

بنگاه انتشارات و نشر

آشوب، فراکتال و دینامیک

بررسی‌های کامپیوتری در ریاضیات

مؤلف

رأیت، ال دیوانی

ترجمه

حمیدرضا خاتمی

مسعود نوروزیان

انتشارات

سرشناسه : دیوانی، وایرث آل، ۱۹۴۸-م. (Devaney, Robert L)
عنوان و پدیدآور : آشوب، فراکتال و دینامیک: بررسی‌های کامپیوتری در ریاضیات
مؤلف: وایرث دیوانی، ترجمه: حمیدرضا خاتمی، مسعود نوروزیان
مشخصات نشر : تهران: هیمه، ۱۳۹۳.
مشخصات ظاهری : ۱۷۵ ص: مصور (بخشی رنگی)، جدول، نمودار (بخشی رنگی).
شابک : ۱۶۰۰۰۰ ریال، 978-600-6060-36-1

وضعیت فهرست نویسی : فیا
یادداشت : Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer experiments in mathematics
یادداشت : واژه‌نامه.
یادداشت : کتابنامه.
یادداشت : نمایه.
موضوع : ریاضیات
موضوع : رفتار آشوبناک در سیستم‌ها
موضوع : گرافیک کامپیوتری
موضوع : ریاضیات -- داده‌داری
شناسه افزوده : خاتمی، حمیدرضا، ۱۳۳۶- مترجم.
شناسه افزوده : نوروزیان، مسعود، ۱۳۴۱- مترجم.
رده‌بندی کنگره : ۱۳۹۳ Q۸۶۱۲.۹۱۵
رده‌بندی دیویی : ۵۰۰۳
شماره کتابخانه ملی : ۳۲۸۵۶-۴



نام کتاب : آشوب، فراکتال و دینامیک: بررسی‌های کامپیوتری در ریاضیات
تألیف : وایرث آل، دیوانی
مؤلفان : حمیدرضا خاتمی، مسعود نوروزیان
ناشر : هیمه
نوبت چاپ : اول - ۱۳۹۳
حروفچینی و صفحه‌آرایی : گروه فنی انتشارات هیمه (پاک‌نژاد)
لیتوگرافی : آبان
چاپ و صحافی : شریف
تیراژ : ۱۰۰۰ نسخه
قیمت : ۱۶۰۰۰ تومان
شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۶۰۶۰-۳۶-۱ ISBN: 978-600-6060-36-1

آدرس دفتر مرکزی: میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، نبش کوچه شعله‌ور، پلاک ۲، واحد ۱
تلفن: ۴۱ - ۴۰ ۶۶۵ ۶۶۵ تلفکس: ۶۶۵۶۹۳۸۸

حق چاپ و نشر برای ناشر محفوظ است و هرگونه نسخه‌برداری از آن پیگرد قانونی دارد.

دیباچه

دلایل متعددی برای نگرش این کتاب دارم. مهم‌ترین دلیل این است که اعتقاد دارم، ما در آموزش ریاضیات - چه در دوره دبیرستان و چه در دوره دانشکده - متأسفانه در برقراری ارتباط میان ریاضیات زنده معاصر با دانش‌آموزانمان با شکست روبه‌رو می‌شویم. به بیان روشن‌تر، بخش زیادی از ریاضیات مدارس و دانشگاه، بر ریاضیات قرون گذشته تأکید دارد. به همین دلیل، بسیاری از دانش‌آموزان، تصور می‌کنند که ریاضیات جدید در زمان اقلیدس با فیثاغورس پایان یافته است (و یا اگر با حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا باشند، حداکثر زمان نیوتن یا لایب‌نیتز پیش خواهند رفت). بیشتر دانش‌آموزان احساس می‌کنند که ریاضیات، نظام خشکی است که به عنوان یک حرفه، به جز کار تدریس در جای دیگری کاربرد ندارد. آن‌ها هیچ درک یا احساسی از کار یک ریاضیدان و تفکر او ندارند.

من فقط می‌توانم فریاد اعتراضی را که یک فیزیکدان، شیمی‌دان، زیست‌شناس در نتیجه تدریس علم قرن هفدهم در دروس دبیرستان با آن روبه‌رو خواهد شد، تصور کنم. با این حال، ما به عنوان ریاضی دان، به کار مشابه خود، هیچ فکری نمی‌کنیم. این درست است که ریاضیات یک علم یکپارچه است، لیکن استثنایی نیز بر این قاعده وجود دارند، یعنی اینکه ما باید به جد بکوشیم تا از هر فرصتی برای آشنا ساختن دانش‌آموزانمان با زمینه‌های جدید و هیجان‌انگیز ریاضیات استفاده کنیم.

من احساس می‌کنم یکی از این فرصت‌ها در حوزه سیستم‌های دینامیکی به دست می‌آید. یعنی شاخه‌ای از ریاضیات که به بررسی فرآیندهایی می‌پردازد که نسبت به زمان حرکت یا تغییر می‌کنند. سیستم‌های دینامیکی در همه شاخه‌های علمی ظاهر می‌شوند. به عنوان مثال، الگوهای تغییرات آب و هوا در هواشناسی، بالا و پایین رفتن قیمت‌ها، در بازار بورس در علم اقتصاد، افزایش و کاهش جمعیت در محیط زیست و حرکت سیارات و کهکشان‌ها در ستاره‌شناسی، همگی نمونه‌هایی از سیستم‌های دینامیکی هستند. حوزه سیستم‌های دینامیکی، یکی از زمینه‌های با اهمیت تحقیقاتی در ریاضیات است که برای غیر ریاضی‌دانان نیز، دارای مزیت‌های فراوان و قابل حصول است. جنبه‌ای از سیستم‌های دینامیکی در زمانی ظاهر می‌شود که یک تابع ریاضی را چندین بار تکرار کنیم و از خود بیرسیم که در نتیجه این تکرار چه اتفاقی می‌افتد. شگفت‌آور این است که حتی برای ساده‌ترین توابع ریاضی مانند توابع درجه دوم یا سوم از متغیرهای حقیقی یا مختلط نیز، هیچ‌کس پاسخ کاملی برای این پرسش ندارد. در حقیقت، ریاضی‌دانان بسیاری در سراسر جهان، دقیقاً روی همین پرسش کار می‌کنند. ببینید که توضیح این مسأله حل نشده برای دانش‌آموزان دبیرستانی چقدر ساده است. با کمک یک رابطه درجه دوم و تکنیک‌های اولیه رسم نمودار، دانش‌آموزان احساس می‌کنند که همه چیز را درباره توابع درجه دوم می‌دانند. تجربه به من نشان داده است که آن‌ها از دانستن اینکه در این حوزه همه چیز شناخته شده نیست، کاملاً شگفت زده می‌شوند و سپس بسیاری از آن‌ها اشتیاق پیدا می‌کنند که در این مسأله غوطه‌ور شوند و خود آن را کشف کنند.

از آنجا که کامپیوتر به آسانی در اختیار بسیاری از دانش‌آموزان قرار دارد، هم اکنون موقعیت مناسبی برای معرفی سیستم‌های دینامیکی برای آنان به وجود آمده است و این موضوع، دلیل دوم من برای نگرش

این کتاب است. فرایند تکرار را نمی‌توان به سادگی با محاسبات دستی انجام داد، لیکن این کار به کمک یک ماشین حساب یا کامپیوتر بسیار آسان است. یک برنامه بسیار ساده شش یا هفت خطی به زبان BASIC، دانش‌آموزان را قادر می‌سازد که صدها و هزارها تکرار از یک تابع را محاسبه کند. به این وسیله، دانش‌آموزان، قدرت کشف بیابان برهوت دینامیک (حرکت) توابع درجه دوم و بسیاری از توابع ساده دیگر را که به اندازه کافی شناخته نشده‌اند، در خود احساس می‌کنند. این یک تحول جدید و ریشه‌ای در ابزارهای ریاضی است. این دانش، یک آزمایشگاه و یک زمینه تجربی در اختیار ریاضیات قرار می‌دهد. همان‌طور که فیزیک‌دانان، شیمی‌دانان و زیست‌شناسان از دیرباز در درس‌های مقدماتی از آزمایشگاه استفاده کرده‌اند، اکنون ما نیز در ریاضیات، موقعیت مشابهی را به دست آورده‌ایم و باید با حق‌شناسی و قدردانی به نتایج تحقیقات ریاضی دانش‌آموزان امروزی در این شاخه بنگریم.

دلیل آخر من برای نگارش این کتاب، نشان دادن زیبایی‌های عظیم حوزه سیستم‌های دینامیکی به دانش‌آموزان است. ما در ریاضیات، مرتباً در زمینه ریاضیات زیبا، با دانش‌آموزانمان سخن می‌گوییم. ترتیب، ساختار و ارتباط درونی شاخه‌های مختلف ریاضیات که ما ریاضی‌دانان را مجذوب خود کرده است، در عین حال ما را تحریک می‌کند این زیبایی را با دیگران نیز در میان بگذاریم، اما تقریباً همیشه از نشان دادن این زیبایی‌ها به دانش‌آموزان عاجز هستیم. اما اکنون به کمک کامپیوتر (به عنوان یک ابزار) این زیبایی در چنگ ما قرار دارد. این سهولت که به کمک آن‌ها، دانش‌آموزان می‌توانند مجموعه‌های فوق‌العاده پیچ در پیچ جویا و مندلبرات را محاسبه کنند، و آن‌ها را نمایش دهند، این تصاویر هندسی را برای آنان کاملاً ملموس می‌کند. تجربه من این است که دانش‌آموزان با دیدن این تصویر کاملاً مسحور می‌شوند. آن‌ها با اشتیاق، مجموعه‌های جویا را یکی پس از دیگری می‌سازند و از خود می‌پرسند که «در درون آن چه می‌گذرد؟» این آغاز تجربه‌ای جدید برای آنان در ریاضیات است و به علاوه به این نکته پی می‌برند که در بسیاری از مواقع، هیچ‌کس پاسخ‌ن‌پرسش آن‌ها را نمی‌داند. از این رو به نظر می‌رسد که قابلیت دستیابی و اغواکنندگی نظریه سیستم‌های دینامیکی، موضوعی را پدید آورده است که می‌توان آن را برای دانش‌آموزان دبیرستانی و دانش‌جویان ارائه کرد. من احساس می‌کنم که عرضه ریاضیات زنده در انتها، بسیار بسیار با ارزش‌تر از آن خواهد بود که تأکید مستمر خود را بر یادگیری بیشتر ابزارها و روش‌هایی متمرکز کنیم که «خود به خود حاصل خواهد شد». همچنین احساس می‌کنم، درک این نکته که ریاضیات، یک نظام زنده و با روح است، موجب خواهد شد که دانش‌آموزان دیگر احساس نکنند ریاضیات نظام خشکی است و در هیچ‌جا به کار نمی‌آید.

سخنی با آموزگاران

هدف این کتاب، در اختیار گذاشتن ابزاری برای آموزگاران است که به کمک آن بتوانند دانش‌آموزان را دانش‌جویان خود را به وسیله ریاضیات به هیجان آورند. مطالب ریاضی این کتاب می‌باید برای دانش‌جویانی که درس جبر مجرد II را گذرانده‌اند، قابل درک باشد. کمی مثلثات هم برای فصل‌های بعد (به‌ویژه فصل‌های ۷ و ۱۱) لازم است و توابع سینوس و کسینوس در برخی از مثال‌های کتاب به کار رفته‌اند. با این حال، برای بخش عمده‌ای از کتاب به دانش بیشتری در زمینه مثلثات نیاز نیست.

از این کتاب می‌توان به روش‌های مختلفی در محیط کلاس استفاده کرد. مطالب آن را می‌توان به عنوان «مباحث خاصی» در نظر گرفت که در لایه‌لای مباحث رسمی دروس مدرسه و دانشگاه گنجانیده می‌شوند. به عنوان مثال، موارد مربوط به تکرار و تجزیه و تحلیل نموداری، مبحثی است که به طور طبیعی بر بحث توابع و روش‌های رسم نمودار منطبق است. برنامه‌های کامپیوتری برای ساختن مدارها، فراکتال‌ها، مجموعه‌های جولیا و مانند این‌ها، بسیار کوتاه هستند و به سادگی در درس برنامه‌نویسی ادغام می‌شوند. بسیاری از مباحث این کتاب، پروژه‌های خوبی برای کلوب‌های ریاضی محسوب می‌شوند. موضوع حرکت، مبحث کاملی را برای تدریس در یک نیمسال در سال‌های آخر دبیرستان تشکیل می‌دهد (مثلاً به جای یک درس فوق‌العاده ساده در حساب دیفرانسیل و انتگرال) یا به عنوان درسی غیر تخصصی در دانشکده که به منظور آشنایی دانش‌جویان با ابزارهای ریاضی تدریس می‌شود. ارائه چنین دروسی حتی می‌تواند دانش‌آموزان را به ادامه یادگیری ریاضیات ترغیب کند و این درست عکس حالتی است که معمولاً پیش می‌آید، زیرا آن‌ها در برخی از دروس خیلی زود از ریاضیات روی گردان می‌شوند.

در هر فصل حداقل یک مبحث جدید از ریاضیات معرفی شده است. این مباحث از مفاهیم تکرار، مدارها، تجزیه و تحلیل نموداری و شاخه‌شاخه شدن در فصول اولیه شروع شده و تا جبر اعداد مختلط، نمایش‌های قطبی و ریشه‌های دوم مختلط در فصل‌های آخر ادامه می‌یابد. فرصت‌هایی نیز در کتاب برای کارهای بعدی خوانندگان در نظر گرفته شده است. این فرصت‌ها را با عناوین تمرین‌ها، آزمایش‌ها و پروژه‌ها طبقه‌بندی کرده‌ایم. تمرین‌ها معمولاً شامل محاسباتی شبیه مطالب قبلی هستند، آزمایش‌ها، به خوانندگانی نیاز دارند که از برنامه‌های کامپیوتری کتاب استفاده می‌کنند تا مفاهیم مرتبط با آن را «کشف» کنند. پروژه‌ها به خوانندگانی نیاز دارند که این برنامه‌ها را به راه‌های مختلفی به کار می‌گیرند تا خروجی‌های متفاوتی به دست آورند و یا بر سرعت اجرای برنامه‌ها بیفزایند.

چند کلمه هم در زمینه برنامه‌های کامپیوتری: برنامه‌های کامپیوتری ارائه شده در این متن به زبان BASIC نوشته شده‌اند. دلیل اصلی این کار آن است که برنامه‌ها برای عده بیشتری از خوانندگان قابل استفاده باشند. دانش‌آموزان یا برنامه‌نویسانی که با زبان‌های برنامه‌نویسی دیگری مثل PASCAL یا C آشنا هستند، نیز می‌توانند بدون هیچ مشکلی این برنامه‌ها را به زبان‌های مذکور تبدیل کنند. در واقع، این کار شدنی است، چون بسیاری از برنامه‌هایی که مجموعه‌های جولیا و مندلیات را می‌سازند، به طور کامل در یک کامپیوتر شخصی اجرا می‌شوند.

این کتاب قصد ندارد یک کتاب مقدماتی برنامه‌نویسی باشد، با این حال، با کمی هدایت، دانش‌آموزانی

که تجربه برنامه‌نویسی ندارند، نیز می‌توانند از این کتاب استفاده کنند. در سراسر کتاب، فقط دستورها و نمودارهایی که برای اهداف ما، مطلقاً مورد نیاز بوده‌اند، توضیح داده شده‌اند. دانش‌آموزانی که تجربه برنامه‌نویسی دارند، باید بتوانند برنامه‌های این کتاب را به برنامه‌های مورد نیاز خود تبدیل کنند، مثلاً برنامه‌هایی که دارای مشخصه‌های اضافی مانند خروجی رنگی یا ورودی گرافیکی، که به ماوس نیاز دارند. در عوض، دانش‌آموزانی که فاقد تجربه برنامه‌نویسی هستند، می‌توانند برنامه‌های داده شده را در کامپیوتر وارد کنند و سپس رفتار دینامیکی آن‌ها را مشاهده کنند. باید متذکر شوم که برنامه‌های ساده این کتاب بسیار کوتاه بوده و بیشتر آن‌ها کمتر از ده سطر هستند. به تدریج که دانش‌آموزان در استفاده از کامپیوتر مهارت می‌یابند، می‌توانند تغییرات ساده‌ای را که در برنامه‌های پیشنهادی پروژه‌ها مطرح شده‌اند، اعمال کنند و و به این ترتیب در برنامه‌نویسی ماهرتر شود.

از آن‌جا که برنامه‌های اصلی این کتاب برای اجرا شدن، به وقت زیادی نیاز دارند، دانش‌آموزان اغلب علاقه دارند که این برنامه‌ها را در ساعات پس از مدرسه اجرا کنند. یعنی آن‌ها را بعد از ظهرها اجرا کنند و وقتی صبح زود به مدرسه می‌روند، خروجی آن‌ها را مشاهده کنند. سطح دشواری این کتاب، عمدتاً در سطوح مختلفی طراحی شده است و همزمان با پیش رفتن در فصول کتاب، بر دشواری آن‌ها نیز افزوده می‌شود. در آغاز، دانش‌آموزان برای محاسبه مدارها، فقط به یک ماشین حساب علمی یا برنامه ساده شش خطی BASIC نیاز دارند. در اینجا، ریاضیات لازم فقط در حد آشنایی با مفهوم تابع و نمودار آن است. قلب کتاب عبارت است از فصول مجموعه‌های جولیا، مجموعه مندلیات و فراکتال‌ها. در اینجا دانش‌آموزان با برنامه‌های گرافیکی طولانی‌تری مانند ساختارهای هندسی در صفحه مختلط روبه‌رو می‌شوند. بخش نهایی در مجموعه‌های جولیا توابع را می‌یابد به عنوان یک «ضیافت» خاص برای کسانی تلقی کرد که می‌خواهند خود را کاملاً در مجموعه‌های جولیا غرق سازند. در این بخش، توابع مختلطی مانند توابع نمایی، سینوسی و کسینوسی که از نظر ریاضی، به‌طور مرتب شاخه شاخه می‌شوند، معرفی می‌گردند. هدف اصلی کتاب، معرفی مفهوم تکرار و بررسی و توضیح ساختارهای عجیبی است که از تکرار حاصل می‌شوند، مانند: مجموعه‌های جولیا، مجموعه مندلیات و فراکتال‌ها. به همین دلیل، فصل‌های ۶ و ۷ (مجموعه‌های جولیا)، ۸ (مجموعه مندلیات) و ۹ (فراکتال‌ها)، قلب این کتاب را تشکیل می‌دهند. فصل ۹، از فصول ۶ تا ۸ مستقل است و می‌توان آن را پیش از این فصول نیز مطالعه کرد. همچنین فصل ۷، فقط الگوریتم‌های اضافی را برای مجموعه‌های جولیا ارائه می‌کند و می‌توان از آن گذشت.

پیش‌گفتار مترجمان

بی‌گمان بیان ساده هر دانشی هنریست که اغلب در دانشمندان بزرگ همان رشته وجود دارد. این کتاب یکی از همان موارد است که توانسته بحث فراکتال و آشوب سیستم‌های دینامیکی را به ساده‌ترین زبان توضیح دهد و بی‌گمان برای پویندگان این مباحث جدید افق روشنی را از لحاظ نظری فراهم می‌کند. لازم به ذکر است که از آزمایشات کامپیوتری امروز پیشرفته‌تر شده‌اند و نرم‌افزارهای بسیاری برای رسم این مجموعه‌ها تولید و عرضه شده است که می‌توان برخی از آن‌ها را از اینترنت دریافت و استفاده کرد، اما آگاهی از برنامه‌های ابتدایی برای مبتدیان این دانش ضروری است.

بدون تردید همانطور که پدیدآورنده این کتاب گفته است، این نوع ریاضیات تصور عمومی رایج مربوط به دانش ریاضی را در هم شکسته و کاربرد وسیع‌تری از آن را که همراه با هندسه جدیدی است معرفی می‌نماید. هندسه‌ای که می‌تواند در مورد طول رودخانه‌ها در مسیر پر پیچ و خم خود، الگوی شکستگی سازه‌های بتنی، محاسبه محیط کشورها و همچنین فشرده‌سازی اطلاعات با استفاده از الگوهایی که در طبیعت جا ندارد و بی‌جان وجود دارد بحث و توضیح دهد. همچنین پدیده آشوب در سیستم‌های دینامیکی که می‌تواند در علوم بسیاری مورد استفاده قرار گیرد از دیدگاه نظری مورد بحث علمی قرار گرفته است.

در پایان از مدیریت محترم انتشارات همه آقای دکتر اسماعیل یوسفی که چاپ این کتاب ارزشمند را زمانیکه برخی انتشارات دیگر به دلایل عمدتاً اقتصادی تمایلی به چاپ این کتاب نداشته‌اند انجام داده‌اند نهایت سپاسگزاری را می‌نماید.

از کلیه خوانندگان این کتاب در خواست می‌شود، کلیه اشکالات، انتقادات و هر نوع نظری در مورد این کتاب دارند را به آدرس پست الکترونیکی زیر در میان بگذارند.

hakhata@gmail.com

فهرست مطالب

۱	گشت و گذار ریاضی	۱
۷	تکرار	۲
۸	۱-۱ توابع ریاضی	
۹	۲-۱ تکرار با استفاده از ماشین حساب علمی	
۱۰	۳-۱ نمادگذاری تابعی	
۱۳	۴-۱ مدارها	
۱۸	۵-۱ نقاط ثابت و متناوب	
۲۱	۶-۱ کاربرد در بوم شناسی	
۲۵	تکرار به کمک کامپیوتر	۳
۲۶	۱-۲ برنامه تکرار (ITERATE1)	
۲۸	۲-۲ تابع لوجیستیک	
۳۶	۳-۲ گرافیک کامپیوتری	
۴۵	آنالیز نموداری	۴
۴۶	۱-۳ نمودار یک تابع	
۴۷	۲-۳ استفاده از آنالیز نموداری	
۵۱	۳-۳ جذب کردن و دفع کردن نقاط ثابت	
۵۶	۴-۳ مدارهای با ثبات و بی ثبات	
۵۸	۵-۳ نقاط متناوب دفع کننده و جذب کننده	
۵۹	۶-۳ تکرارهای بیشتر	
۶۵	دسته معادلات درجه دو	۵
۶۶	۱-۴ مدارهای دورشونده توابع درجه دوم	
۷۰	۲-۴ مدارهای جالب	
۷۲	۳-۴ دوره تناوب شاخه شاخه شدن	
۷۸	۴-۴ تابع درجه دوم آشوبی	

۸۵ عمل تکرار در صفحهٔ مختلط ۶

۸۶	۱-۵ اعداد مختلط
۸۹	۲-۵ برنامهٔ (ITERATE4)
۹۴	۳-۵ مجموعهٔ جولیا

۹۷ مجموعهٔ جولیا: حوزهٔ مرزها ۷

۹۸	۱-۶ مدارهای درشوده (اگرا)
۱۰۰	۲-۶ برنامهٔ جولیا ۱ (JULIA1)
۱۰۳	۳-۶ بزرگ کردن مجموعهٔ جولیا

۱۱۱ مجموعهٔ جولیا: الگوریتم‌های دیگر ۸

۱۱۲	۱-۷ نمایش قطبی اعداد مختلط
۱۱۶	۲-۷ تابع مربع
۱۱۷	۳-۷ برنامهٔ (JULIA2)
۱۲۱	۴-۷ غبار فراکتالی
۱۲۶	۵-۷ روش آشکارسازی مرزی

۱۲۹ مجموع مندلیبرات ۹

۱۳۰	۱-۸ نقاط بحرانی و مدارها
۱۳۱	۲-۸ ساختن مجموعهٔ مندلیبرات
۱۳۳	۳-۸ برنامهٔ مندلیبرات ۱ (MANDELBROT1)
۱۳۶	۴-۸ اصلاح برنامهٔ (MANDELBROT1)
۱۴۱	۵-۸ مفهوم مجموعهٔ مندلیبرات چیست

۱۴۷ تکرار هندسی: فراکتال‌ها ۱۰

۱۴۸	۱-۹ فراکتال‌ها
۱۴۸	۲-۹ مثلث سیرپینسکی
۱۵۱	۳-۹ مجموعهٔ کانتور
۱۵۵	۴-۹ دانه‌های برف کخ
۱۵۸	۵-۹ محاسبهٔ فراکتال‌ها

۱۶۳	ابعاد کسری	۶-۹
۱۶۶	فراکتال‌ها و دینامیک‌ها	۷-۹

۱۷۱	آشوب	۱۱
۱۷۲	تابع مربع	۱-۱۰
۱۷۴	وابستگی حساس	۲-۱۰

۱۷۹	مجموعه‌های جولایی توابع دیگر	۱۲
۱۸۰	چند جمله‌ای با درجه بالا	۱-۱۱
۱۸۵	فرمول اویلر	۲-۱۱
۱۸۷	مجموعه‌های جولایی توابع متعالی	۳-۱۱
۱۹۴	مجموعه‌های جولایی انفجاری (واگرا)	۴-۱۱