



ریاضی عمومی (۲)

(رشته ریاضی)

دکتر شهریار فرهمندراد

سرشناسه	:	فرهمناد، شهریار، ۱۳۳۷ -
عنوان و نام پدید آور	:	ریاضی عمومی (۲) (رشته ریاضی)/ شهریار فرهمنادراد.
مشخصات نشر	:	تهران: دانشگاه پیام نور، ۱۳۹۷.
مشخصات ظاهری	:	۷۰۱ ص.
فروست	:	دانشگاه پیام نور؛ ۲۵۰۵. گروه ریاضی؛ ۱/۱۴۹
شابک	:	978 - 964 - 14 - 0552 - 8
وضعیت فهرست نویسی	:	فیبا
یادداشت	:	کتابنامه.
موضوع	:	ریاضیات -- آموزش برنامه‌ای
موضوع	:	Mathematics -- Programmed instruction
موضوع	:	ریاضیات -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	:	Mathematics -- Study and teaching (Higher)
موضوع	:	ریاضیات -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
موضوع	:	Mathematics -- Examinations, questions, etc. (Higher)
شناسه افزوده	:	دانشگاه پیام نور
شناسه افزوده	:	Payam Noor University
رده بندی کنگره	:	۱۳۹۷/۴۹۰۳۷/۴۸۲
رده بندی دیویی	:	۵۱۰/۷
شماره کتابشناسی ملی	:	۵۴۳۳۸۵۰



دانشگاه پیام نور

ریاضی عمومی (۲)

مؤلف: دکتر شهریار فرهمنادراد

ویراستار علمی: دکتر پرستو ریحانی اردبیلی

تهیه و تولید: دفتر تدوین و تولید کتب و محتوای آموزشی

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مرکز چاپ و توزیع دانشگاه پیام نور

شابک: ۸ - ۵۵۲ - ۱۴ - ۹۶۴ - ۹۷۸

ISBN: 978 - 964 - 14 - 0552 - 8

فروش این کتاب فقط از طریق نمایندگی‌های دانشگاه پیام نور مجاز می باشد و فروش

آن در سایر مراکز فروش کتاب موجب تعقیب قانونی فروشنده خواهد گردید.

(کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر محفوظ و متعلق به دانشگاه پیام نور است. تولید، کپی یا خلاصه برداری، نشر و ترجمه، چاپ، افست، توزیع گسترده، تهیه CD و ... این اثر یا بخشی از آن اعم از متن، طرح، پست و روی جلد و ... بدون اخذ مجوز کتبی از معاونت فناوری و پژوهش دانشگاه خلاف مقررات و تعرض به حقوق مادی و معنوی دانشگاه است. متخلفین وفق قانون حمایت از مولفان و مصنفان و هنرمندان دارای مسئولیت حقوقی و کیفری بوده و تحت پیگرد قرار می گیرند.)

آدرس فروشگاه مرکزی چاپ و انتشارات دانشگاه پیام نور: تهران، خیابان شهید رجایی،

نرسیده به تقاطع آزادگان، جنب ورزشگاه یادآوران. تلفن: ۵۵۵۰۲۱۰۴ - ۵۵۵۰۹۸۳۸

سایت فروش اینترنتی: <http://digibook.pnu.ac.ir>

فهرست مطالب کتاب

سیزده

پیشگفتار

فصل اول: دنباله‌ها

هدف کلی

هدف‌های یادگیری

مقدمه

۱-۱ روش‌های نمایش نموداری دنباله‌ها

۲-۱ دنباله‌های همگرا

۳-۱ اعمال روی دنباله‌ها

۴-۱ میزان‌های رشد نسبی

۵-۱ دنباله‌های کراندار

۶-۱ دنباله‌های یکنوا

۷-۱ روش‌های تشخیص یکنوایی

۸-۱ زیردنباله‌ها

خلاصه مطالب مهم

فصل دوم: سری‌ها

هدف کلی

هدف‌های یادگیری

۱-۲ سری‌ها

۲-۲ بررسی سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} nqn$

۳-۲ یادآوری برخی از خواص سیگما

۴-۲ آزمون‌های همگرایی برای سری‌های مثبت

۵-۲ آزمون انتگرال

۶-۲ آزمون‌های مقایسه

۹۵	۷-۲ سری‌های متناوب
۹۵	۸-۲ آزمون سری متناوب
۱۰۲	۹-۲ همگرایی مطلق و همگرایی مشروط
۱۰۳	۱۰-۲ تعریف همگرایی مطلق
۱۰۳	۱۱-۲ تعریف همگرایی مشروط
۱۱۰	۱۲-۲ آزمون نسبت
۱۱۴	۱۳-۲ آزمون ریشه
۱۱۶	۱۴-۲ تجدید آرایش‌های یک سری
۱۱۸	۱۵-۲ استراتژی آزمون سری‌ها
۱۲۱	خلاصه مطالب مهم
۱۲۵	فصل سوم: سری‌های تابعی و توانی
۱۲۵	هدف کلی
۱۲۵	هدف‌های یادگیری
۱۲۶	۱-۳ سری‌های تابعی و توانی
۱۲۶	۲-۳ تعریف سری توانی
۱۳۲	۳-۳ اعمال بر سری‌های توانی
۱۳۴	۴-۳ تقسیم سری‌های توانی
۱۳۸	۵-۳ مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری‌های توانی
۱۴۶	۶-۳ چندجمله‌ای تیلور
۱۴۹	۷-۳ سری مک‌لورن
۱۵۰	۸-۳ سری تیلور f در $x = a$
۱۵۱	۹-۳ سری‌های دو جمله‌ای
۱۷۳	۱۰-۳ صورت‌های مبهم
۱۷۶	خلاصه مطالب مهم
۱۷۷	فصل چهارم: خم‌های پارامتری واقع در صفحه
۱۷۷	هدف کلی
۱۷۷	هدف‌های یادگیری
۱۷۸	۱-۴ خم‌های پارامتری واقع در صفحه
۱۷۸	۲-۴ تعریف خم‌های پارامتری
۱۸۱	۳-۴ رسم خم‌های پارامتری $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$
۱۸۱	۴-۴ بررسی تقارن‌های خم‌های پارامتری
۱۸۶	۵-۴ معادله خط مماس بر خم‌های پارامتری
۱۸۷	۶-۴ تحدب و تقعر و نقطه عطف
۱۸۹	۷-۴ نقاط مکرر خم‌های پارامتری
۱۹۷	خلاصه مطالب مهم

۱۹۹	فصل پنجم: مختصات قطبی، مختصات استوانه‌ای و کروی
۱۹۹	هدف کلی
۱۹۹	هدف‌های یادگیری
۲۰۰	۱-۵ مختصات قطبی
۲۰۲	۲-۵ رابطه بین مختصات دکارتی و قطبی
۲۰۵	۳-۵ فاصله دو نقطه در مختصات قطبی
۲۰۶	۴-۵ زاویه بین شعاع قطبی OP و مماس PT بر یکی منحنی
۲۰۹	۵-۵ بررسی نقاط تقاطع دو منحنی قطبی
۲۱۰	۶-۵ زاویه بین دو منحنی
۲۱۵	۷-۵ نمایش یک منحنی در مختصات قطبی
۲۱۵	۸-۵ نقاط مکرر در منحنی‌های قطبی $\rho = f(\theta)$
۲۱۷	۹-۵ تقارن‌ها و فاصله تغییرات مفید برای رسم منحنی‌های قطبی
۲۱۸	۱۰-۵ رسم منحنی‌های قطبی
۲۲۴	۱۱-۵ مختصات استوانه‌ای
۲۲۸	۱۲-۵ مختصات کروی
۲۳۱	خلاصه مطالب مهم
۲۳۳	فصل ششم: رویه‌ها
۲۳۳	هدف کلی
۲۳۳	هدف‌های یادگیری
۲۴۰	۱-۶ روش پیدا کردن معادله رویه استوانه‌ای
۲۴۲	۲-۶ بررسی نمودار سطوح درجه دوم
۲۴۳	۳-۶ استوانه سهمی‌وار
۲۴۳	۴-۶ استوانه بیضوی
۲۴۴	۵-۶ استوانه هذلولوی
۲۴۴	۶-۶ بیضی‌وار
۲۴۵	۷-۶ هذلولی‌وار بیضوی یک‌پارچه
۲۴۶	۸-۶ هذلولی‌وار بیضوی دو پارچه
۲۴۷	۹-۶ سهمی‌وار بیضوی
۲۴۸	۱۰-۶ سهمی‌وار هذلولوی
۲۴۹	۱۱-۶ مخروط بیضوی
۲۶۰	خلاصه مطالب مهم
۲۶۳	فصل هفتم: توابع برداری
۲۶۳	هدف کلی
۲۶۳	هدف‌های یادگیری
۲۶۴	۱-۷ توابع برداری
۲۶۶	۲-۷ پیوستگی

۲۶۸	۳-۷ مشتق توابع برداری
۲۷۲	۴-۷ یادآوری
۲۷۲	۵-۷ مشتق حاصل ضرب سه گانه اسکالر
۲۷۳	۶-۷ مشتق بردارهای به طول ثابت
۲۷۵	۷-۷ انتگرال تابع برداری
۲۷۹	۸-۷ خم ها و پارامتری سازی
۲۸۲	۹-۷ خم بسته
۲۸۲	۱۰-۷ خم غیر خود متقاطع
۲۸۳	۱۱-۷ پارامتری سازی خم فصل مشترک دو رویه
۲۸۴	۱۲-۷ خم های قطعه به قطعه هموار
۲۸۴	۱۳-۷ پارامتری سازی برحسب طول کمان
۲۸۶	۱۴-۷ انحناء
۲۸۹	۱۵-۷ نرمال بیکه
۲۹۴	۱۶-۷ شتاب حرکت
۲۹۷	۱۷-۷ دایره انحناء و شعاع انحناء
۳۰۰	۱۸-۷ بردار قائم دوم
۳۰۴	۱۹-۷ مؤلفه های مماسی و قائم شتاب
۳۰۷	۲۰-۷ تاب
۳۰۸	۲۱-۷ تاب خم های پارامتری
۳۱۴	۲۲-۷ صفحه بوسان، صفحه نرمال و صفحه اصلاحی
۳۲۲	خلاصه مطالب مهم
۳۲۵	فصل هشتم: توابع چندمتغیره، مشتق گیری جزئی
۳۲۵	هدف های کلی
۳۲۵	هدف های یادگیری
۳۲۸	۱-۸ توابع چند متغیره
۳۲۸	۲-۸ دامنه تابع دو متغیره
۳۳۱	۳-۸ توابع سه متغیره
۳۳۳	۴-۸ نمودار توابع دو متغیره
۳۳۷	۵-۸ حد و پیوستگی
۳۴۲	۶-۸ تعریف های هم ارز در توابع دو متغیره
۳۵۱	۷-۸ بررسی حد توابع کسری که صورت و مخرج چند جمله ای اند و $(x, y) \rightarrow (0, 0)$
۳۵۲	۸-۸ دستور هوییتال
۳۵۳	۹-۸ تعویض متغیر کلی
۳۵۵	۱۰-۸ تغییر متغیر قطبی
۳۵۹	۱۱-۸ پیوستگی
۳۶۶	۱۲-۸ مشتقات جزئی

۳۶۷	۸-۱۳ نمادگذاری
۳۷۰	۸-۱۴ تعبیر هندسی مشتقات جزئی
۳۷۴	۸-۱۵ تعریف صفحه مماس بر سطح S
۳۷۵	۸-۱۶ معادله صفحه مماس و خط قائم بر سطح S
۳۷۹	۸-۱۷ مشتق جزئی توابع با بیش از دو متغیر
۳۸۰	۸-۱۸ مشتقات جزئی مراتب بالاتر
۳۸۱	۸-۱۹ قضیه کلرو
۳۸۶	۸-۲۰ توابع مشتق‌پذیر و دیفرانسیل‌ها
۳۹۵	۸-۲۱ قاعده زنجیری (مشتق تابع مرکب)
۴۰۴	۸-۲۲ مشتق‌گیری ضمنی
۴۰۵	۸-۲۳ قضیه تابع ضمنی
۴۰۸	۸-۲۴ مشتق جهتی یا سویی و گرادیان
۴۱۰	۸-۲۵ تعریف مشتق جهتی یا سویی
۴۲۱	۸-۲۶ اکستریم‌های توابع دو متغیره
۴۲۳	۸-۲۷ تعریف نقطه بحرانی
۴۲۴	۸-۲۸ آزمون مشتق دوم
۴۳۱	۸-۲۹ مقادیر اکستریم توابع دو متغیره بر دامنه کراندار
۴۳۴	۸-۳۰ برهان آزمون مشتق دوم
۴۳۷	۸-۳۱ ضرایب لاگرانژ
۴۳۸	۸-۳۲ روش ضرایب‌های لاگرانژ
۴۴۷	۸-۳۳ روش ضرایب‌های لاگرانژ در حالت دو قیدی
۴۵۴	خلاصه مطالب مهم
۴۵۹	فصل نهم: انتگرال‌های چندگانه
۴۵۹	هدف کلی
۴۵۹	هدف‌های یادگیری
۴۶۰	۹-۱ انتگرال‌های دوگانه روی مستطیل‌ها
۴۶۲	۹-۲ تعریف انتگرال دوگانه روی مستطیل
۴۶۵	۹-۳ تعبیر هندسی انتگرال‌های دوگانه
۴۶۹	۹-۴ انتگرال‌های مکرر
۴۷۱	۹-۵ قضیه فوبینی
۴۷۶	۹-۶ انتگرال دوگانه روی نواحی کلی‌تر
۴۸۱	۹-۷ تعیین حدود انتگرال‌گیری
۴۹۲	۹-۸ مساحت
۴۹۴	۹-۹ انتگرال دوگانه در مختصات قطبی
۵۰۱	۹-۱۰ محاسبه مساحت در انتگرال‌های دوگانه قطبی
۵۰۳	۹-۱۱ تعویض متغیر در انتگرال دوگانه

۵۱۵	۹-۱۲ مساحت ناحیه‌ای قطبی
۵۲۰	۹-۱۳ مساحت رویه‌ها
۵۲۵	۹-۱۴ جرم یک ورق نازک
۵۲۶	۹-۱۵ مرکز جرم یک ورق نازک
۵۲۸	۹-۱۶ گشتاور مانند
۵۳۱	۹-۱۷ انتگرال سه‌گانه
۵۳۴	۹-۱۸ انواع نواحی در انتگرال‌های سه‌گانه
۵۴۷	۹-۱۹ تعویض متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه
۵۵۹	۹-۲۰ سایر کاربردهای انتگرال سه‌گانه
۵۶۶	خلاصه مطالب مهم
۵۷۱	فصل دهم: میدان‌های برداری
۵۷۱	هدف کلی
۵۷۱	هدف‌های یادگیری
۵۷۳	۱۰-۱ میدان‌های برداری
۵۷۶	۱۰-۲ خط‌های میدان (خم‌های انتگرال)
۵۷۹	۱۰-۳ میدان‌های برداری در مختصات قطبی
۵۸۱	۱۰-۴ انتگرال روی اشیای خمیده
۵۸۷	۱۰-۵ خواص انتگرال خط
۵۸۹	۱۰-۶ انتگرال‌های خط نسبت به x یا y
۵۹۳	۱۰-۷ انتگرال خط در فضا (روی اشیای خمیده)
۵۹۶	۱۰-۸ انتگرال‌های خط میدان‌های برداری
۶۰۲	۱۰-۹ قضیه اساسی انتگرال‌های خط
۶۰۴	۱۰-۱۰ استقلال از مسیر
۶۰۴	۱۰-۱۱ تعریف مستقل بودن از مسیر
۶۲۴	۱۰-۱۲ قضیه گرین
۶۲۴	۱۰-۱۳ نمادگذاری
۶۳۴	۱۰-۱۴ کرل و دیورجانس (چرخه و واگرایی)
۶۳۴	۱۰-۱۵ کرل (چرخه)
۶۳۶	۱۰-۱۶ تعریف دیورجانس یا واگرایی
۶۳۸	۱۰-۱۷ لاپلاسین
۶۳۸	۱۰-۱۸ شکل‌های برداری قضیه گرین
۶۴۵	۱۰-۱۹ سطوح پارامتری و مساحت آن‌ها
۶۴۸	۱۰-۲۰ مساحت سطوح
۶۵۶	۱۰-۲۱ انتگرال‌های سطح
۶۶۰	۱۰-۲۲ انتگرال سطح در سطوح پارامتری
۶۶۳	۱۰-۲۳ سطوح جهت‌دار

۶۶۶

۶۶۸

۶۶۹

۶۷۴

۶۸۶

۶۸۷

۶۹۶

۷۰۱

۲۴-۱۰ انتگرال سطح میدان برداری

۲۵-۱۰ یادآوری

۲۶-۱۰ روش محاسبه شار

۲۷-۱۰ قضیه استوکس

۲۸-۱۰ قضیه دیورجانس (واگرایی)

۲۹-۱۰ قضیه دیورجانس یا واگرایی

خلاصه مطالب مهم

مراجع

www.ketab.ir

پیشگفتار

خدا را شکر می‌گویم که توفیق تدوین کتاب ریاضی عمومی ۲ دوره کارشناسی را در ادامه کتاب ریاضی عمومی ۱ نصیب ساخت.

برای حفظ تسلسل مطالب و جلوگیری از تشتت آن‌ها، منابع و مراجع مورد استفاده همان کتاب ریاضی عمومی ۱ دانشگاه پیام نور است که در انتهای کتاب مذکور آمده‌اند. سه فصل اول به دنباله‌ها و سری‌های تابعی اختصاص یافته است. سپس به خم‌های پارامتری در صفحه و انواع مختصات و رویه‌ها پرداخته شده است. در فصول بعدی مطالب مربوط به توابع برداری، توابع چندمتغیره و مشتق‌گیری جزئی، انتگرال‌های چندگانه و میدان‌های برداری و حساب برداری آورده شده‌اند.

کتاب سرشتی ویژه داشته و به نحوی تألیف گردیده که بتواند در رشته‌های ریاضی و کاربردها، فیزیک و رشته‌های فنی به‌طور مشترک (در یک کلاس) ارائه شود. این امر قطعاً موجب آشنایی بیشتر دانشجویان با جریانات علمی نزدیک و صرفه‌جویی در زمان و امکانات دانشگاه خواهد شد.

برخلاف عادت و سلیقه‌ای که بعضی در تألیف و تدریس تعدادی از سرفصل‌های ارائه شده این نوشتار در ریاضی عمومی ۱ دارند نگارنده با تجربه حدود شصت بار تدریس درس ریاضی عمومی ۱ و ۲ در دانشگاه‌های مختلف اعتقاد راسخ دارد به دلیل حجم بالای مطالب دروس ریاضی دبیرستان که در ریاضی عمومی ۱ تکرار می‌شوند شوق و علاقه لازم برای مطالعه و یادگیری درس ذکر شده در خواننده دوره کارشناسی در همان بدو ورود به دانشگاه از بین می‌رود.

مثلاً فصلی مانند دنباله‌ها و سری‌ها که در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال رابرت آدامز در فصل نهم (آخر) جلد اول گنجانده گردیده در این کتاب در فصل اول ارائه شده و انتخاب جای آن تا حدی دلخواه است و یا چون به هر حال موضوع مختصات و منحنی‌های قطبی به منحنی‌های پارامتری مربوط می‌شود در مباحث تألیفی کتاب حاضر آمده است. براساس تجربه طولانی مؤلف و به‌طور کلی سعی شده است سرفصل‌های تکراری دبیرستان تا حد امکان با ظرافت، دیدی نو و حل مثال‌های متنوع و جدید طوری در کتاب‌های تألیف شده ریاضی عمومی ۲ (و ریاضی عمومی ۱) پراکنده و تقسیم شوند که حوصله خواننده علاقه‌مند از مطالعه آن‌ها سر نرفته و مطمئناً در کنار آن لطمه‌ای به تسلسل، و ساختار زنجیر مطالب وارد نشود.

حدود دویست صفحه از مطالب تألیف شده ابتدای کتاب که مربوط به هندسه تحلیلی و مقدمات جبر خطی و سرشار از مثال‌ها، مطالب و تمرین‌های جالب بود برخلاف اصرار مؤلف به عدم حذف آن، کنار گذاشته شد. بنابراین فصل جداگانه‌ای برای بردارها و هندسه تحلیلی وجود ندارد. البته در ریاضی ۲ ارائه زمینه لازم درباره بردارها و هندسه در فضای سه‌بعدی و جبر خطی اساسی نیست، خواننده می‌تواند در درس‌های پیشرفته‌تر همراه با یادآوری مطالب مقدماتی دبیرستان دیدگاه‌های لازم را به‌دست آورد. حذف عنوان درسی ریاضی عمومی ۳ از دوره کارشناسی ریاضی از سوی شورای عالی برنامه‌ریزی و سرریز مطالب آن به ریاضی ۲ خواه‌ناخواه حجم کتاب ریاضی ۲ را دستخوش تغییرات فراوان می‌کند. درواقع به نظر مؤلف تدریس و رفع اشکال درس حساب دیفرانسیل و انتگرال بعد از حذف ریاضی عمومی ۳ چه در ریاضی عمومی ۱ چه در ریاضی عمومی ۲ به دلیل حجم خیلی بالا نیاز قطعی به وسایل چندرسانه‌ای آموزشی، نوار صوتی و فیلم آموزش درس، پاورپوینت و ساعات بیشتر تدریس و رفع اشکال گروهی دارد. درواقع یک درس کامل دیفرانسیل و انتگرال متغیرهای حقیقی در دانشگاه‌های بزرگ و معتبر دنیا در یک برنامه سه یا چهار نیم‌سالی گنجانده می‌شود.

کلاس حل تمرین برای آموزش هرچه بهتر مطالب کتاب بسیار ضروری است و بهتر است از دانشجویان نخبه و علاقه‌مند در این خصوص استفاده شود.

کوشش شده است مطالب کتاب‌های ریاضی عمومی قبلی دانشگاه پیام‌نور با توجه به منابع تدریس فعلی در دانشگاه‌های شاخص و مطرح دنیا به روز شده، انتخاب گسترده مباحث و کاربردها تجربه آموزشی غنی و متنوعی را برای دانشجویان فراهم آورد. به علاوه خواننده علاقه‌مند پس از مطالعه آن بتواند در آزمون‌های جدی‌تری مانند آزمون‌های ورودی دوره کارشناسی ارشد رشته‌های ریاضی و فنی موفق و سربلند باشد. از خوانندگان محترم انتظار دارد لغزش‌های این نوشته را به آدرس دانشگاهی مؤلف یعنی sh_fmmand@pnu.ac.ir ارسال نمایند تا در چاپ‌های بعدی تصحیح گردند.

دکتر شهریار فرهمند راد

شهریورماه ۱۳۹۷