی کنگره: ۱۳۹۸ / پ ۲۷۱ / ق ۲

رده‌بندی دیویی: ۵۱۹/۲

شماره کتابشناسی ملی: ۶۰۹۵۵۱۱

سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت)

پژوهشکده تحقیق و توسعه علوم انسانی



فرایندهای تصادفی پیشرفته و کاربردهای آن (در اقتصاد، مدیریت و مهندسی مالی)

محمدحسین پور کاظمی (عضو هیئت علمی دانشکده علوم اقتصادی دانشگاه شهید بهشتی)

ویراستار: عادلہ مشایخی

چاپ اول: زمستان ۱۳۹۸

تعداد: ۵۰۰

حروفچینی و لیتوگرافی: سمت

چاپ و صحافی: چاپ و انتشارات دانشگاه پیام نور

قیمت: ۳۶۰۰۰ ریال. در این نوبت چاپ قیمت مذکور ثابت است و فروشندگان و

عوامل توزیع مجاز به تغییر آن نیستند.

نشانی ساختمان مرکزی: تهران، بزرگراه جلال آل احمد، غرب پل یادگار امام (ره)،

روبه‌روی پمپ گاز، کد پستی ۱۴۶۳۶، تلفن ۲-۴۴۲۴۶۲۵۰.

www.samt.ac.ir

info@samt.ac.ir

@sazman_samt

هر شخص حقیقی یا حقوقی که تمام یا قسمتی از این اثر را بدون اجازه ناشر، نشر یا پخش یا عرضه
یا تکثیر یا تجدید چاپ نماید، مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۷	فصل اول: مروری بر نظریهٔ احتمال
۷	مقدمه
۷	۱-۱ تعاریف اساسی
۷	۱-۱-۱ پارادوکس راسل
۱۰	۱-۱-۲ ساختارهای احتمالات، فضاهای احتمال
۱۵	۱-۱-۳ نظریهٔ اندازه
۱۶	۱-۱-۴ تعریف اندازهٔ احتمال
۱۸	۱-۲ متغیر تصادفی
۲۲	۱-۲-۱ توابع تعریف شده با متغیر ساده
۲۵	۱-۲-۲ امید ریاضی
۲۷	۱-۳ بررسی چند توزیع خاص
۲۷	۱-۳-۱ توزیع دو جمله‌ای
۲۸	۱-۳-۲ توزیع پواسون
۲۹	۱-۳-۳ توزیع نرمال
۳۴	۱-۳-۴ تابع توزیع گاما
۳۶	۱-۴ توزیع‌های چندمتغیره
۳۹	۱-۴-۱ توزیع چندجمله‌ای
۴۰	۱-۴-۲ توزیع نرمال دو متغیره
۴۱	۱-۵ احتمال شرطی و توزیع‌های شرطی
۴۴	۱-۵-۱ قانون بیز
۴۷	۱-۵-۲ توزیع‌های شرطی
۵۰	۱-۶ توزیع‌های نمونه‌ای
۵۱	۱-۶-۱ متغیر تصادفی شاخص
۵۲	۱-۷ خلاصهٔ فصل اول
۵۲	۱-۸ تمرین‌های فصل اول

فصل دوم: آشنایی با ابزارها و بازارهای مالی

مقدمه

۲-۱ ابزارهای مالی و انواع آن

۲-۱-۱ اوراق قرضه

۲-۱-۲ انواع اوراق قرضه

۲-۱-۳ دلایل مبادله اوراق قرضه

۲-۱-۴ ریسک مبادله اوراق قرضه

۲-۲ سهام

۲-۳ مشتقات

۲-۳-۱ قراردادهای آتی و پیمانهای آتی

۲-۳-۲ معامله قراردادهای پیمانهای آتی در بازار

۲-۳-۳ اختیار

۲-۳-۴ اختیار خرید و فروش

۲-۳-۵ دلایل معامله اختیار

۲-۳-۶ معاوضه‌ها

۲-۳-۷ اوراق بهادار با پشتوانه رهن و اوراق قرضه قابل پیش‌پرداخت

۲-۴ سازمان بازارهای مالی و شاخص‌های آن

۲-۴-۱ بازارهای بورس معروف آمریکا

۲-۴-۲ شاخص‌های بازار در آمریکا

۲-۴-۳ بورس ایران و شاخص‌های مهم

۲-۵ هزینه‌های معامله

۲-۶ آربیتراژ

۲-۶-۱ سه مثال از آربیتراژ

۲-۷ خلاصه فصل دوم

۲-۸ تمرین‌های فصل دوم

فصل سوم: فرایندهای تصادفی زمان-گسسته و کاربردهای آن در مهندسی مالی

مقدمه

۳-۱ فرایندهای تصادفی زمان-گسسته

۳-۱-۱ بیان خصوصیات فرایند تصادفی

۳-۲ گام تصادفی

۳-۲-۱ ساخت گام تصادفی با میانگین و واریانس معلوم

۳-۲-۲ مدل‌سازی قیمت سهام در یک دوره زمانی درازمدت

۱۰۹	۳-۲-۳-۲ نمو گام تصادفی
۱۱۰	۳-۳-۳-۲ زنجیره‌های مارکف زمان-گسسته
۱۱۲	۳-۳-۱-۲ معادله چاپمن-کولموگوروف
۱۱۴	۳-۳-۲-۲ کاربردهای زنجیره مارکف
۱۱۷	۳-۳-۳-۳ محاسبه ارزش اوراق قرضه با ریسک عدم پرداخت
۱۲۰	۳-۴-۳-۲ مارتنگال‌ها و تغییر اندازه احتمال
۱۲۴	۳-۴-۱-۲ تغییر اندازه احتمال
۱۲۷	۳-۵-۳-۲ قیمت‌گذاری اختیارات با مدل‌های دوجمله‌ای یک‌دوره‌ای و چنددوره‌ای
۱۲۷	۳-۵-۱-۲ مقدمه
۱۲۸	۳-۵-۲-۲ ترفیع قرارداد اختیار خرید و اختیار فروش
۱۳۱	۳-۵-۳-۲ تعیین قیمت یک اختیار اروپایی با استفاده از مدل دوجمله‌ای یک‌دوره‌ای
۱۳۷	۳-۵-۴-۲ قیمت‌گذاری دوجمله‌ای چندمرحله‌ای
۱۳۹	۳-۵-۵-۲ قیمت‌گذاری تیار معامله فروش
۱۴۲	۳-۵-۶-۲ دلتای اختیار معاملا
۱۴۳	۳-۵-۷-۲ قیمت‌گذاری اختیار امر بکاپو
۱۴۶	۳-۶-۳-۲ زمان توقف
۱۴۸	۳-۶-۱-۲ تعاریف کرانه‌ها
۱۵۰	۳-۶-۲-۲ قضیه نمونه‌گیری اختیاری (مدل گسسته)
۱۵۶	۳-۷-۳-۲ خلاصه فصل سوم
۱۵۸	۳-۸-۳-۲ تمرین‌های فصل سوم
۱۶۲	فصل چهارم: فرایندهای تصادفی زمان-پیوسته
۱۶۲	مقدمه
۱۶۲	۴-۱-۳-۲ تشریح کلی فرایندهای تصادفی پیوسته
۱۶۳	۴-۱-۱-۲ حرکت براونی یا فرایند وینر
۱۶۴	۴-۱-۲-۲ حرکت براونی یا فرایند وینر از نگاه تاریخی
۱۶۶	۴-۲-۳-۲ ماهیت حرکت براونی
۱۶۹	۴-۲-۱-۲ خواص حرکت براونی
۱۷۵	۴-۳-۳-۲ فرایند پواسون و فرایند پواسون مرکب
۱۷۵	۴-۳-۱-۲ توزیع پواسون
۱۷۸	۴-۳-۲-۲ فرایند پواسون
۱۸۰	۴-۳-۳-۲ فرایند پواسون مرکب
۱۸۷	۴-۴-۳-۲ مارتنگال پیوسته

۱۸۹	۴-۴-۱ زمان سرمایه گذاری بی تفاوتی
۱۹۰	۴-۴-۲ توابع مارتنیگل
۱۹۱	۴-۵ خلاصه فصل چهارم
۱۹۲	۴-۶ تمرین های فصل چهارم
۱۹۵	فصل پنجم: انتگرال های تصادفی
۱۹۵	مقدمه
۱۹۵	۵-۱ انتگرال های غیر تصادفی و انتگرال های تصادفی
۱۹۶	۵-۱-۱ تعریف انتگرال ریمان و ریمان - استیلتیس
۲۰۱	۵-۱-۲ انتگرال تصادفی
۲۰۲	۵-۲ انتگرال ایتو
۲۰۴	۵-۲-۱ محاسبه انتگرال ایتو
۲۰۶	۵-۲-۲ خواص انتگرال ایتو
۲۱۰	۵-۳ انتگرال استراتزویچ
۲۱۵	۵-۴ محاسبه مجدد انتگرال ایتو و نوع سفید
۲۱۸	۵-۵ خلاصه فصل پنجم
۲۱۹	۵-۶ تمرین های فصل پنجم
۲۲۱	فصل ششم: معادلات دیفرانسیل تصادفی
۲۲۱	مقدمه
۲۲۱	۶-۱ معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDE)
۲۲۴	۶-۱-۱ معادله دیفرانسیل تصادفی با ضرایب ثابت
۲۲۵	۶-۱-۲ معادله دیفرانسیل تصادفی با ضریب متغیر
۲۲۶	۶-۱-۳ شرط مارتنیگل بودن جواب معادله دیفرانسیل تصادفی
۲۲۷	۶-۲ فرمول ایتو در حالت یک بعدی
۲۲۷	۶-۲-۱ دیفرانسیل در فضای تصادفی
۲۲۹	۶-۲-۲ بسط توابع دو متغیره به سری تیلور
۲۳۲	۶-۳ کاربردهای فرمول ایتو
۲۳۲	۶-۳-۱ معادله دیفرانسیل بلک-شولز
۲۳۵	۶-۳-۲ مدل نرخ بهره واسیچک
۲۳۹	۶-۴ صورت تصادفی انتگرال جزء به جزء
۲۳۹	۶-۴-۱ انتگرال جزء به جزء
۲۴۲	۶-۴-۲ فرمول ایتو برای n متغیر تصادفی

۲۴۳	۶-۵ خلاصه فصل ششم
۲۴۴	۶-۶ تمرین های فصل ششم
۲۴۸	فصل هفتم: مدل تصادفی بلک- شولز
۲۴۸	مقدمه
۲۴۹	۷-۱ برآورد قیمت سهام در فاصله اطمینان مورد نظر
۲۵۲	۷-۲ قیمت گذاری اختیار با مدل بلک- شولز
۲۵۹	۷-۲-۱ قیمت اختیار براساس مدل بلک- شولز برای سهامی که سود می پردازند
۲۶۱	۷-۲-۲ قیمت اختیار براساس مدل بلک- شولز برای سهامی که سود با نرخ q می پردازند
۲۶۲	۷-۳ برای تعیین ارزش اختیار آتی ها
۲۶۶	۷-۴ تعمیم فرمول بلک- شولز
۲۶۸	۷-۵ حروف یونانی
۲۶۸	۷-۵-۱ Δ / دلتا
۲۷۳	۷-۵-۲ Θ / تتا
۲۷۵	۷-۵-۳ Γ / گاما
۲۷۸	۷-۵-۴ ρ / رho
۲۸۰	۷-۵-۵ V / وگا
۲۸۲	۷-۶ پوشش ریسک
۲۸۳	۷-۷ خلاصه فصل هفتم
۲۸۵	۷-۸ تمرین های فصل هفتم
۲۸۹	فصل هشتم: مسئله کنترل تصادفی و کاربرد آن
۲۸۹	مقدمه
۲۹۰	۸-۱ معادله بلمن در برنامه ریزی پویای غیر تصادفی
۲۹۰	۸-۱-۱ بیان صوری مسئله کنترل بهینه
۲۹۷	۸-۱-۲ اصل ماکزیمم و برنامه ریزی پویا
۳۰۲	۸-۱-۳ مصرف بهینه
۳۰۵	۸-۲ تعریف مسئله کنترل تصادفی
۳۰۷	۸-۳ حل مسئله کنترل بهینه تصادفی
۳۱۰	۸-۳-۱ مسئله خود گردان و ارزش جاری
۳۱۲	۸-۳-۲ معادله هامیلتون - ژاکوبی - بلمن تصادفی
۳۱۳	۸-۴ کاربردهای کنترل تصادفی در اقتصاد و مالی
۳۱۴	۸-۴-۱ تخصیص ثروت شخصی

شکر فراوان ایزد یکتا را که آدمی را به کامل ترین وجه آفریده، برای هدایت او پیامبران را فرستاد. درود بی پایان بر آخرین فرستاده او محمد(ص)، سلام بر امامان معصوم(ع)، با آرزوی ظهور آخرین آنها حضرت قائم(عج).

پیشگفتار

امروزه در دنیای اقتصاد مدیریت در حوزه های مالی^۱، کسب و کار و بورس ها به سرعت رشد و تغییرات زیادی اندیشیده شده است. این تغییرات سریع به واسطه ابزارهای مالی مدرن^۲ پدید آمده، که در ضمن بسیار پیچیده اند. برای به کارگیری این ابزارهای جدید، فرایندهای تصادفی مورد نیاز است. با استفاده از فرایندهای تصادفی و ریاضیات انواع قیمت گذاری ها انجام می شود. این مجموعه را برخی ریاضیات مالی^۳ می نامند. ریاضیات مالی را می توان شاخه ای از ریاضیات کاربردی دانست. بین ریاضیات مالی و محاسبات مالی^۴ و مهندسی مالی^۵ هم پوشانی زیادی وجود دارد. مهندسی مالی از رشته های مهندسی نیست و این اصطلاح اولین بار در اوایل دهه ۱۹۸۰ در بانک های انگلیس برای تیمی که در زمینه های ریسک کار می کردند، به کار گرفته شد. انجمن بین المللی مهندسی مالی (IAFM)، مهندسی مالی را به این صورت تعریف می کند: مهندسی مالی عبارت است از توسعه و به کارگیری خلاقانه فناوری های مالی برای حل مسائل مالی و استفاده از فرصت های مالی.

برای ارائه ریاضیات مالی یا مهندسی مالی از فرایندهای تصادفی و کاربردهای آن مانند انتگرال تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی استفاده می شود. به همین دلیل برخی از مؤلفان

1. finance
2. modern financial instruments
3. financial mathematics
4. computational finance
5. financial engineering
6. International Association Financial Engineering

آن را حسابان تصادفی^۱ می‌نامند. خوانندگان ارجمند با حسابان معمولی که همان حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد، آشنایی کامل دارند. در حسابان معمولی، متغیرها متعین یا غیر تصادفی است و در حسابان تصادفی اساس کار فرایندهای تصادفی اند و به همین دلیل برخی آن را فرایند تصادفی و کاربردهای آن نام نهاده‌اند. در حسابان معمولی، با مفاهیم متغیر، تابع، مشتق، انتگرال، معادلات دیفرانسیل آشنا شده و به کاربردهای آن در رشته‌های مختلف از جمله مدیریت و اقتصاد پی برده‌ایم. نظیر همین سرفصل‌ها در حسابان تصادفی وجود دارد. مهم‌ترین بخش در حسابان تصادفی فرایندهای تصادفی گسسته و پیوسته است که به کمک فرایندهای تصادفی انتگرال تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی تبیین می‌شود و می‌توان در بازارهای سرمایه و بیمه به تحلیل و قیمت‌گذاری انواع سهام، اختیارها، قراردادهای آتی، معاوضه و غیره پرداخت. به علت کاربرد فراوان آن این کتاب را فرایندهای تصادفی پیشرفته و کاربردهای آن در اقتصاد، مدیریت و مهندسی مالی نامیده‌ام.

تألیف این کتاب بهره تجربه تدریس این مطالب در سال‌های مختلف در دانشگاه‌های شهید بهشتی، تهران، علامه طباطبائی، امام صادق (ع) و پیام نور در رشته‌های مهندسی مالی، مدیریت مالی، مدیریت صنعتی و اقتصاد، دوره‌های تحصیلات تکمیلی است. از کتاب‌ها و مقالات زیادی نیز سود برده‌ام، که در فهرست منابع آمده است. برای بیان فرایندهای تصادفی نیاز کامل به مفاهیم احتمال داریم. به همین دلیل در بیشتر کتاب‌های موجود در این زمینه، ابتدا مروری مختصر بر نظریه احتمال ارائه شده است.

قابل ذکر است در فصل اول به اختصار مروری بر نظریه احتمال خواهیم داشت. ابتدا به تعاریف اساسی، از جمله جبر-زیگما یا ساختار اطلاعاتی و اندازه احتمال، فضای احتمال و متغیرهای تصادفی با توجه به بیان‌های جدید معمول دنیا خواهیم پرداخت. سپس چند توزیع خاص از جمله توزیع‌های یک متغیره و چندمتغیره را که مورد نیاز است بیان خواهیم کرد. در پایان، توزیع‌های شرطی را یادآور می‌شویم.

در فصل دوم، ابزارهای مالی و بازارهای مالی موجود در جهان معرفی می‌گردد. ابزارهای مالی را می‌توان به دو دسته اوراق قرضه و قراردادهای مالی تقسیم کرد. ابتدا اوراق قرضه و انواع آن را مطرح می‌کنیم. سپس به معرفی سهام می‌پردازیم. در بخش بعد درباره مشتقات بحث می‌کنیم، مشتقات ابزارهایی مالی هستند که بازدهی آن‌ها به ارزش دیگر متغیرهای مالی (قیمت سهم، قیمت ورقه قرضه، نرخ ارز و غیره) که متغیرهای بنیادی نامیده می‌شوند، بستگی دارد. از جمله مشتقات،

قراردادهای آتی، پیمانهای آتی و انواع اختیارهای خرید و فروش می‌باشند. در بازارهای مالی جهان، اختیارها علاوه بر پوشش ریسک، از نظر سرمایه‌گذاری با اهمیت‌اند. نوع دیگری از قرارداد مشتقه که به طور گسترده به کار می‌رود قرارداد معاوضه یا سواپ است. اوراق بهادار دیگری با ویژگی‌های خاص وجود دارند که آن‌ها را به ابزار مشتقه شبیه می‌سازند. در این فصل به دو نوع از آن‌ها اشاره خواهیم کرد. آنگاه، سازمان بازارهای مالی را معرفی می‌کنیم. سازمان بازارهای مالی در بسیاری از کشورها به لحاظ اساس ساختاری تفاوتی با هم ندارند. بازارهای مالی در ایالات متحده از جمله پیشرفته‌ترین بازارهای مالی هستند که اشاره‌ای به آن‌ها خواهیم داشت. شاخص‌های بازار بسیار با اهمیت است و هزاران اوراق بهادار و قرارداد در بورس‌های مختلف پذیره‌نویسی می‌شوند. به منظور خلاصه سازی اطلاعات موجود در قیمت‌های آن‌ها، شاخص‌های بازار بسیاری وجود دارد. یک شاخص به دنبال آن است که در قالب یک عدد، خلاصه‌ای از سطح بازارها یا زیرمجموعه‌های بازارها را بیان کند. در ادامه به تعدادی از آن‌ها اشاره خواهیم کرد. سپس مختصری به تشکیل بورس در ایران و شاخص‌های آن پرداخته، در پایان مفهوم آریترآژ را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم فرایندهای تعریف زمان - گسسته و انواعی از آن معرفی می‌شود. ابتدا به تعریف فرایندهای تصادفی در یک فضای احتمال فیلتر شده و خواص عمومی آن‌ها و سپس به انواع مهم فرایندهای تصادفی می‌پردازیم. گام بعدی یا گام تصادفی که یکی از فرایندهای تصادفی جداست و در مدل‌سازی قیمت سهام به کار می‌رود، تعریف می‌شود. برخی از فرایندهای تصادفی زمان - گسسته زنجیرهای مارکوف هستند. این زنجیرها معرفی و مثال‌های کاربردی از آن‌ها معرفی می‌شود. تعدادی از فرایندهای تصادفی جابجایی مارکوف هستند که در این فصل این متغیرهای تصادفی نیز معرفی و کاربرد آن‌ها در مهندسی مالی تشریح می‌شود. در ادامه درباره قیمت‌گذاری اختیار با استفاده از مدل‌های دو جمله‌ای یک دوره‌ای و چند دوره‌ای اعم از اختیار اروپایی و امریکایی به طور کامل بحث می‌شود.

در فصل چهارم فرایندهای تصادفی زمان - پیوسته تشریح و حرکت براونی، مهم‌ترین فرایند تصادفی پیوسته، معرفی می‌شود. این فرایند تصادفی برای بیان فصول بعدی کتاب ضروری است. آنگاه فرایند تصادفی پواسون و فرایند تصادفی مرکب تشریح و به کمک آن حرکت براونی بیان می‌شود. فرایندهای تصادفی پیوسته نیز ممکن است دارای خاصیت مارکوف باشند که این خاصیت نیز بحث می‌شود. فرایندهای تصادفی پیوسته کاربردهای فراوانی در اقتصاد، مدیریت و مهندسی مالی دارد که در فصل مربوط به آن خواهیم پرداخت. موضوع فصل پنجم انتگرال‌گیری تصادفی است، که به کمک فرایندهای تصادفی

از جمله حرکت براونی تعریف می‌شود. ابتدا انتگرال ایتو که شباهت به انتگرال استیلتیس در آنالیز ریاضی دارد، تعریف و درباره خواص آن بحث می‌شود. سپس انتگرال استراتونویچ که در بیمه کاربرد دارد و محاسبه آن معرفی می‌گردد. این انتگرال‌ها در مهندسی مالی، بیمه و اقتصاد ریاضی کاربردهای جالبی دارند. اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی و کنترل تصادفی مبتنی بر انتگرال‌های تصادفی است. این کاربردها را در فصول بعد ملاحظه خواهید کرد.

خوانندگان این کتاب قطعاً با معادلات دیفرانسیل معمولی آشنایی دارند و چون در حسابان تصادفی با معادلات دیفرانسیل تصادفی مواجه می‌شویم، بنابراین در فصل ششم به آن می‌پردازیم. ابتدا این معادلات را تعریف و شرایط وجود جواب را بیان می‌کنیم. سپس معادلات با ضرایب ثابت و متغیر را حل می‌نماییم. فرمول ایتو که بسیار اهمیت دارد در این فصل معرفی و کاربرد آن در حل معادله دیفرانسیل تصادفی ارائه می‌شود. گاهی برای حل برخی از مسائل به فرمول ایتوی دومتغیره نیاز است، که به جای استفاده از آن از فرمول ساده‌تری که موسوم به ایتو-کال جزء به جزء تصادفی است، استفاده می‌شود. بنابراین اثبات و کاربرد آن را در حل معادله دیفرانسیل تصادفی ملاحظه خواهید کرد. معادلات دیفرانسیل تصادفی به صورت گسترده در مدل‌سازی ابزارهای پیشرفته مالی و کنترل تصادفی در رشته‌های مالی و اقتصاد به کار می‌رود. برای نمونه معادله دیفرانسیل تصادفی که بلک-شولز برای ارائه مدل خود از آن استفاده کرده‌اند بیان شده است، از این معادله برای برآورد قیمت سهام با فاصله اطمینان مورد نظر استفاده می‌شود. معادله دیفرانسیل دیگری که در تعیین نرخ بهره و سرمایه‌گذاری به کار می‌رود، مدل واسیچک است که به آن اشاره می‌شود.

در فصل هفتم، کاربرد انتگرال ایتو و معادلات دیفرانسیل تصادفی در مهندسی مالی بحث می‌شود. در این فصل ابتدا به برآورد فاصله قیمت سهام می‌پردازیم و پس مدل بلک-شولز و قیمت‌گذاری اختیار معاملات را مطرح می‌کنیم. در اوایل دهه هفتاد میلادی مایرون شولز، رابرت مرتون و فیشر بلک به پیشرفت مهمی در زمینه قیمت‌گذاری ابزارهای مالی پیچیده به وسیله توسعه آنچه به عنوان مدل بلک-شولز معروف شد، دست یافتند. در سال ۱۹۹۷ اهمیت این مدل به واسطه دریافت جایزه نوبل اقتصاد به وسیله مایرون شولز و رابرت مرتون در سطح جهان نمودار گشت. متأسفانه فیشر بلک در سال ۱۹۹۵ فوت کرده بود. مدل بلک-شولز نشان می‌دهد که فرایندهای تصادفی و ریاضیات مطرح شده در حسابان تصادفی نقش مهمی در رشته مالی دارد. اثبات مدل بلک-شولز که قیمت‌گذاری اختیار معاملات سهام است، این موضوع را به خوبی نشان می‌دهد. فرمول اثبات شده برای تعیین قیمت اختیار خرید و فروش

سهامی است که سود پرداخت نمی‌کند. لذا فرمولی برای اختیار سهامی که سود می‌پردازند را در این فصل به دست می‌آوریم؛ آنگاه محاسبه قیمت اختیار برای ارزها را ارائه می‌دهیم. فرمول بلک عمدتاً برای قیمت‌گذاری حق اختیار فروش سهام است. در این بخش ارزش اختیار برای قراردادهای آتی و پیمان‌های آتی را نیز محاسبه می‌کنیم.

در فصل هشتم کنترل تصادفی که در اقتصاد ریاضی و مدیریت پیشرفته کاربرد دارد، مطرح و سپس روش اصل ماکزیمم بحث می‌شود. ابتدا به کنترل غیر تصادفی پرداخته، آن را به روش برنامه‌ریزی پویا، یعنی معادله بلمن، ارائه می‌دهیم. ممکن است مسئله کنترل با نااطمینانی و متغیرهای تصادفی همراه باشد. به طور معمول ما با نااطمینانی روبه‌رو هستیم، مثلاً مصرف کنندگان نامطمئن به عنوان مشتری یا نااطمینانی در سرمایه‌گذاری مانند خرید سهام، که در این موارد ما با یک توزیع احتمال آشنا یا ناشناخته از یک متغیر وضعیت و گاهی تابعی از یک متغیر وضعیت به عنوان یک متغیر تصادفی روبه‌رو می‌شویم. این وضعیت به صورت گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف به در می‌رود. علاوه بر مدل‌های تصادفی امروزه در اقتصاد مالی برای مدل‌سازی استفاده می‌شود. در این بخش مسئله کنترل تصادفی تعریف و سپس روش حل آن که شباهتی کامل به روش برنامه‌ریزی پویا دارد، معرفی می‌شود. معادله بلمن در حالت تصادفی اثبات و روش حل آن تبیین می‌گردد و مثال‌ها در این زمینه ارائه می‌شود.

برای درک بهتر مطالب در هر فصل مسائلی به عنوان مثال ارائه و حل شده است؛ لذا به خوانندگان این کتاب توصیه می‌کنیم به مثال‌های حل شده در هر فصل توجه و سپس تمرین‌های انتهایی هر فصل را حل کنند. در ضمن در انتهای هر فصل خلاصه مطالب فصل و همچنین کتاب‌هایی برای مطالعه بیشتر ارائه شده است.

در پایان لازم می‌دانم از مسئولان محترم سازمان «سمت»، به ویژه آقای دکتر مرتضی عزتی، که در چاپ این کتاب مساعدت کردند، خانم‌ها عادلہ مشایخی، ویراستار کتاب، و مریم سمیاری، که حروفچینی آن را بر عهده داشتند، صمیمانه تشکر نمایم.

از خوانندگان محترم تقاضا دارم که اینجانب را از دیدگاه‌های ارزشمند و منتقدانه خود در اصلاح و ارتقای کتاب برخوردار نمایند. در پایان خداوند بزرگ را سپاسگزارم که توفیق تألیف این کتاب را به من عطا فرمودند.

محمد حسین پورکاظمی

عضو هیئت علمی دانشکده علوم اقتصادی دانشگاه شهید بهشتی

فروردین ۱۳۹۸