



حیر خطی

تألیف:

دکتر مهرزاد بیفش

عضو هیات علمی دانشگاه شیراز

سرشناسه	: بیفش، مهرزاد، ۱۳۴۷-
عنوان و نام پدیدآور	: جبر خطی/تالیف مهرزاد بیفش.
مشخصات نشر	: تهران: سازمان جهاد دانشگاهی تهران، انتشارات، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	: ۳۴۸ ص.: جدول، نمودار.
شابک	: ۸- ۲۳۸- ۱۳۳- ۶۰۰- ۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
موضوع	: جبر خطی - راهنمای آموزشی(عالی)
موضوع	: Algebras, Linear - Study and teaching (Higher)
موضوع	: جبر خطی - مسائل، تمرین ها و غیره(عالی)
موضوع	: Algebras, Linear Problems, exercises, etc. (Higher)
شناسه افزوده	: سازمان جهاد دانشگاهی تهران، انتشارات.
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۵ ج۲ ۸۶ب/ ۱۸۴ QA
رده بندی دیویی	: ۵۱۲/۵
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۴۰۹۹۳۲

این کتاب پس از بازنگری توسط هیأت داوران و تایید علمی در انتشارات سازمان جهاد دانشگاهی تهران، مجوز چاپ و انتشار دریافت کرده است



جبر خطی

تألیف: دکتر مهرزاد بیفش

ناشر: انتشارات سازمان جهاد دانشگاهی تهران

ناظر چاپ: احمد آرش

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: نقش نیزار

شمارگان: ۵۰۰ نسخه

قیمت: ۲۱۰/۰۰۰ ریال

نوبت چاپ: اول - ۱۳۹۵

ISBN: 978-600-133-238-8

شابک: ۸- ۲۳۸- ۱۳۳- ۶۰۰- ۹۷۸

http:// jahat. ir

نشانی: تهران - صندوق پستی ۱۸۶- ۱۳۱۴۵

en.jahat@gmail.com

تلفن: ۶۶۹۵۴۳۶۸- تلفکس: ۶۶۴۶۹۴۱

خانه کتاب دانشگاه: ۶۶۹۷۳۴۲۳

تلفن مراکز پخش: ۶۶۴۹۰۷۴۰ - ۶۶۴۹۰۷۴۲

این اثر، مشمول قانون حمایت مولفان، مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸ است. هرکس تمام یا قسمتی از این اثر را

بدون اجازه مولف یا ناشر تکثیر و کپی برداری نماید مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت

«ويزكيهم و يعلمهم الكتاب و الحكمة»

مقدمه ناشر

ایران امری را در این توسعه و استقلال، گامهای محکم و استواری برمی دارد. همه روزه در گوشه و کنار این سرزمین، جوانان خود کفایی علمی و فنی رخ نموده و با عنایت و یاری خداوند متعال در سایه تلاش و کوشش جامعه علمی و دانشگاهی حرکت به سوی مرزهای دانش شتاب بیشتری به خود می گیرد. خدای را شکر می گویم که این فرصت را به ما ارزانی داشته تا گامهایی هر چند کوچک، در راه رشد و نشر دستاوردهای علمی و فرهنگی کشور برداریم، باشد تا با یاری خداوند منان و در ربو همت اندیشمندان، نویسندگان، مترجمان و متخصصان مومن و متعهد بتوانیم در راه علمی کشور عزیزمان ایران سهمی داشته باشیم.

انتشارات سازمان جهاد دانشگاهی توان در راستای وظایف خویش و به منظور نیل به اهداف علمی - فرهنگی نظام جمهوری اسلامی مبادیت انتشار آثار ارزشمند و مورد نیاز علمی و دانشگاهی می نماید. در این راه از کلیه اساتید، پژوهشگران، صاحبان قلم و اندیشه دعوت به مشارکت و همکاری می گردد.

فهرست مطالب

۱	دستگاه معادلات	۱
۱	معادله ریاضی	۱.۱
۲	حل یک معادله	۱.۱.۱
۳	تابع خطی	۲.۱
۴	معادله خطی	۳.۱
۶	معادله و حل آنها	۴.۱
۷	دستگاه معادلات	۵.۱
۸	دستگاه معادلات خطی	۱.۵.۱
۸	دستگاه معادلات خطی همگن	۲.۵.۱
۹	دستگاه معادلات غیر خطی	۳.۵.۱
۹	حل دستگاه معادلات	۶.۱
۱۳	حل دستگاه معادلات خطی	۲
۱۳	حل یک دستگاه	۱.۲
۱۶	حل دستگاه معادلات قطری	۲.۲
۱۷	حل دستگاه معادلات بالا مثلثی	۳.۲
۲۰	دستگاه های معادله هم ارز یا معادل	۴.۲
۲۱	۱.۴.۲ اعمال ابتدایی روی دستگاه های معادلات	
۲۴	روش حذف گاوس	۵.۲
۲۸	۱.۵.۲ بالا مثلثی کردن سیستم های معادلات خطی	
۲۹	۲.۵.۲ حل دستگاه معادلات همگن	
۲۹	۳.۵.۲ روش ساده مثلث سازی	
۳۵	روش حذف گاوس جردن	۶.۲
۳۷	۱.۶.۲ نرخ محاسبات در حل با روش گاوس جردن	
۳۷	۷.۲ کاربردهای سیستم معادلات خطی	
۴۵	بردارها و ماتریس ها	۳
۴۵	بردار	۱.۳
۴۷	۱.۱.۳ نمایش یک بردار و درآیه های آن	
۴۸	ماتریس	۲.۳
۵۰	۱.۲.۳ نمایش یک ماتریس و درآیه های آن	
۵۲	۲.۲.۳ نمایش سطر و ستون ماتریس ها	
۵۴	۳.۲.۳ نمایش بلوکی ماتریس ها	
۵۷	۳.۳ قطرهای یک ماتریس	

۴.۲	انواع ماتریس‌ها	۵۹
۱.۴.۲	ماتریس مربعی	۵۹
۲.۴.۲	ماتریس مستطیلی	۶۰
۳.۴.۲	ماتریس‌های قطری	۶۰
۴.۴.۲	ماتریس زیرین قطری	۶۱
۵.۴.۲	ماتریس زیرین قطری	۶۱
۶.۴.۲	ماتریس پاد قطری	۶۱
۷.۴.۲	ماتریس شیفت	۶۲
۸.۴.۲	ماتریس‌های بالا مثلثی	۶۲
۹.۴.۲	ماتریس‌های اکیدا بالا مثلثی	۶۳
۱۰.۴.۲	ماتریس‌های پایین مثلثی	۶۴
۱۱.۴.۲	ماتریس‌های اکیدا پایین مثلثی	۶۵
۱۲.۴.۲	ماتریس قطری بلوکی	۶۵
۱۳.۴.۲	ماتریس بلوکی	۶۶
۵.۳	بردارها و ماتریس‌های خاص	۶۷
۱.۵.۳	ماتریس واحد	۶۷
۲.۵.۳	ماتریس تبادل	۶۷
۳.۵.۳	ماتریس جایگ	۶۸
۴.۵.۳	ماتریس یک	۶۹
۵.۵.۳	ماتریس صفر	۶۹
۶.۵.۳	ماتریس‌های نایب	۶۹
۷.۵.۳	ماتریس‌های ایدئال	۷۰
۸.۵.۳	ماتریس‌های گردش	۷۲
۹.۵.۳	بردار واحد	۷۲
۱۰.۵.۳	بردار یک	۷۳

۴	اعمال ماتریسی	۷۵
۱.۴	تساوی دو ماتریس	۷۵
۲.۴	جمع و تفریق دو ماتریس	۷۶
۳.۴	ضرب یک عدد در ماتریس	۷۸
۴.۴	مزدوج یک ماتریس	۷۹
۵.۴	ترانهاده یک ماتریس	۸۰
۱.۵.۴	ماتریس متقارن	۸۲
۲.۵.۴	ماتریس پادمتقارن	۸۳
۶.۴	هرمیشین یک ماتریس	۸۳
۱۶.۴	ماتریس هرمیشین	۸۵
۲۶.۴	ماتریس پادهرمیشین	۸۶
۷.۴	وارونه بردار (A^B)	۸۷
۸.۴	ضرب ماتریس‌ها	۸۸
۱.۸.۴	پیچیدگی محاسباتی ضرب AB	۹۳
۲.۸.۴	توان ماتریس	۹۴
۳.۸.۴	ضرب بلوکی ماتریس‌ها	۹۴
۴.۸.۴	نمایش ضرب دو ماتریس به صورت سطری و ستونی	۹۵
۵.۸.۴	ضرب کرونگر برای ماتریس‌ها	۹۶
۶.۸.۴	ضرب هادامارد (ضرب آلمان به آلمان)	۹۹
۹.۴	ماتریس ژرمال	۱۰۱

۱۰.۲	جمع مستقیم ماتریس ها	۱۰.۴
۱۰.۳	تربیس یا اثر ماتریس	۱۱.۴
۱۰.۷	عملگر قطری کننده $dg(\cdot)$	۱۲.۴
۱۰.۸	عملگر قطری ساز $diag(\cdot)$	۱۳.۴
۱۰.۸	عملگر برداری کننده $vec(\cdot)$	۱۴.۴

۱۱۵	اندازه (نرم)	۵
۱۱۵	نمایش هندسی بردارها	۱.۵
۱۱۷	نرم یا اندازه برداری	۲.۵
۱۲۰	بردار نرمال	۱.۲.۵
۱۲۱	انواع نرم های برداری	۳.۵
۱۲۱	نرم p (نرم L_p) یک بردار	۱.۳.۵
۱۲۵	ضرب داخلی بردارها	۴.۵
۱۳۰	نرم اندازه ماتریس	۵.۵
۱۳۱	نرم L_p برای ماتریس ها	۱.۵.۱
۱۳۳	زاویه ابراهام	۲.۵.۵
۱۳۴	نرم برای ماتریس ها	۳.۵.۵
۱۳۶	نرم های برداری و ماتریسی سازگار	۶.۵
۱۳۷	ضرب داخلی ماتریس ها	۷.۵
۱۳۸	فاصله اقلیدسی زاویه بین بردار	۸.۵
۱۴۰	بردارهای متعامد	۱.۸.۵
۱۴۱	نمایش یک خط در صفحه دو بعدی	۲.۸.۵
۱۴۱	معادله صفحه در فضای سه بعدی	۳.۸.۵
۱۴۲	تصویر یک بردار برداری دیگر	۴.۸.۵
۱۴۴	مولفه متعامد بردار u نسبت به U	۵.۸.۵
۱۴۵	ضرب خارجی بردارها	۹.۵
۱۴۶	کاربرد نرم در اندازه گیری خطاهای مطلق و نسبی	۱۰.۵

۱۴۹	فضای برداری	۶
۱۴۹	فضای برداری	۱.۶
۱۵۷	زیر فضای برداری	۲.۶
۱۶۰	ترکیب و استقلال خطی بردارها	۳.۶
۱۶۴	بردارهای متعامد	۱.۳.۶
۱۶۵	گستره پوشش یا اسپن	۴.۶
۱۶۸	پایه و بعد فضا	۵.۶
۱۷۴	محاسبه بردارهای پایه	۶.۶
۱۷۶	مختصات بر حسب بردارهای پایه	۷.۶
۱۷۷	بردارهای پایه متعامد	۱.۷.۶
۱۷۹	محاسبه بردارهای متعامد پایه	۸.۶
۱۸۳	طراحی بردارهای متعامد با الگوریتم گزینش-اشمیت	۱.۸.۶
۱۸۴	فضاهای مربوط به ماتریس ها	۹.۶
۱۸۴	فضای ستونی یک ماتریس	۱.۹.۶
۱۸۶	فضای سطری یک ماتریس	۲.۹.۶
۱۸۷	فضای صفر یک ماتریس	۳.۹.۶
۱۸۹	بعد صفر ماتریس	۴.۹.۶
۱۹۰	متمم متعامد	۱۰.۶

۱۹۹	تبدیل‌ها	۷
۲۰۰	تبدیل خطی	۱.۷
۲۰۲	تبدیل ماتریسی	۲.۷
۲۰۷	ترکیب تبدیل‌ها	۱.۲.۷
۲۰۷	برد و کرنل تبدیل‌ها	۳.۷
۲۰۷	برد یک تبدیل	۱.۳.۷
۲۰۸	کرنل یک تبدیل	۲.۳.۷
۲۱۰	تبدیل پوششی	۴.۷
۲۱۰	تبدیل یک-به-یک	۵.۷
۲۱۲	تبدیل ایزومورفیک	۶.۷
۲۱۳	تبدیل متعامد	۷.۷
۲۱۴	تبدیل تصویرگر	۸.۷
۲۱۸	تبدیل متعامدگر	۹.۷
۲۱۹	مولفه متعامد یک بردار بر بردار دیگر	۱.۹.۷
۲۱۹	تبدیل هاوسدورف	۱۰.۷
۲۲۴	تبدیل‌های آیین و ایزومتري	۱۱.۷

۲۲۹	دترمینان	۸
۲۲۹	چند جمله‌ای دترمینان	۱.۸
۲۳۴	تعبیر هندسی دترمینان	۲.۸
۲۳۶	دترمینان ماتریس‌های خاص	۳.۸
۲۴۶	برخی روابط در مورد دترمینان	۴.۸
۲۴۸	قاعده کرامر	۵.۸
۲۵۰	کهاد یک ماتریس	۱.۵.۸
۲۵۰	هم عامل یک ماتریس	۲.۵.۸
۲۵۱	ماتریس پیوند	۳.۵.۸

۲۵۳	معکوس ماتریس‌ها	۹
۲۵۳	معکوس ماتریس	۱.۹
۲۵۸	معکوس ماتریس‌های خاص	۲.۹
۲۶۰	محاسبه معکوس یک ماتریس	۳.۹
۲۶۳	لم معکوس سازی ماتریس	۴.۹
۲۶۶	معکوس ماتریس‌های بلوکی	۱.۴.۹
۲۶۷	عدد وضعیت ماتریس	۵.۹
۲۷۰	روش حداقل مربعات	۶.۹
۲۷۲	منطبق کردن منحنی بر یک سری نقاط	۱۶.۹
۲۷۳	ماتریس‌های مشابه	۷.۹

۲۷۷	مقادیر ویژه	۱۰
۲۷۷	زوج‌های ویژه	۱.۱۰
۲۸۱	معادله مشخصه	۲.۱۰
۲۸۵	فضای ویژه	۳.۱۰
۲۸۷	مقادیر ویژه	۴.۱۰
۲۹۱	طیف یک ماتریس	۱.۴.۱۰
۲۹۲	عدد وضعیت	۲.۴.۱۰
۲۹۲	بردارهای ویژه	۵.۱۰
۲۹۶	مقادیر ویژه ماتریس‌های خاص	۶.۱۰

۲۹۹	 بسط کارهونن-لوف	۷.۱۰
۳۰۰	 خارج قسمت رأیلی	۱.۷.۱۰
۳۰۱	 الگوریتم گرم-اشمیت	۸.۱۰
۳۰۲	 زوج ویژه سمت چپ	۹.۱۰
۳۰۷	 ماتریس‌های معین	۱۱
۳۰۷	 ماتریس‌های معین	۱.۱۱
۳۱۶	 مقادیر ویژه ماتریس مثبت معین	۲.۱۱
۳۱۶	 برخی نامساوی‌های ماتریس‌های مثبت معین	۳.۱۱
۳۲۱	 تفکیک ماتریس‌ها	۱۲
۳۲۱	 تفکیک LU ماتریس‌ها	۱.۱۲
۳۲۳	 محاسبه تفکیک LU	۱.۱.۱۲
۳۲۶	 تفکیک پولسکی	۲.۱۲
۳۲۸	 تفکیک LDL	۳.۱۲
۳۳۰	 تفکیک QR	۴.۱۲
۳۳۲	 الگوریتم گرم-اشمیت	۱.۴.۱۲
۳۳۴	 حل مسئله LS با تفکیک QR	۲.۱.۱۲
۳۳۵	 تفکیک مقادیر ویژه	۵.۱۲
۳۳۶	 تفکیک معادلات	۶.۱۲
۳۴۵		□□□□

دیباچه

در طی چندین سال فعالیت پژوهشی، به اهمیت و کاربرد جبر خطی در مباحث مختلف واقف شده و برای کاربرد شناسی، مطالعه و تهیه مطالبی در این زمینه را لازم دیدم. در سال‌های گذشته تصمیم گرفتم مطالبی که در درس جبر خطی تدریس نمودم را مکتوب نمایم. تایپ ابتدایی بخش‌های اولیه کتاب حاضر را از سال ۱۳۸۶ با استفاده از نرم افزار $\text{\LaTeX}$ فارسی (و بعدها زی‌پرشیا) شروع و آنرا به صورت گسسته اصلاح نموده، تغییر داد. در نهایت جیح دادم با فصل بندی و بیانی که به شکل حاضر مشاهده می‌کنید، تکمیل کنم.

علم جبر خطی از سال‌های دور مطرح شده و همواره مد نظر بوده اما اهمیت آن نه تنها با گذشت زمان کاسته نشده، بلکه کاربرد آن روز به روز در علوم مختلف به ویژه در علوم فنی مهندسی فزونی یافته است. لذا، کاملاً طبیعی است مباحث این کتاب مبانی جدید نباشند و البته عزیزان بسیاری کتاب‌های مناسبی در این مقوله به فارسی نوشته‌اند. اما قطعا، به ارائه و فصل بندی آنچه در مقابل دارید، بسیار متفاوت از سایر کتاب‌هایی است که در دسترس هستند. البته بخشی از فصل دوازدهم علیرغم سادگی مطلب کاملاً جدید است و تا کنون با وجود جست و جو و شریک که با بعضی از عزیزان اهل فن داشتم در جایی مشاهده نشده است.

فصل اول و دوم این کتاب به دستگاه معادله‌های خطی و حل آن اختصاص یافته است. فصل سوم و چهارم به بردارها و ماتریس‌ها و همچنین اعمال مختلف برداری و ماتریسی پرداخته شده و در فصل پنجم نرم (اندازه)های مختلف برداری و ماتریسی بررسی می‌شوند. درحالی که برخی از کتاب‌های جبر خطی با توضیح فضای برداری آغاز می‌شوند، در اینجا فضای برداری در فصل ششم بیان شده است. فصل هفت در ترمینان ماتریس‌ها و روابط مختلف مربوطه به صورت مبسوط مورد بحث قرار گرفته است که به نظرم یکی از نقاط قوت کتاب است. معکوس ماتریس در فصل نهم و مقادیر ویژه ماتریس‌ها در فصل دهم بحث شده‌اند. فصل یازده کتاب به ماتریس‌های معین اختصاص یافته و به دنبال آن فصل دوازده برخی تفکیک‌های ماتریسی مهم و متداول را بیان می‌نماید. همکاران محترم و دانشجویان و دانش آموزان گرامی باید توجه داشته باشند که مطالب ارائه شده به صورت زنجیره‌ای به هم مرتبط هستند و لذا توصیه می‌شود که توالی فصل‌ها حفظ شود. اما قسمت‌هایی از کتاب را که با $\clubsuit$ مشخص کرده‌ام، می‌توان بدون از دست دادن کلیت و یکپارچگی بحث چشم پوشی نمود. تمرین‌ها، هم در طول هر فصل و هم در انتهای هر فصل

آورده شده‌اند و برای یافتن مطلب و عبارت‌های خاص، به انتهای کتاب نمایهای از واژه‌هایی که به نظرم از اهمیت بیشتر برخوردار بوده‌اند اضافه کرده‌ام.

لازم می‌دانم که از همکاران گرامی‌ام آقایان دکتر علیرضا خیاطیان، دکتر رضا ثامنی، و دکتر کاووس خورشیدیان که به صورت‌های مختلف در تهیه کتاب مساعدت نمودند تشکر نمایم. از آقای دکتر محمد نینوایی که در زمانی که دانشجوی تحصیلات تکمیلی بودند صمیمانه در نصب ادیتور برای نوشتن و تایپ کتاب مرا یاری دادند؛ از مهندس محسن جلالی خلیل آبادی که از استعداد و علاقه خاصی در ریاضیات بهره‌مند بوده و در مورد چند فصل اول کتاب حاضر نظرهای ارزشمندی ارائه کردند؛ همچنین از مهندس علیرضا احمدی، پور، مهندس محمد معماری زاده، و مهندس ساناز احمدی سه نفر از دانشجویان درس جبر خطی که به تازگی کتاب را مطالعه نموده و برخی ایرادهای نگارشی آنرا جهت رفع نقص به من گزارش دادند؛ تشکر می‌کنم.

کار تایپ و صفحه‌بندی کتاب را به صورتی که مشاهده می‌کنید به تنهایی انجام دادم که البته کاری طولای و وقت گیر بوده است. می‌دانم که در متن کتاب هنوز ایرادها وجود دارند. از عزیزانی که این ایرادها را به منظور رفع نقص به من گزارش نمایند، پیشاپیش تشکر و قدردانی می‌نمایم. در پایان آرزو دارم که به یاری پروردگار، مطالب کتاب برای خواننده محترم مفید و سودمند واقع شود.

مهرزاد بیفش

مرداد ۱۳۹۵