



کنکور کارشناسی ارشد

# مهندسی مکانیک

کتاب مهم

معادلات دیفرانسیل

خلاصه مطالب درسی

نکات ویژه کنکوری

تست‌های طبقه‌بندی شده موضوعی کنکور کارشناسی ارشد

با پاسخ تشریحی

کنکور سراسری دانشگاه آزاد اسلامی

تا سال ۱۳۸۵



مولف: بهزاد خداکرمی

دانشجوی مهندسی شیمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

انتشارات آزاده



## انتشارات آزاده

ناشر سری کتاب‌های راهنمای ارشد

کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک

کتاب هفتم: معادلات دیفرانسیل

- تألیف: بهزاد خداکرمی
- حروفچینی و آماده سازی: انتشارات آزاده
- لیتوگرافی: مؤسسه امید
- چاپ: مروی
- صحافی: آزاده
- تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه
- چاپ اول - اردیبهشت ماه ۱۳۸۵
- ناشر: انتشارات آزاده
- بهاء: ۳۴۰۰۰ ریال
- شابک: ۹۶۴-۵۰۱-۱۱۴-۰

مسئولیت مطالب کتاب به عهده مؤلف و حق چاپ و نشر برای ناشر محفوظ است.

● مرکز پخش: انتشارات آزاده - خیابان انقلاب، مقابل دانشگاه تهران، بین خیابان نقره‌رازی و خیابان دانشگاه، جنب بانک ملت، پاساژ پلاک ۱۳۳۸، طبقه زیرمکف - کدپستی ۱۳۱۲۷ تلفن: ۶۶۴۱۴۳۷۴ - ۶۶۴۱۵۷۵۳ دورنویس: ۶۶۴۱۳۵۱۰

فروش اینترنتی و آنلاین از طریق سایت آی کتاب [www.fikeetab.com](http://www.fikeetab.com)

خداکرمی، بهزاد، ۱۳۵۶ -

معادلات دیفرانسیل / مؤلف بهزاد خداکرمی. - تهران: آزاده، ۱۳۸۵.

۲۵۰ ص: مصور، جدول، نمودار. - (کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک: [ج] ۷) (سری کتابهای آمادگی کنکور کارشناسی ارشد. راهنمای ارشد)

ISBN 964-501-114-0

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

۱. دانشگاهها و مدفوس حالی - ایران - آزمونها. ۲. معادله‌های دیفرانسیل - آزمونها و نمرتها (حالی). ۳. معادله‌های دیفرانسیل - راهنمای آموزشی (حالی). ۴. آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی - ایران  
الف. عنوان. ب. فروست: کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک: [ج] ۷.

۳۷۸/۱۶۶۲

LB ۱۳۵۳ / ۵۸۸۱۲۲

م ۸۵ - ۳۳۶۹

ج. ۷  
کتابخانه ملی ایران

## مقدمه ناشر

«سری کتاب‌های آمادگی برای کنکور کارشناسی ارشد» در بیش از ۹۰ جلد، حاصل تلاش فراوان، دقت نظر و انتقال دانش و تجربه بیش از یکصد نفر از نیروهای جوان و متخصص با تحصیلات عالی دانشگاهی از دانشگاه‌های معتبر صنعتی امیرکبیر، صنعتی شریف و تهران است. در این مجموعه، سعی شده تا با بهره‌گیری از کادر فنی مجرب نشر، کیفیت کار را از نظر علمی و فنی بالا برده و به ویژه از نظر حروفچینی و صفحه‌بندی متن، کتاب را نسبت به موارد مشابه متمایز نماییم.

با توجه به نکات یاد شده، پیش‌بینی می‌شد که راهیان کنکور کارشناسی ارشد با مطالعه این مجموعه، ضمن صرفه‌جویی در وقت برای تهیه منابع معتبر، با مفاهیم و نکات ضروری مفیدی آشنا شوند که این مهم، با توجه به استقبال خوب و تماس‌های تشکرامیز خوانندگان محترم در این مدت، بر ما مشخص شد.

**راہیان ارشد** اولین سعی و تلاش به سبک خود بوده برای ارائه مجموعه کاملی از بهترین خلاصه درس‌ها، نکات کاملاً ویژه کنکوری و تست‌های طبقه‌بندی شده موضوعی سال‌ها کنکور کارشناسی ارشد با پاسخ تشریحی براساس سرفصل‌های مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی و همچنین سرفصل‌های متداول در دانشگاه‌ها، که به عنوان مرجعی معتبر برای استفاده داوطلبان کنکور دانشگاه‌های سراسری و آزاد (برای اولین بار) به بازار عرضه شده است.

انتشارات آزاده از کلیه عزیزانی که به هر نوعی در تولید و توزیع این مجموعه سهمی داشته‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نماید و نیز کلیه کاستی‌ها و اشکالات موجود را برعهده می‌گیرد و به همین منظور و برای رفع آن‌ها، در انتظار دریافت نظرات انتقادی از استادان گرانقدر، دانشجویان و دیگر خوانندگان این مجموعه و حتی همکاران است.

تهران - بهار ۱۳۸۵

جعفر بدوستانی

مهدی مرتضوی تبریزی

## مقدمه سرپرست مؤلفین راهیان ارشد و مؤلف این کتاب

سری کتابهای آمادگی برای کنکور کارشناسی ارشد «راهیان ارشد» که اینک با عنایت حضرت باری تعالی چاپ و در دسترس شما دانشجویان پرشور و اشتیاقی جویای علم و دانش، علاقمندان و استادان رشتههای فنی و مهندسی قرار می‌گیرد شاید جزو اولین کتابهایی است که در این زمینه به صورت منحصر به فرد تدوین، تالیف و طبقه‌بندی شده است.

با توجه به رقابتی که بین داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد وجود دارد و همچنین علاقه و اشتیاق وافر جوانان به ادامه تحصیل، و از طرفی کمبود و گاهی نبود مراجع مفید علمی، نیاز به ارائه مجموعه کاملی احساس می‌شد که دارای ویژگی‌های برتری بوده و برای داوطلبان عزیز مفید واقع شود، به همین منظور مجموعه کتابهای راهیان ارشد برای آمادگی داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد گردآوری و تالیف شد.

از ویژگی‌های منحصر به فرد این کتابها نحوه تالیف آنها است. در واقع برای هر رشته، به تناسب حجم دروس و مطالب، چند جلد کتاب تهیه گردیده؛ هر جلد شامل تعدادی از دروس رشته مربوطه است؛ هر درس از تعدادی فصل مطابق با سرفصلهای آموزش عالی تشکیل شده که هریک از آنها شامل ۳ بخش مجزا است: بخش اول خلاصه مطالب درس و نکات ویژه کنکوری، بخش دوم تستهای طبقه‌بندی شده موضوعی کنکورهای سراسری و دانشگاه آزاد اسلامی و بخش سوم پاسخ تشریحی تستها. با توجه به اینکه تستهای کنکور، بهترین منبع تستی برای داوطلبان به حساب می‌آید، تمام تستهای ارائه شده در این مجموعه از تستهای کنکور انتخاب شده، بجز در موارد خاصی که تعداد تستها کافی نبوده و مؤلفین محترم اقدام به طراحی تست نموده‌اند.

کتابی که در دسترس شما است، جلد هفتم از مجموعه کتابهای مهندسی مکانیک می‌باشد که شامل درس معادلات دیفرانسیل است.

اینجانب، مراتب تشکر و قدردانی خود را از مدیریت محترم انتشارات آزاده، جناب آقای جعفر بدوستانی و نیز جناب آقای مهدی مرتضوی و از گروه حروفچینی و ترسیم شکل‌های انتشارات آزاده خانها فرزانه محمدلو و مریم شیروانی ابراز می‌دارم.

با توجه به اینکه هیچ کتابی خالی از اشکال نیست، از کلیه خوانندگان ارجمند کتاب خواهشمندم کلیه اشکالات علمی و تایپی و نیز پیشنهاد و انتقادات خود را به نشانی ناشر یادآور شوند تا در چاپهای بعدی مدنظر قرار گرفته و مجموعه‌ای با حداقل اشکالات در اختیار داوطلبان قرار گیرد.

به امید موفقیت

بهزاد خداکریمی

تهران بهار ۱۳۸۵

## فهرست مطالب

|                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------|----|
| فصل اول: مقدمه .....                                        | ۹  |
| ۱ - ۱ - مقدمه .....                                         | ۹  |
| ۱ - ۲ - مرتبه، درجه و نوع معادله دیفرانسیل .....            | ۹  |
| ۱ - ۳ - جوابهای معادله دیفرانسیل .....                      | ۱۱ |
| ۱ - ۴ - تشکیل معادله دیفرانسیل از یک رابطه اولیه .....      | ۱۲ |
| ۱ - ۵ - تعیین مسیرهای متعامد یک دسته منحنی .....            | ۱۴ |
| تستهای طبقه‌بندی شده کنکور سراسری و آزاد فصل اول .....      | ۱۷ |
| پاسخ تستهای طبقه‌بندی شده کنکور سراسری و آزاد فصل اول ..... | ۱۸ |
| فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول .....                  | ۱۹ |
| ۲ - ۱ - مقدمه .....                                         | ۱۹ |
| ۲ - ۲ - معادلات جدانشدنی .....                              | ۲۰ |
| ۲ - ۳ - معادلات همگن .....                                  | ۲۳ |
| ۲ - ۴ - معادلات کامل .....                                  | ۳۱ |
| ۲ - ۵ - عامل انتگرال‌ساز .....                              | ۳۵ |
| ۲ - ۶ - معادلات دیفرانسیل خطی .....                         | ۴۱ |
| ۲ - ۷ - معادلات خاص .....                                   | ۴۷ |
| ۲ - ۷ - ۱ - معادله برنولی .....                             | ۴۷ |
| ۲ - ۷ - ۲ - معادله ریکاتی .....                             | ۵۱ |
| ۲ - ۷ - ۳ - معادلات لاگرانژ و کلوو .....                    | ۵۲ |
| ۲ - ۸ - حالت‌های خاص .....                                  | ۵۴ |
| ۲ - ۸ - ۱ - معادلات به شکل $y = f(x, y')$ .....             | ۵۴ |
| ۲ - ۸ - ۲ - معادلات به شکل $x = f(y, y')$ .....             | ۵۵ |
| ۲ - ۸ - ۳ - معادلات دیفرانسیل فاقد متغیر وابسته .....       | ۵۶ |
| ۲ - ۸ - ۴ - معادلات دیفرانسیل فاقد متغیر مستقل .....        | ۵۸ |
| ۲ - ۸ - ۵ - معادلات فاقد متغیرهای وابسته و مستقل .....      | ۵۹ |
| ۲ - ۹ - معادلات دیفرانسیل مرتبه اول درجه $n$ .....          | ۵۹ |
| تستهای طبقه‌بندی شده کنکور سراسری و آزاد فصل دوم .....      | ۶۲ |
| پاسخ تستهای طبقه‌بندی شده کنکور سراسری و آزاد فصل دوم ..... | ۶۸ |
| فصل سوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر .....         | ۷۸ |
| ۳ - ۱ - معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی .....               | ۷۸ |
| ۳ - ۱ - ۱ - جواب عمومی معادله همگن .....                    | ۷۸ |
| ۳ - ۱ - ۲ - جواب عمومی معادله ناهمگن .....                  | ۷۹ |
| ۳ - ۱ - ۳ - قضیه یکتایی جواب .....                          | ۷۹ |

|     |                                                               |
|-----|---------------------------------------------------------------|
| ۸۱  | ۳-۲. معادلات همگن با ضرایب ثابت                               |
| ۸۳  | ۳-۳. روش ضرایب نامعین                                         |
| ۹۲  | ۳-۴. روش عملگرهای معکوس                                       |
| ۹۴  | ۳-۴-۱. خواص عملگرها                                           |
| ۹۵  | ۳-۴-۲. حالت‌های خاص                                           |
| ۱۰۴ | ۳-۵. معادله اوایلر                                            |
| ۱۰۹ | ۳-۶. استفاده از یک جواب مشخص جهت یافتن جواب دیگر              |
| ۱۱۵ | ۳-۷. روش تغییر پارامترها                                      |
| ۱۱۷ | ۳-۸. قضیه آبل                                                 |
| ۱۱۸ | ۳-۹. شکل نرمال معادله مرتبه دوم                               |
| ۱۲۰ | ۳-۱۰. روش کاهش مرتبه                                          |
| ۱۲۰ | ۳-۱۰-۱. معادلات فاقد متغیر مستقل $y'' = f(y, y')$             |
| ۱۲۲ | ۳-۱۰-۲. معادلات فاقد متغیر وابسته $y'' = f(x, y')$            |
| ۱۲۳ | ۳-۱۰-۳. معادلات فاقد متغیرهای وابسته و مستقل $f(y', y'') = 0$ |
| ۱۲۵ | تست‌های طبقه‌بندی شده کتکور سراسری و آزاد فصل سوم             |
| ۱۳۴ | پاسخ تست‌های طبقه‌بندی شده کتکور سراسری و آزاد فصل سوم        |
| ۱۵۰ | فصل چهارم: حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌ها          |
| ۱۵۰ | ۴-۱. مقدمه                                                    |
| ۱۵۰ | ۴-۲. نقاط عادی و تکین                                         |
| ۱۵۴ | ۴-۳. جوابهای سری حول یک نقطه عادی                             |
| ۱۶۰ | ۴-۴. جوابهای سری حول یک نقطه تکین (روش فروبنیوس)              |
| ۱۶۵ | ۴-۵. معادله دیفرانسیل لزاندر                                  |
| ۱۶۶ | ۴-۵-۱. روابط بازگشتی                                          |
| ۱۶۷ | ۴-۵-۲. خواص چندجمله‌ایهای لزاندر                              |
| ۱۷۱ | ۴-۶. تابع گاما                                                |
| ۱۷۱ | ۴-۶-۱. خواص تابع گاما                                         |
| ۱۷۴ | ۴-۷. معادله بسل                                               |
| ۱۷۶ | ۴-۷-۱. تبدیل برخی از معادلات دیفرانسیل به معادله بسل          |
| ۱۷۹ | ۴-۷-۲. خواص توابع بسل                                         |
| ۱۸۵ | ۴-۷-۳. معادله بسل اصلاح شده یا تعدیل شده                      |
| ۱۸۷ | ۴-۷-۴. خواص توابع بسل اصلاح شده                               |
| ۱۸۷ | ۴-۷-۵. رفتار توابع بسل وقتی $x \rightarrow 0$                 |
| ۱۸۷ | ۴-۷-۶. رفتار توابع بسل وقتی $x \rightarrow \infty$            |
| ۱۸۹ | ۴-۷-۷. رابطه بین توابع بسل مرتبه $p$ و $p-1$                  |
| ۱۸۹ | ۴-۷-۸. تعامد توابع بسل نوع اول                                |

|     |                                                                               |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------|
| ۱۹۰ | ۴-۸- تابع بتا.....                                                            |
| ۱۹۱ | ۴-۹- معادله دیفرانسیل چیبیشف.....                                             |
| ۱۹۲ | ۴-۱۰- معادله دیفرانسیل لاگر.....                                              |
| ۱۹۳ | تست‌های طبقه‌بندی شده کنکور سراسری و آزاد فصل چهارم.....                      |
| ۱۹۶ | پاسخ تست‌های طبقه‌بندی شده کنکور سراسری و آزاد فصل چهارم.....                 |
| ۲۰۰ | فصل پنجم: تبدیل لاپلاس.....                                                   |
| ۲۰۰ | ۵-۱- مقدمه.....                                                               |
| ۲۰۰ | ۵-۲- تعریف تبدیل لاپلاس.....                                                  |
| ۲۰۷ | ۵-۳- خواص تبدیل لاپلاس.....                                                   |
| ۲۰۷ | ۵-۳-۱- قضیه اول انتقال.....                                                   |
| ۲۰۸ | ۵-۳-۲- قضیه دوم انتقال.....                                                   |
| ۲۰۸ | ۵-۳-۳- تبدیل لاپلاس حاصلضرب تابع $f(t)$ در $t^n$ .....                        |
| ۲۱۱ | ۵-۳-۴- خاصیت تغییر مقیاس.....                                                 |
| ۲۱۱ | ۵-۳-۵- تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع.....                                       |
| ۲۱۴ | ۵-۳-۶- تبدیل لاپلاس انتگرال یک تابع.....                                      |
| ۲۱۶ | ۵-۳-۷- قضیه مقدار اولیه تابع.....                                             |
| ۲۱۷ | ۵-۳-۸- قضیه مقدار نهایی تابع.....                                             |
| ۲۱۸ | ۵-۳-۹- تبدیل لاپلاس نسبت تابع $f(t)$ به $t+a$ .....                           |
| ۲۲۰ | ۵-۴- قضیه پیچش (کانولوشن).....                                                |
| ۲۲۵ | ۵-۵- تابع پله‌ای واحد.....                                                    |
| ۲۲۸ | ۵-۶- تبدیل لاپلاس یک تابع متناوب.....                                         |
| ۲۳۱ | ۵-۷- تابع دلتای دیراک.....                                                    |
| ۲۳۳ | ۵-۷-۱- خواص تابع دلتای دیراک.....                                             |
| ۲۳۶ | تست‌های طبقه‌بندی شده کنکور سراسری و آزاد فصل پنجم.....                       |
| ۲۴۱ | پاسخ تست‌های طبقه‌بندی شده کنکور سراسری و آزاد فصل پنجم.....                  |
| ۲۴۸ | فصل ششم: دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول.....                          |
| ۲۴۸ | ۶-۱- مقدمه.....                                                               |
| ۲۴۹ | ۶-۲- روشهای حل.....                                                           |
| ۲۴۹ | ۶-۲-۱- روش حذفی.....                                                          |
| ۲۵۰ | ۶-۲-۲- تبدیل لاپلاس.....                                                      |
| ۲۵۲ | ۶-۲-۳- روش اویلر برای حل دستگاه معادلات مرتبه اول خطی همگن با ضرایب ثابت..... |
| ۲۵۹ | ۶-۲-۴- روش عملگرها.....                                                       |
| ۲۶۰ | ۶-۳- دستگاه معادلات ناهمگن.....                                               |
| ۲۶۱ | تست‌های طبقه‌بندی شده کنکور سراسری و آزاد فصل ششم.....                        |
| ۲۶۳ | پاسخ تست‌های طبقه‌بندی شده کنکور سراسری و آزاد فصل ششم.....                   |