



# تساوی ماتریسی خطی در سیستم و تئوری کنترل

تألیف: مهندس فاطمه محمدی

دکتر مهرداد تاکی (عضو هیأت علمی دانشگاه قم)

دکتر عفت گلپیرابوکی (عضو هیأت علمی دانشگاه قم)

|                     |   |                                                                                                                    |
|---------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| سرشناسه             | : | محمدی، فاطمه، ۱۳۷۱ فروردین.                                                                                        |
| عنوان و نام پدیدآور | : | نامساوی ماتریسی خطی در سیستم و تئوری کنترل/تالیف فاطمه محمدی؛ مهرداد تاکی؛ عفت گلپرابوکی. ویراستار: محمدحسین عباسی |
| مشخصات نشر          | : | قم: دانشگاه قم، انتشارات، ۱۳۹۹.                                                                                    |
| مشخصات ظاهری        | : | ۴۰۴ ص.                                                                                                             |
| شابک                | : | 978-600-8436-53-9                                                                                                  |
| وضعیت فهرست نویسی   | : | فیفا                                                                                                               |
| موضوع               | : | مهندسی ترافیک- الگوهای ریاضی / Traffic engineering- Mathematics models                                             |
| موضوع               | : | ترافیک- الگوهای ریاضی / Traffic flow- Mathematical models                                                          |
| موضوع               | : | مهندسی راه / Highway engineering                                                                                   |
| موضوع               | : | راه‌ها- الگوهای ریاضی / Roads- Mathematical models                                                                 |
| موضوع               | : | ترافیک شهری / City traffic / نظریه کنترل / Control theory                                                          |
| موضوع               | : | نامساوی‌های ماتریسی / Matrix inequalities                                                                          |
| موضوع               | : | بهینه‌سازی ریاضی / Mathematical optimization                                                                       |
| شناسه افزوده        | : | تاکی مهرداد، ۱۳۶۰- گلپرابوکی، عفت، ۱۳۴۹                                                                            |
| شناسه افزوده        | : | انستگاه قم. انتشارات                                                                                               |
| رده بندی کنگره      | : | TF ۴۵                                                                                                              |
| رده بندی دیویی      | : | ۳۵۰                                                                                                                |
| شماره کتابشناسی ملی | : | ۶۱۰۸۷۳۵                                                                                                            |



#### انتشارات دانشگاه قم

عنوان: نامساوی ماتریسی خطی در سیستم و تئوری کنترل  
نویسنده: فاطمه محمدی، مهرداد تاکی، عفت گلپرابوکی.

چاپ و صحافی: هوشنگی

طراح جلد: احمد رضا حیدری

صفحه آرا: محمدحسین عباسی

ناظر فنی: علیرضا معظمی

چاپ اول: بهار ۱۳۹۹

شمارگان: ۱۰۰۰

بهاء: ۶۰۰۰۰۰

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۸۴۳۶۵۳-۹

آدرس الکترونیکی: Publication@ Qom. ac.ir

کلیه حقوق مادی و معنوی برای ناشر محفوظ است.

قم، بلوار الغدیر، دانشگاه قم، اداره چاپ و انتشارات دانشگاه

تلفن: ۰۲۵-۳۲۱۰۳۳۴۴ - ۰۲۵-۳۲۱۰۳۳۴۵

## پیشگفتار

کتاب پیش روی شما براساس یک پژوهش کاربردی به منظور کنترل ترافیک شهری بر مبنای ایده‌های موجود در رشته مهندسی برق-کنترل تدوین شده است. در عصر جدید با گسترش جمعیت شهرنشینی، طراحی شبکه ترافیک شهری با هدف حداقل کردن زمان دسترسی بین نقاط مختلف یک مسأله جذاب است. به طور خاص، مورد بزرگراه‌های شهری، طراحی خروجی‌های مناسب و نحوه ارتباط آن‌ها با بزرگراه‌ها، اهمیت اساسی دارد. در این حوزه کمینه بودن زمان لازم برای رفع یک گره ترافیکی دارای اهمیت راهبردی و امنیتی بالایی می‌باشد. در پژوهش انجام گرفته در مرحله اول می‌بایست صورت مسأله کنترل ترافیک به فرم یک مسأله استاندارد در حوزه مهندسی کنترل بیان شود. پیچیدگی مسأله حاصل، استفاده از ابزار قدرتمند نامساوی‌های ماتریسی خطی در حوزه ریاضیات کاربردی را اجتناب ناپذیر می‌نمود. لذا در مرحله دوم، مسأله بهینه سازی حاصله به فرم یک نامساوی ماتریسی خطی درآید. هرچند برای دسته محدودی از نامساوی‌های یاد شده، راه‌حل‌های تحلیلی وجود دارد اما از دیدگاه مهندسی روش‌های حل عددی با زمان حل چندجمله‌ای یک قالب بسیار مهم بشمار می‌رود. لذا روش حل عددی و روش تبدیل یک مسأله کنترل بهینه به یک نامساوی خطی معرفی می‌گردد.

با توجه به گسل عمیقی بین رشته‌های مختلف دانشگاه در کشور و روزآمد نبودن سرفصل‌های درسی، متأسفانه یک مهندس بایستی مدت زیادی را صرف فراگیری مبانی تئوری مورد نیاز بنماید. در این کتاب نیز با استفاده از کتاب Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory تألیف آقایان Venkataramanan و Eric Feron، Laurent El Ghaoui، Stephen Boyd و Balakrishnan و کتاب Linear Matrix Inequalities in Control تألیف آقایان Carster Scherer و Weiland Siep و مفاهیم مورد نیاز بیان شده است. در قسمت‌های مختلف با توجه به روحیات دانشجویان مهندسی از مثال‌های عددی برای تبیین بهتر مسائل بهره گرفته شده است. فصلی از این کتاب همچنین به معرفی جعبه ابزارهای موجود برای حل عددی نامساوی‌های ماتریسی خطی اختصاص دارد.

بخش‌های مختلف این کتاب به شرح ذیل هستند. فصل اول مقدمه، اصول و مفاهیم اولیه راجع به نامساوی‌های ماتریسی خطی را بیان می‌کند. در فصل دوم شمول دیفرانسیل خطی معرفی می‌شود. فصل سوم به طراحی پسخور حالت به سیستم شمول دیفرانسیل خطی می‌پردازد. در فصل چهارم روش‌های لور و ضرب‌کننده معرفی می‌شوند. در فصل پنجم روش طراحی کنترل کننده بیان می‌شود. فصل ششم به آموزش حل نامساوی‌های ماتریسی خطی با نرم افزار می‌پردازد و در فصل هفتم مسأله کنترل ترافیک فرمول بندی و حل می‌شود.

مؤلفان: فاطمه محمدی - مهرداد تاکی - عفت گلپر رابوکی

# فهرست مطالب

|       |                                                      |
|-------|------------------------------------------------------|
| ۱     | مقدمه، اصول و مفاهیم اولیه.....                      |
| ۱.۱   | تاریخچه‌ی مختصری از بکارگیری LMI در تئوری کنترل..... |
| ۲.۱   | نامساوی‌های ماتریسی خطی.....                         |
| ۱.۲.۱ | برخی ویژگی‌های LMI.....                              |
| ۲.۲.۱ | مجموعه محدب.....                                     |
| ۳.۲.۱ | توابع محدب.....                                      |
| ۲.۱   | بهینه‌سازی محدب.....                                 |
| ۵.۲.۱ | فرم‌های کلاسیک بهینه‌سازی محدب.....                  |
| ۶.۲.۱ | برنامه‌ریزی خطی (LP).....                            |
| ۷.۲.۱ | ماتریس‌ها به عنوان میرها.....                        |
| ۸.۲.۱ | قید برابری خطی.....                                  |
| ۳.۱   | برخی از مسائل استاندارد.....                         |
| ۱.۳.۱ | مسائل LMI.....                                       |
| ۲.۳.۱ | مسائل مقادیر ویژه.....                               |
| ۳.۳.۱ | مسائل مقادیر ویژه تعمیم یافته.....                   |
| ۴.۳.۱ | مسائل محدب.....                                      |
| ۵.۳.۱ | حل مسائل استاندارد LMI.....                          |
| ۴.۱   | الگوریتم بیضی.....                                   |

|    |                                            |
|----|--------------------------------------------|
| ۴۶ | ۵.۱ روش نقطه - داخلی                       |
| ۴۶ | ۱.۵.۱ مرکز تحلیلی LMI                      |
| ۴۹ | ۲.۵.۱ مسیر مراکز                           |
| ۵۰ | ۳.۵.۱ روش مراکز                            |
| ۵۳ | ۴.۵.۱ روش نقطه داخلی و ساختار مسائل        |
| ۵۵ | ۶.۱ نامساوی‌های ماتریسی خطی اکید و غیراکید |
| ۵۷ | ۶.۱ کاهش به LMI اکیدا شدنی                 |
| ۵۸ | ۶.۱ مثال: نامساوی لیاپانوف                 |
| ۶۲ | ۷.۱ نتایج گونون در مساوی ماتریس            |
| ۶۲ | ۱.۷.۱ حذف عبارات همبسته معین               |
| ۶۳ | ۲.۷.۱ حذف متغیرهای ماتریس                  |
| ۶۵ | ۳.۷.۱ روش S                                |
| ۶۸ | ۸.۱ برخی از مسائل LMI با راه‌حل‌های تحلیلی |
| ۶۸ | ۱.۸.۱ نامساوی لیاپانوف                     |
| ۶۹ | ۲.۸.۱ لم حقیقی - مثبت                      |
| ۷۴ | ۳.۸.۱ لم حقیقی - کراندار                   |
| ۷۵ | ۴.۸.۱ مسائل دیگر                           |
| ۷۷ | ۲ شمول دیفرانسیل خطی                       |
| ۷۷ | ۱.۲ شمول دیفرانسیلی                        |
| ۷۸ | ۱.۱.۲ شمول‌های دیفرانسیلی خطی              |

|     |                                                |
|-----|------------------------------------------------|
| ۷۹  | ۲.۱.۲ تعمیم به سیستم‌ها                        |
| ۸۰  | ۲.۲ برخی از LDI های خاص                        |
| ۸۰  | ۱.۲.۲ سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان        |
| ۸۰  | ۲.۲.۲ LDI چند وجهی                             |
| ۸۱  | ۲.۲.۲ LDI های نرم - کراندار                    |
| ۸۲  | ۴.۲.۲ LDI های نرم - کراندار قطری               |
| ۸۴  | ۲. تجزیه و تحلیل سیستم غیر خطی از طریق LDIs    |
| ۸۵  | ۱.۳.۲ یک شرط مشتق                              |
| ۸۷  | ۲.۳.۲ شرایط ناحیه                              |
| ۸۸  | ۴.۲ تجزیه و تحلیل سیستم خطی از LDI             |
| ۸۹  | ۱.۴.۲ پایداری تدریجی                           |
| ۱۰۰ | ۲.۴.۲ تبدیل مختصات                             |
| ۱۰۱ | ۳.۴.۲ مرزهای پایداری تربیعی                    |
| ۱۰۳ | ۴.۴.۲ نرخ فروپاشی                              |
| ۱۰۹ | ۳ طراحی پسخور حالت برای شمول‌های دیفرانسیل خطی |
| ۱۰۹ | ۱.۳ کنترل کننده‌های پسخور حالت ایستا           |
| ۱۱۳ | ۲.۳ خواص حالت                                  |
| ۱۱۴ | ۱.۲.۳ پیدارسازی تربیعی                         |
| ۱۲۳ | ۲.۲.۳ بیضی‌های نگهدارنده                       |
| ۱۲۴ | ۳.۲.۳ محدودیت‌های ورودی کنترلی                 |

|       |                                                            |     |
|-------|------------------------------------------------------------|-----|
| ۳.۳   | خواص ورودی به حالت                                         | ۱۲۵ |
| ۱.۳.۳ | مجموعه های قابل دستیابی با ورودی های انرژی واحد            | ۱۲۷ |
| ۲.۳.۳ | مجموعه های قابل دستیابی با ورودی های انرژی- واحد مولفه های | ۱۳۵ |
| ۳.۳.۳ | مجموعه های قابل دستیابی با ورودی های پیک- واحد             | ۱۳۹ |
| ۴.۳   | خواص خروجی به حالت                                         | ۱۴۳ |
| ۱.۴.۳ | کران هایی برای انرژی خروجی                                 | ۱۴۴ |
| ۵.۳   | خواص خروجی به ورودی                                        | ۱۵۲ |
| ۵.۳   | بهره $1/2$ و RMS                                           | ۱۵۲ |
| ۲.۵.۳ | اتلاشی                                                     | ۱۶۱ |
| ۳.۵.۳ | کنترل کننده های مسخور حالت دینامیکی در مقایسه با ایستا     | ۱۶۶ |
| ۶.۳   | تعریف روی تگر حالت و طراحی رگر حالت برای سیستم های $1.TI$  | ۱۶۷ |
| ۷.۳   | کنترل کننده های مبتنی بر روی تگر برای سیستم های غیر خطی    | ۱۶۹ |
| ۴     | روش های لور و ضرب کننده                                    | ۱۷۳ |
| ۱.۴   | تجزیه و تحلیل سیستم های لور                                | ۱۷۳ |
| ۱.۱.۴ | پایداری                                                    | ۱۷۵ |
| ۲.۱.۴ | مجموعه های قابل دستیابی با ورودی انرژی - واحد              | ۱۷۸ |
| ۳.۱.۴ | کران های انرژی خروجی                                       | ۱۸۰ |
| ۴.۱.۴ | بهره $L2$                                                  | ۱۸۳ |
| ۲.۴   | محدودیت های تربیعی انتگرالی                                | ۱۸۶ |
| ۱.۲.۴ | پایداری                                                    | ۱۸۷ |

|     |                                                      |
|-----|------------------------------------------------------|
| ۱۸۹ | ۲.۲.۴ بهره L2                                        |
| ۱۹۰ | ۳.۴ ضرب کننده برای سیستم‌هایی با پارامترهای ناشناخته |
| ۱۹۲ | ۱.۳.۴ پایداری                                        |
| ۱۹۴ | ۲.۳.۴ مجموعه های قابل دستیابی با ورودی انرژی واحد    |
| ۱۹۹ | ۵ ترکیب کنترل کننده                                  |
| ۱۹۹ | ۱.۵ مقدمه                                            |
| ۲۰۰ | ۱ ترکیب کنترل کننده تک هدفه                          |
| ۲۰۰ | ۱.۲.۵ ترتیب                                          |
| ۲۰۳ | ۲.۵ از تجربه تحلیل به ترکیب- یک روش متداول           |
| ۲۱۲ | ۳.۲.۵ طراحی کنترل کننده $H_2$                        |
| ۲۱۴ | ۴.۲.۵ طراحی کنترل کننده $H_2$                        |
| ۲۱۴ | ۵.۲.۵ طراحی کنترل کننده $H_2$                        |
| ۲۱۵ | ۶.۲.۵ طراحی تعمیم یافته $H_2$                        |
| ۲۱۶ | ۷.۲.۵ طراحی به منظور محدود کردن نیروی یک پیک         |
| ۲۱۹ | ۳.۵ طراحی کنترل کننده چند هدفه و مختلط               |
| ۲۲۲ | ۴.۵ حذف پارامترها                                    |
| ۲۲۳ | ۱.۴.۵ دوگانه سازی                                    |
| ۲۲۴ | ۲.۴.۵ تبدیل تصویری                                   |
| ۲۲۵ | ۴.۴.۵ حذف برای طراحی عملکرد تربیعی                   |
| ۲۲۹ | ۵.۴.۵ حذف برای طراحی های $H_2$                       |