

۱۴۲۸۵۱

بسم الله الرحمن الرحيم



دانشگاه سمنان

آشنایی با حقه‌های تولید شده توسط یگانها

مؤلف: دکتر ناهید اشرفی
عضو هیات علمی دانشگاه سمنان

سرشناسه	اشرفی، ناهید، ۱۳۴۵ -
عنوان و نام پدیدآور	آشنایی با حلقه های تولید شده توسط یکالها/تألیف ناهید اشرفی.
مشخصات نشر	سمنان: دانشگاه سمنان، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	۲۴۹ص.
شابک	978-600-8424-07-9 :
وضعیت فهرست نویسی	فیا
یادداشت	یادداشت : واژه نامه.
یادداشت	یادداشت : کتابنامه.
موضوع	حلقه ها (جبر) : موضوع: Rings (Algebra)
موضوع	مدول ها (جبر) : موضوع: Modules (Algebra)
شناسه افزوده	دانشگاه سمنان
شناسه افزوده	Semnan University
رده بندی کنگره	۵۱۳.۵ : ۵۱۳.۵ / Q۲۴۷
رده بندی دیویی	۵۱۳.۵ : ۵۱۳.۵
شماره کتابشناسی ملی	۴۱۸۲۰۸۷ :



آشنایی با حلقه های تولید شده توسط یکالها

مؤلف: دکتر ناهید اشرفی

نوبت چاپ: اول - پائیز ۱۳۹۵

طرح جلد: اسماعیل شجاعی

ناشر: انتشارات دانشگاه سمنان

شمارگان: ۴۰۰ جلد

قیمت: ۱۵۰۰۰ ریال

شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۸۴۲۴-۰۷-۹

حق چاپ محفوظ و متعلق به انتشارات دانشگاه سمنان می باشد.

تلفن انتشارات: ۰۲۳-۳۱۵۳۳۲۷۰ وب سایت: www.press.semnan.ac.ir

فهرست مطالب

۶	مقدمه
۹	۱ عدد جمعی یکالی حلقه ها، مثال ها و احکام مقدماتی
۹	۱.۱ تعاریف
۱۳	۲.۱ چند حکم ساده
۱۸	۳.۱ ساختن حلقه با عدد جمعی یکالی II
۲۳	۲ حلقه های اعداد صحیح میدان های مربعی و مختلط
۲۳	۱.۲ حلقه اعداد صحیح
۳۲	۲.۲ داشتن $\mathbb{Z}_7$ به عنوان یک عامل
۳۶	۳.۲ عدد جمعی یکالی میدان های مربعی و مختلط مکعبی
۴۹	۳ حاصل ضرب های تانسوری و حلقه گروه ها
۴۹	۱.۳ عدد جمعی یکالی حلقه گروه ها
۵۲	۲.۳ حاصل ضرب های تانسوری
۵۹	۳.۳ عدد جمعی یکالی دسته ای از حاصل ضرب های تانسوری
۷۱	۴ حلقه های خود-انژکتیو
۷۱	۱.۴ حلقه های خود - انژکتیو راست و خواص آنها

۲.۴	عدد جمعی یکالی حلقه‌های خودانزگنیو راست	۷۷
۵	حلقه‌های تبدلی	۹۵
۱.۵	خاصیت تبدلی	۹۵
۲.۵	عدد جمعی یکالی حلقه‌های تبدلی	۱۰۶
۶	حلقه‌ها با برد پایدار یک	۱۱۷
۱.۶	خاصیت برد پایدار یک	۱۱۷
۲.۶	عدد جمعی یکالی حلقه‌ها با برد پایدار یک	۱۳۰
۷	فضاهای برداری	۱۳۵
۱.۷	عدد جمعی یکالی فضاهای برداری با بعد متناهی	۱۳۵
۲.۷	عدد جمعی یکالی فضاهای برداری با بعد نامتناهی	۱۳۹
۳.۷	عدد جمعی یکالی حلقه ماتریس‌ها	۱۴۴
۸	مدول‌های آزاد	۱۵۵
۱.۸	عدد جمعی یکالی مدول‌های آزاد	۱۵۵
۲.۸	بهترین کران پایین عدد جمعی یکالی مدول‌های آزاد	۱۷۰
۹	مدول‌های تصویری	۱۷۳
۱.۹	عدد جمعی یکالی دسته‌ای از مدول‌های تصویری	۱۷۳
۱۰	مدول‌های پیوسته و گسسته	۱۷۹
۱.۱۰	مدول‌های پیوسته و برخی خواص آن‌ها	۱۷۹
۲.۱۰	مدول‌های گسسته و خواص آن‌ها	۱۸۴
۱۱	کاربرد مفهوم عدد جمعی یکال در نظریه گراف‌ها	۱۹۱
۱.۱۱	گرافهای یکه و برخی از خواص آن‌ها	۱۹۱
۲.۱۱	گراف یکه حلقه‌های با خاصیت k -جمعی	۲۰۳

۲۰۹	۱۲ دیدگاه رسته‌ای مفهوم عدد جمعی یکالی
۲۰۹	۱.۱۲ چند تابعگون همورد
۲۱۳	۲.۱۲ تابعگون‌های الحاقی
۲۲۲	۳.۱۲ ساختار $O_K/A(O_K)$ در توسیع‌های مربعی
۲۲۵	کتاب‌نامه
۲۳۳	واژه‌نامه فارسی - انگلیسی
۲۳۹	واژه‌نامه انگلیسی - فارسی
۲۴۷	نمایه

مقدمه

این سوال که چگونه یکالها می‌توانند یک حلقه را به طور جمعی تولید کنند مورد علاقه بسیاری از ریاضی‌دانان بوده است و شاید اولین بار در سال ۱۹۵۴ زلینسکی^۱ [۵۷] بود که به این مطلب پرداخت. او در واقع نشان داد که اگر V یک فضای برداری دلخواه (چه از بعد نامتناهی و چه از بعد نامتناهی) و D حلقه تقسیم باشد آن‌گاه حلقه تبدیلات خطی یعنی $End(V)$ توسط تبدیلات خطی وارون‌پذیر تولید می‌شود و در واقع هر تبدیل خطی به صورت جمع دو تبدیل خطی وارون‌پذیر نوشته می‌شود مگر آنی که $dim V = 1$ و $D = \mathbb{Z}_2$. البته باید خاطر نشان کرد که ولفسون^۲ [۵۵] نیز به طور مستقل در همان سال به این نتیجه رسیده بود. سپس اسکورنژاکوف^۳ [۴۸] این سوال را مطرح نمود که آیا اگر R یک حلقه منظم (فون نیومن) باشد آن‌گاه $usn(R) \leq \omega$ ؟

در واقع می‌توان نشان داد که جواب این سوال مثبت است اگر $\frac{1}{p} \in R$ و R یک حلقه منظم یکه باشد در واقع ارلیچ^۴ [۲۳] نشان داد که در این شرایط حلقه R ، خاصیت ۲-جمعی دارد یعنی هر عضو آن به صورت جمع دو یکال نوشته می‌شود. راسل^۵ [۴۸] به سوال اسکورنژاکوف این گونه جواب داد که شرط اینکه هر عضو خودتوان به صورت جمع دو یکال باشد را اضافه

^۱Zelinsky

^۲Wolfson

^۳Skoronyakov

^۴Ehrlich

^۵Raphael

نمود که البته شرط ضعیفتری از شرط $\frac{1}{p} \in R$ است. اما برگمن^۶ مثالی ساخت که توسط هندلمن^۷ [۳۲] گزارش شد، او یک جبر منظم R روی $\mathbb{Q}$ ساخت که $usn(R) = \infty$. فیشر^۸ و اسنایدر^۹ [۲۵] چندین شرط کافی برای آن که یک حلقه منظم، خاصیت ۲-جمعی داشته باشد را مطرح کردند. اما مفهوم عدد جمعی یکالی به شکلی که در اینجا معرفی خواهد شد اولین بار توسط گولداسمیت^{۱۰} و همکاران [۲۸] در سال ۱۹۹۸ مطرح گردید. این جالب است که همه حلقه‌هایی که در این مقالات در نظر گرفته شده است دارای عدد جمعی یکالی ۲ یا ∞ هستند. اما هرورگ^{۱۱} و زیگلر^{۱۲} [۳۴] توانستند برای هر عدد طبیعی n ، حلقه‌ای بسازند که دارای عدد جمعی یکالی n باشد که این خود مسئله بسیار مهم و جالبی است.

به این نکته باید توجه کرد که حلقه‌هایی که عدد جمعی یکالی ۲ دارند در آنالیز تابعی کاربرد فراوانی دارند. در واقع هر عنصر در یک جبر باناخ (مختلط یا حقیقی) جمع دو یکال است. از سال ۲۰۰۵ مجدداً این موضوع مورد علاقه نویسندگان زیادی قرار گرفته است از جمله ووس^{۱۳} [۵۳]، سرواستاوا^{۱۴} [۳۸] و چن^{۱۵} و ...

ما در این کتاب سعی کرده‌ایم مجموعه‌ای کامل از تحقیقاتی که در سال‌های اخیر توسط بنده و نویسندگان دیگر در این رابطه انجام ترسه است، را به صورتی که برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی اعم از دانشجویان ارشد و دکتری و کلبه پژوهشگرانی که به این زمینه تحقیقاتی علاقه مند هستند، فراهم آوریم.

اکثر مطالبی که در این کتاب آمده جدید هستند و نویسنده سعی کرده است که تا سرحد امکان مطالب ساده و به‌طور پیوسته آورده شوند. البته فرض شده است که خواننده با مفاهیم اولیه در

^۶Bergman

^۷Handelman

^۸Fisher

^۹Snider

^{۱۰}Goldsmith

^{۱۱}Herwig

^{۱۲}Ziegler

^{۱۳}Vamos

^{۱۴}Sirvastava

^{۱۵}Chen

نظریه حلقه‌ها و مدول‌ها آشنایی دارد.

این کتاب مشتمل بر ۱۲ فصل است که می‌توان آن را به سه قسمت دسته‌بندی کرد در قسمت اول سعی شده است عدد جمعی یکالی انواعی از حلقه‌ها (فصل‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶) را بررسی نمود سپس در قسمت دوم (فصل‌های ۷، ۸، ۹ و ۱۰) عدد جمعی یکالی دسته‌هایی از مدول‌ها را بررسی کرده‌ایم و در قسمت سوم کتاب در فصل ۱۱، کاربردی از مفهوم عدد جمعی یکالی در نظریه گراف را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در فصل پایانی هم نگاهی از دید رسته‌ای به این مفهوم داشته‌ایم. مسلماً این نوشته خالی از ایراد و اشکال نمی‌باشد لذا لازم است از همه همکاران و دوستانی که اشتباهات موجود در این کتاب را برای اصلاح در چاپ‌های بعدی متذکر می‌شوند، تشکر کنم. هم‌چنین لازم است از سرکار خانم معصومه عزالدین که زحمت تایپ و مظیم این کتاب را برعهده داشته‌اند کمال تشکر را داشته باشم.