

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فنای برداری خطی

کاربردهای هندماتی آن

دکتر مرتضی اسکندری قادی

استاد دانشگاه تهران

اسکندری قادی، مرتضی، ۱۳۴۴ -	سرشناسه
فضای برداری خطی و کاربردهای مقدماتی آن / مرتضی اسکندری قادی.	عنوان و نام پدیدآور
تهران: سازمان جهاد دانشگاهی تهران، انتشارات، ۱۳۹۶.	مشخصات نشر
و، ۲۶۹ ص: جدول، نمودار.	مشخصات ظاهری
۹۷۸-۶۰-۱۳۳-۲۹۱-۳	شابک
فیفا	وضعیت فهرست نویسی
واژه‌نامه.	یادداشت
کتابنامه: ص. ۴۲۵.	یادداشت
فضاهای برداری	موضوع
Vector spaces	موضوع
بردارها	موضوع
Vector analysis	موضوع
فضاهای برداری -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)	موضوع
Vector spaces -- Problems, exercises, etc	موضوع
بردارها -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)	موضوع
Vector analysis -- Problems, exercises, etc. (High	موضوع
سازمان جهاد دانشگاهی تهران. انتشارات	شناسه افزوده
QA ۱۸۶/۵۲ ۱۳۹۶	رده بندی کنگره
۵۱۱/۵۲	رده بندی دیویی
۴۹۰۱۸۱۱	شماره کتابشناسی ملی



فضای برداری خطی و کاربردهای مقدماتی آن

مولف: مرتضی اسکندری قادی

ناشر: انتشارات سازمان جهاد دانشگاهی تهران

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: شریف

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه قیمت: ۱۷۰۰۰ تومان نوبت چاپ: اول - پاییز ۱۳۹۶

ISBN: 978-600-133-291-3

شابک: ۹۷۸-۶۰-۱۳۳-۲۹۱-۳

<http://jahat.ir>

نشانی: تهران - صندوق پستی ۱۸۶-۱۳۱۴۵

en.jahat@gmail.com

تلفن: ۶۶۹۵۵۷۵۳ - تلفکس: ۶۶۹۵۴۳۶۸

خانه کتاب دانشگاه: ۶۶۹۷۳۴۲۳

تلفن مراکز پخش: ۶۶۴۹۰۷۴۰ - ۶۶۴۹۰۷۴۲

این اثر، مشمول قانون حمایت مولفان، مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸ است. هرکس تمام یا قسمتی از این

اثر را بدون اجازه مولف یا ناشر تکثیر و کپی برداری نماید مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

فصل اول فضای برداری خطی

- ۱-۱ مقدمه ۱
- ۲-۱ اصول موضوعه فضای برداری خطی ۲
- ۳-۱ مثال‌هایی از فضاهاى برداری خطی ۴
- ۴-۱ چند نتیجه اولیه از اصول موضوعه فضای برداری خطی ۱۴
- ۵-۱ تمرین‌های فضای برداری خطی ۱۷
- ۶-۱ فضای برداری خطی از توابع ۲۰
- ۶-۱-۱ مثال برای فضای برداری خطی از توابع ۲۱
- ۷-۱ تمرین‌های فضای برداری خطی از توابع ۲۴
- ۸-۱ زیرفضای یک فضای برداری خطی ۲۵
- ۸-۱-۱ مثال برای زیرفضای یک فضای برداری خطی ۲۷
- ۹-۱ ترکیب خطی، وابستگی خطی و اساس خطی ۳۲
- ۱۰-۱ چند مثال ۳۴
- ۱۱-۱ پایه و بُعد ۴۰
- ۱۲-۱ چند مثال از پایه و بُعد ۴۱
- ۱۳-۱ تمرین‌های زیر فضا، ترکیب خطی، استقلال خطی، پایه و بُعد ۴۷
- ۱۴-۱ ضرب داخلی، فضای اقلیدسی و نرم ۴۹
- ۱۴-۱-۱ چند مثال از ضرب داخلی ۵۰
- ۱۴-۱-۲ نامساوی کوشی - شوارتز ۵۳
- ۱۴-۱-۳ طول یا نرم یک بردار ۵۴
- ۱۴-۱-۴ زاویه بین دو بردار در یک فضای اقلیدسی ۵۷
- ۱۴-۱-۵ ضرب داخلی وزن‌دار در فضای برداری توابع ۵۹
- ۱۴-۱-۶ مثال‌هایی از نرم و نامساوی کوشی - شوارتز ۶۰
- ۱۴-۱-۷ تمرینات ضرب داخلی، فضای اقلیدسی و نرم ۶۳
- ۱۵-۱ تعامد در فضای اقلیدسی ۶۴
- ۱۵-۱-۱ چند مثال برای تعامد در فضای اقلیدسی ۶۸
- ۱۵-۱-۲ تمرین برای تعامد در فضای اقلیدسی ۷۴

ب □ فضای برداری خطی، کاربردهای مقدماتی آن

- ۷۷ ۱۶-۱ تولید مجموعه‌های متعامد
۸۰ ۱-۱۶-۱ مثال‌هایی از روش گرام - اشمیت
۸۴ ۱-۱۶-۱ تمرین برای روش گرام - اشمیت
۸۵ ۱۷-۱ مکمل عمودی، تجزیه متعامد و بهترین تقریب
۸۵ ۱-۱۷-۱ مکمل عمودی
۸۶ ۲-۱۷-۱ چند مثال از مکمل عمودی
۸۸ ۳-۱۷-۱ تجزیه متعامد یک فضای اقلیدسی
۹۲ ۴-۱۷-۱ بهترین تقریب
۹۴ ۵-۱۷-۱ مثال: بی از بهترین تقریب برای یک بردار (تابع)
۱۰۴ ۶-۱۷-۱ تمرین‌های مکمل عمودی، تجزیه متعامد و بهترین تقریب
۱۰۵ ۱۸-۱ تمرین‌های دره‌ای

فصل دوم تبدیلات خطی

- ۱۲۱ ۱-۲ مقدمه
۱۲۲ ۲-۲ تبدیل خطی
۱۲۲ ۱-۲-۲ مثال‌هایی از تبدیلات خطی
۱۲۶ ۲-۲-۲ فضای پوچ و فضای تصویر یک تبدیل خطی
۱۲۷ ۳-۲-۲ پوچی و رتبه یک تبدیل خطی
۱۳۰ ۴-۲-۲ مثال‌هایی از فضای پوچ و فضای تصویر
۱۳۸ ۵-۲-۲ تمرین‌های تبدیلات خطی
۱۴۱ ۳-۲ ماتریس یک تبدیل خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$
۱۴۴ ۱-۳-۲ مثال برای ماتریس تبدیلات خطی
۱۴۸ ۲-۳-۲ تمرین‌های ماتریس تبدیل
۱۴۹ ۴-۲ ترانزاده یک ماتریس
۱۵۰ ۵-۲ معکوس یک ماتریس مربعی
۱۵۰ ۶-۲ دترمینان
۱۵۲ ۱-۶-۲ خواص دترمینان
۱۵۳ ۷-۲ چند مثال
۱۶۰ ۸-۲ تمرین برای ترانزاده، معکوس و دترمینان یک ماتریس

فهرست مطالب □ ج

۱۶۱	۹-۲ بردارها و مقادیر ویژه
۱۶۴	۱-۹-۲ قطری سازی ماتریس ها
۱۶۶	۲-۹-۲ اثر یک ماتریس
۱۶۷	۳-۹-۲ مثال هایی برای بردارها و مقادیر ویژه
۱۷۷	۴-۹-۲ تمرین برای بردارها و مقادیر ویژه
۱۷۹	۱۰-۲ ماتریس های متقارن و ماتریس های متعامد
۱۸۵	۱۰-۲-۱ مثال برای ماتریس های متقارن و متعامد
۱۸۹	۱۰-۲-۲ تمرین برای ماتریس های متقارن و متعامد
۱۸۹	۱۱-۲ تمرین های گروه ای
۱۹۳	۱۲-۲ حل برخی از تمرین های دوره ای

فصل سوم فرم های درجه دوم

۲۱۳	۱-۳ مقدمه
۲۱۴	۲-۳ تعریف فرم درجه دوم
۲۱۶	۱-۲-۳ چند مثال
۲۱۷	۳-۳ قطری کردن فرم های درجه دوم
۲۱۹	۱-۳-۳ کاربرد در هندسه - منحنی های درجه دوم
۲۲۶	۱-۳-۳-۱ چند مثال از فرم های استاندارد منحنی های درجه دوم
۲۳۱	۲-۳-۳ کاربرد در هندسه - رویه های درجه دوم
۲۴۳	۱-۲-۳-۳ چند مثال از رویه های درجه دوم
۲۵۱	۴-۳ تمرین های فصل سوم

فهرست مراجع

۲۵۵	واژه نامه، فارسی به انگلیسی
۲۶۱	واژه نامه، انگلیسی به فارسی

پیشگفتار

نظریه فضای برداری خطی جذابیت خاصی در ریاضیات دارد. بردارها در این نظریه به صورت بسیار کلی تعریف می‌شوند به طوری که بردارها با تعریف ارائه شده در کتابهای مقدماتی ریاضیات حالت خاصی از آن است. همین ترتیب تعامد در فضای برداری اقلیدسی به صورت کلی تعریف می‌شود به طوری که تعامد خطوط در هندسه حالت خاصی از آن می‌باشد. به این دلایل این نظریه مورد توجه دانشجوی علاقه‌مند می‌باشد. از طرف دیگر این نظریه کاربردهای وسیعی در بسیاری از رشته‌های مهندسی دارد. با کمک این نظریه، توان ترکیب توابع شناخته شده و هموار را جایگزین توابع پیچیده و احتمالاً با گرادیان بزرگتر داد. با ترکیب توابع تکین شناخته شده را جایگزین توابع تکین ولی با تکینگی نامشخص نمود. با این جایگزینی‌ها به جای کار کردن با توابع پیچیده و یا با تکینگی نامشخص می‌توان با توابع ساده‌تر و نیز با تکینگی معلوم کار کرد. از این ابزار جایگزینی می‌توان در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و نیز در حل معادلات دیفرانسیل امتیازی به روش عددی استفاده نمود. به خصوص اگر توابع جایگزین شونده با تعریفی که در نظریه فضای برداری خطی می‌آید برهم عمود باشند، سرعت همگرایی روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل می‌تواند بسیار زیاد باشد. بسیاری از روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل و یا معادلات انتگرالی، بر همین اصل جایگزینی ترکیب توابع معلوم به جای توابع مجهول استوار است. این کتاب از یک طرف برگرفته از کتاب‌های فضای برداری خطی مشهور در دنیا است و از طرف دیگر حاصل ۱۰ سال تجربه تدریس درس ریاضی ۲ در پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران و نیز حاصل به کارگیری ابزار فوق‌الذکر در تحقیقات بنیادی انجام شده توسط نویسندگان در مهندسی عمران می‌باشد. این کتاب شامل ۳ فصل می‌باشد که به ترتیب ارائه در کتاب عبارت از فضای برداری خطی به عنوان فصل اول، تبدیلات خطی به عنوان فصل دوم و فرم‌های درجه دوم به عنوان فصل سوم می‌باشد. در فصل اول فضای برداری خطی استوار بر ۱۰ اصل موضوعه ساخته می‌شود و در آن ترکیبات خطی بردارها، پایه یک فضای برداری، ضرب داخلی در یک فضای برداری، فضاهای متعامد و تجزیه متعامد یک فضای برداری خطی توضیح داده می‌شود. به کمک تجزیه متعامد یک فضای برداری خطی می‌توان یک فضای برداری محدود برای ساخت جواب‌های یک معادله دیفرانسیل یا یک معادله انتگرالی ارائه نمود. در فصل دوم توابع یا تبدیلات خطی از یک فضای برداری خطی به فضای برداری خطی دیگر تعریف می‌شود. به کمک تبدیلات خطی تعریف شده در

و □ فضای برداری خطی، کاربردهای مقدماتی آن

فضای " R^n " بردارهای ویژه و مقادیر ویژه برای ماتریس‌ها توضیح داده می‌شوند. با استفاده از خواص بردارهای ویژه برای ماتریس‌های متقارن، دستگاه مختصات یکتایی ارائه می‌شود که ماتریس متقارن در آن دستگاه مختصات قطری است. بالاخره در فصل سوم، منحنی‌های درجه دوم و سطوح درجه دوم معرفی می‌شوند. با استفاده از تبدیلات خطی و بردارهای ویژه ماتریس‌های متقارن، منحنی‌های درجه دوم و سطوح درجه دوم با معادلات کانونی و ساده ارائه می‌شوند. این معادلات کانونی برای شناخت شکل این منحنی‌ها و سطوح درجه دوم مورد استفاده قرار می‌گیرند. تلاش شده است تا مفاهیم با مثال‌های متعدد توضیح داده شوند. در مجموع ۹۲ مثال در این کتاب برای آموزش سلیس حل شده است. تمرین‌های متعددی نیز قرار داده شده است تا دانشجو بتواند میزان یادگیری و توانایی‌های خود را کنترل نماید. بسیاری از تمرین‌ها نیز در انتهای هر فصل حل شده‌اند تا دانشجو با مقایسه بتواند صحت حل خود را بازبینی نماید.

نویسنده برخلاف لازم می‌داند که از تشویق‌های جناب آقای دکتر حسین رحیمی عضو محترم دانشکده علوم مهندسی پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران برای تهیه این کتاب بسیار تشکر نماید. به علاوه از سرکار خانم هندیس مریم عرفانی‌نیا که در بسیاری از مراحل آماده‌سازی این کتاب برای چاپ زحمت کشیده‌اند، تشکر و قدردانی می‌شود. از جناب آقای مهندس مجید نوربخش که شکل‌های این کتاب را با دقت زیاد رسم کرده‌اند، قدردانی ویژه می‌شود. به علاوه از زحمات آقای دکتر عزیرالله اردشیر بهرستاقی و آقایان مهندسین علی حسینی، مهدی اسکندری‌قادی، محمد امامی، عطالله جعفرزاده و امیرحسین امیری هزاوه که با طرق مختلف در آماده‌سازی این کتاب کمک کرده‌اند، تشکر و قدردانی می‌شود.

این اثر با تمام دقتی که در آن شده است، مطمئن دارم نقایصی است که از چشم نویسنده دور مانده است. لذا از دانشجویان، محققین، مدرسین و کلیه خوسدگاران این کتاب تقاضا می‌شود که هرگونه اشکال و یا اظهارنظر در مورد آن را از طریق رایانامه به آدرس gh:ti@ut.ac.ir یا از طریق پست به آدرس تهران، دانشگاه تهران، صندوق پستی ۴۵۶۳-۱۱۱۶۵، مرتضی اسکندری‌قادی ارسال نمایند، تا در چاپ‌های بعدی آن مورد استفاده قرار گیرد.

به امید ارتقاء هر چه بیشتر جامعه دانشگاهی ایران

مرتضی اسکندری قادی

پاییز ۱۳۹۵