

روش‌های اثبات

تألیف:

نیل ولمان

مترجمین:

امیر باقری (عضو هیات علمی دانشگاه تبریز)،

مریم چم‌چم

سرشناسه

عنوان و نام پدید آور

مشخصات نشر

مشخصات ظاهری

فروست

شابک

وضعیت فهرست نویسی

یادداشت

موضوع

موضوع

شناسه ورود

شناسه افزوده

شناسه افزود

شناسه افزوده

رده بندی کنگره

رده بندی دیویی

شماره کتابشناسی ملی



انتشارات دانشگاه تبریز

ولمان ، دانیل ج. Velleman, Daniel J.

روش های اثبات / تألیف دانیل ولمان؛ مترجمین امیر باقری، مریم چم چم

تبریز: دانشگاه تبریز، انتشارات، ۱۳۹۸.

۶۵۱ ص.: جدول، نمودار.

انتشارات دانشگاه تبریز؛ ۷۶۲.

۲- ۶۲- ۸۸۶۴- ۶۰۰- ۹۷۸:

فیبا

عنوان اصلی: How to prove it : a structured approach. 2nd ed.

کتابنامه

Mathematical Logic منطق ریاضی

Mathematics ریاضیات.

باقری، امیر، ۱۳۵۹، مترجم Bagheri Amir

چم چم، مریم، ۱۳۷۲، مترجم

دانشگاه تبریز، انتشارات

QA ۹۰

۵۱۱/۱

۳۶- ۵۷

روش های اثبات

تألیف:

ترجمه:

ناشر و فروست:

تاریخ و نوبت چاپ:

شمارگان:

شابک:

قیمت:

سایت:

لیتوگرافی، چاپ و صحافی:

اداره چاپ و انتشارات دانشگاه تبریز

این اثر مشمول قانون حمایت از مؤلفان و مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸ است. هر کس تمام یا قسمتی از این اثر را بدون اجازه ناشر، نشر یا پخش کند مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

نشانی: تبریز - بلوار ۲۹ بهمن - دانشگاه تبریز - تلفن: ۳۳۳۹۲۶۶۹ نمابر: ۳۳۳۴۲۵۶۲

فهرست مطالب

۵	فهرست مطالب
آ	پیش‌گفتار
ث	پیش‌گفتار ویرایش دوم
ج	پیش‌گفتار مترجمین
خ	مقدمه
۱	۱ منطق گزاره‌ای
۱	۱.۱ استدلال استنتاجی و رابط‌های منطقی
۱۰	۲.۱ جدول ارزش‌ها
۲۸	۳.۱ متغیرها و مجموعه‌ها
۴۲	۴.۱ اعمال روی مجموعه‌ها
۵۸	۵.۱ رابط‌های شرطی و دو شرطی
۷۷	۲ منطق تسویری
۷۷	۱.۲ سورها
۹۴	۲.۲ هم‌ارزی‌های دارای سور
۱۰۹	۳.۲ اعمال دیگر بر روی مجموعه‌ها
۱۲۹	۳ اثبات‌ها
۱۲۹	۱.۳ روش‌های اثبات
۱۴۶	۲.۳ اثبات‌های شامل نقیض و گزاره‌های شرطی
۱۶۴	۳.۳ اثبات‌های شامل سورها
۱۸۹	۴.۳ اثبات‌های شامل گزاره‌های عطفی و دوشروطی
۲۰۹	۵.۳ اثبات‌های شامل گزاره‌های فصلی

۲۲۶	اثبات وجود و منحصر به فردی	۶.۳
۲۴۰	مثال‌هایی بیشتر از اثبات‌ها	۷.۳

۲۵۳	روابط	۴
۲۵۳	زوج‌های مرتب و ضرب‌های دکارتی	۱.۴
۲۶۷	روابط	۲.۴
۲۸۲	مواردی بیشتر در مورد روابط	۳.۴
۲۹۶	روابط ترتیبی	۴.۴
۳۲۰	بستارها	۵.۴
۳۳۸	روابط هم‌ارزی	۶.۴

۳۵۹	توابع	۵
۳۵۹	توابع	۱.۵
۳۷۷	یک‌به‌یک و یک‌به‌چند	۲.۵
۳۹۲	وارون توابع	۳.۵
۴۰۷	تساویر و تساوی‌رارون: یک پروژه‌ی تحقیقی	۴.۵

۴۱۵	استقرای ریاضی	۶
۴۱۵	اثبات به روش استقرای ریاضی	۱.۶
۴۲۷	مثال‌های بیشتر	۲.۶
۴۴۶	بازگشت	۳.۶
۴۶۱	استقرای قوی	۴.۶
۴۷۹	دوباره بستارها	۵.۶

۴۸۹	مجموعه‌های نامتناهی	۷
۴۸۹	مجموعه‌های هم‌عدد	۱.۷
۵۰۵	مجموعه‌های شمارا و ناشمارا	۲.۷
۵۱۵	قضیه‌ی کانتور-شرودر-برنشتاین	۳.۷

۵۲۹	حل برخی تمرین‌های منتخب	آ
-----	-------------------------	---

۵۲۹	حل برخی تمرین‌های منتخب	
-----	-------------------------	--

۶۱۱	ب طراح اثبات	
-----	--------------	--

۶۱۱	طراح اثبات	
-----	------------	--

۶۱۵	پ خلاصه‌ی تکنیک‌های اثبات	
-----	---------------------------	--

۶۱۵ خلاصه‌ی تکنیک‌های اثبات

۶۲۳ پیشنهادهایی برای مطالعه‌ی بیشتر

www.ketab.ir

پیش‌گفتار

معمولاً زمانی که از دانشجویان ریاضی و علوم کامپیوتر به‌طور جدی خواسته می‌شود تا این که بر روی اثبات‌های ریاضی کار کنند دچار مشکل می‌شوند، چون «قاعده‌ی بازی» را نمی‌دانند. اگر در مورد اثبات مساله‌ای از شما سوال گردد از شما چه چیزی انتظار می‌رود؟ چه معیارهایی باید درست را از اثبات نادرست متمایز می‌کند؟ این کتاب برای کمک به پاسخگویی دانشجویان به این گونه سوالات با تبیین بنیادی ساختار اثبات‌ها طراحی گردیده است.

اغلب دانشجویان برای اولین بار در هفتم‌دهی دبیرستانی با اثبات‌های ریاضی برخورد می‌کنند. متأسفانه، معمولاً در هفتم‌دهی دبیرستان به دانش‌آموزان این گونه آموزش داده می‌شود که به اثبات به عنوان لیستی محدود از گزاره‌ها و حکام بنگرند. چنین دیدگاهی از اثبات، بیش از سودمند بودن بسیار محدود کننده می‌باشد. در اینجا شباهتی با علوم کامپیوتر وجود دارد که می‌تواند آموزنده باشد. زبان‌های برنامه‌نویسی پیشین، با دیدگاه محدود کننده‌ای مشابه، برنامه‌های کامپیوتری را به صورت لیستی محدود از دستورها ارائه می‌نمودند. امروزه دانشمندان علوم کامپیوتر از این گونه زبان‌ها کناره‌گیری کرده‌اند و برنامه‌نویسی را با استفاده از زبان‌هایی به شکل «برنامه‌نویسی ساختاری» آموزش می‌دهند. در این کتاب بحث در رابطه با اثبات‌ها از این باور بسیاری از دانشمندان علوم کامپیوتر به پذیرش روش ساختاری برنامه‌نویسی، برای نوشتن اثبات‌ها الهام گرفته شده است. می‌توان گفت که این کتاب اثبات ساختاری را آموزش می‌دهد.

در برنامه‌نویسی ساختاری، یک برنامه‌ی کامپیوتری توسط دستورهای پی‌درپی ساخته

نمی‌شود بلکه با ترکیب دستورات پایه‌ای معین مانند دستور if-else و حلقه‌ی do-while از زبان برنامه‌نویسی جاوا ساخته می‌شود. در این روش برنامه‌ها با قرار گرفتن در دل یکدیگر ترکیب می‌شوند نه با قرار گرفتن پشت سر هم. به عنوان نمونه، گنجانیدن دستور if-else در یک حلقه‌ی do-while به این شکل ظاهر می‌گردد:

do

if [شرط‌ها]

[دستورات در اینجا قرار می‌گیرند]

else

[دستورات جایگزین اینجا قرار می‌گیرند]

while [شرط‌ها]

نوشتن دستورات به صورت زیربخشی از سطرهای بالا در برنامه خیلی ضروری نیست، اما معمولاً روشی مناسب برای علم کامپیوتر جهت نمایش دستورات اساسی از یک برنامه می‌باشد.

اثبات‌های ریاضی نیز از ترکیب تعدادی ساختار اثبات اساسی ایجاد می‌شوند. برای مثال، اثبات گزاره‌ای به شکل «اگر P آنگاه Q » معمولاً بران ساختارهایی که «اگر-آنگاه» می‌نامیم به کار می‌رود: فرض می‌کنیم که P راست است تا بتوانیم به این نتیجه برسیم که Q راست است، و در مجموع می‌گوییم که گزاره‌ی «اگر P آنگاه Q » راست است. مثال دیگر، ساختار «اثبات به ازای هر x دلخواه» می‌باشد: برای اثبات ساختاری به شکل «به ازای هر x ، $P(x)$ را شیء دلخواهی در نظر می‌گیریم و سپس $P(x)$ را ثابت می‌کنیم. زمانیکه نتیجه گرفتیم $P(x)$ راست است، در مجموع می‌گوییم گزاره‌ی «به ازای هر x دلخواه $P(x)$ برقرار است» عبارتی صحیح است. علاوه بر این، برای اثبات گزاره‌های مرکب، از روش پشت سر هم آوردن آن‌ها و همچنین جایگذاری یکی از ساختارها در درون دیگری استفاده می‌کنیم. به عنوان نمونه، برای اثبات گزاره‌ای به شکل «به ازای هر x ، اگر $P(x)$ آنگاه $Q(x)$ » احتمالاً باید ساختار اگر-آنگاهی را در ساختار «اثبات به ازای هر

x دلخواه» قرار دهیم که در این صورت اثباتی به صورت زیر به دست می آید:

فرض کنیم x دلخواه باشد.

فرض کنیم $P(x)$ راست باشد.

[اثبات $Q(x)$ در این محل نوشته شود.]

بنابراین، اگر $P(x)$ ، آنگاه $Q(x)$.

پس به ازای هر x ، اگر $P(x)$ ، آنگاه $Q(x)$.

همچنین، برای روشن کردن ساختار اساسی اثبات از شکل تودرتو استفاده کردیم. البته ریاضیدانان معمولاً از شکل تودرتو در اثبات‌های خود استفاده نمی‌کنند. هدف ما در این کتاب این است که نوشتن اثبات‌ها را در پاراگراف‌های معمولی همان‌گونه که ریاضیدانان می‌نویسند به دانشجویان آموزش دهیم نه نگارش تودرتوی اثبات‌ها را. با این وجود، روش ما بر این باور است که لازم می‌آید که دانشجویان در نوشتن چنین اثبات‌هایی دانستن ساختار اساسی است که آن اثبات‌ها دارند. برای مثال آنان باید یاد بگیرند که جملاتی مانند «فرض کنیم x دلخواه باشد» و «فرض کنید P » گام‌های مجزایی از اثبات نیستند بلکه برای معرفی ساختار اساسی اثبات «اثبات برای هر x دلخواه» و «اگر – آنگاه» استفاده می‌شوند. استفاده نامناسب دانشجویان مبتدی از این جملات خیلی هم غیرعادی نیست. چنین اشتباهاتی مانند اشتباهات ناشی از خطای برنامه‌نویسی استفاده از `do` بدون وصل کردن به `while` می‌باشد.

دقت کنید که در مثال‌های ارائه شده، انتخاب ساختار اثبات از روی شکل‌های منطقی گزاره‌هایی که باید اثبات شوند، به دست می‌آید. به این دلیل، کتاب با منطق مقدماتی شروع می‌گردد تا دانشجویان را با شکل‌های مختلفی که گزاره‌های ریاضی دارند آشنا سازد. فصل اول در مورد رابط‌های منطقی بحث می‌نماید و در فصل دوم سورها معرفی می‌شوند. این فصل‌ها همچنین مقدمات نظریه‌ی مجموعه‌ها را ارائه می‌کنند، چون این مفهوم در ادامه‌ی کتاب (و البته در همه‌ی ریاضیات) مورد استفاده قرار می‌گیرد و نیز برای نشان دادن بسیاری از نکات منطقی بحث شده در این فصل‌ها به کار می‌رود.

فصل سوم روش‌های اثبات ساختاری را به‌طور سیستماتیک پوشش می‌دهد و حول شکل‌های مختلف گزاره‌های ریاضی و همچنین در مورد ساختارهای اثباتی که برای هر نوع از گزاره‌ها مناسب است، بحث می‌کند. مثال‌های انتخاب شده برای اغلب بخش‌های این فصل نه به خاطر محتوای ریاضیاتی آن‌ها، بلکه به منظور تبیین ساختار اثباتی آن‌ها می‌باشد. این موضوع بیشتر در ابتدای فصل که تعداد کمی از روش‌های اثبات بحث شده است، صحت دارد و لذا بسیاری از اثبات‌های این بخش از فصل تا حدودی بدیهی هستند. در ادامه‌ی فصل اثبات‌ها از لحاظ ریاضیاتی بسیار جالب‌تر و جذاب‌تر می‌گردند.

فصل‌های چهارم و پنجم در خصوص روابط و توابع، دو هدف را دنبال می‌کنند. ابتدا، موضوعی را که دانشجویان می‌توانند روش‌های نوشتن اثبات از فصل سه را روی آن‌ها تمرین کنند، آماده می‌کند و سپس برخی از مفاهیم اساسی مورد استفاده‌ی تمام شاخه‌های ریاضی را برای دانش‌ویان معرفی می‌نماید.

فصل ششم به روشی از اثبات که هم از لحاظ ریاضیاتی و هم از لحاظ علم کامپیوتر حائز اهمیت است اختصاص داده شده است. استقرار ریاضی. معرفی این بخش بر اساس روش‌های ارائه شده در فصل سوم بنا شده است که دانشجویان بایستی در این زمینه مهارت‌هایی را کسب نمایند.

سرانجام در فصل هفتم نظریاتی از سراسر کتاب بر روی اثبات برخی از مشکل‌ترین و جالب‌ترین قضایای کتاب آورده شده است.

از تمام کسانی که نسخه‌های اولیه را خواندند و برای بهبود آن راهکارهای مفیدی را ارائه کردند، قدردانی می‌نمایم. بخصوص لورن کولس^۱ از انتشارات دانشگاه کمبریج، همکارم پروفیسور دوان بابلی^۲ و کلاس ریاضیات گسسته‌اش که در نسخه‌های اولیه‌ی برخی فصل‌ها خیلی تلاش کردند و در آخر همسر من شلی^۳، که بدون تشویق مداوم او، این کتاب هرگز نوشته نمی‌شد.

^۱Lauren Cowles

^۲Duane Bailey

^۳Shelley