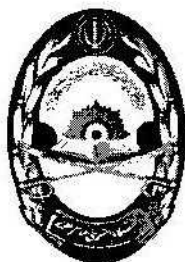


بسمه تعالی



دانشگاه افسری امام علی (ع)

معاونت پژوهش

مدیر و پیوستگی

علی رضا کاوسی

حمیدرضا فمی

حجت‌اله عبادی زاده

سرشناسه	کاوسی، علی رضا، ۱۳۶۶ -
عنوان و نام پدیدآور	حد و پیوستگی، علی رضا کاوسی، حمیدرضا قمی، حجت‌اله عبادی زاده.
مشخصات نشر	تهران: دانشگاه افسری امام علی (ع)، معاونت پژوهشی، ۱۳۹۲.
مشخصات ظاهری	۱۲۷ ص:، مصور، جدول، نمودار.
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۶۸۷۴-۲۲-۷
وضعیت فهرست نویسی	قیفا
یادداشت	کتابنامه: ص ۱۲۷.
موضوع	حد (ریاضیات) -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	حد (ریاضیات)
موضوع	پیوستگی -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	پیوستگی
شناسه افزوده	قمی، حمیدرضا، ۱۳۶۷ -
شناسه افزوده	عبادی زاده، حجت‌الله، ۱۳۵۶ -
شناسه افزوده	دانشگاه افسری امام علی (ع)، معاونت پژوهشی
زبان	۱۳۹۲ ع ۴ ی ۲۱۶ / QA ۳۰۳/۳
مکان	۵۱۵۰۲۲۲۰۷۶
شماره ثبت	۳۳۵۱۳۳۶

عنوان کتاب:	حد و پیوستگی
مؤلف:	علی رضا کاوسی، حمیدرضا قمی، حجت‌اله عبادی زاده
ویراستار علمی:	عباس بزرگ
ویراستار ادبی:	حسن رستمگاری
طراح جلد:	مهدی ترکاشوند
صفحه‌آرا:	بهنام مرادیان
مدیر مسئول انتشارات:	رضا قربانی
تیراژ:	۱۰۰۰ نسخه
قیمت:	۹۰۰۰۰ ریال
نوبت چاپ:	اول، ۱۳۹۲
شابک:	۹۷۸-۶۰۰-۶۸۷۴-۲۲-۷
صندوق پستی:	۱۳۱۷۸۹۳۴۷
تلفن:	۶۶۴۶۷۴۴۴

نشانی: تهران-خیابان امام خمینی^(۱) - ترسیده به میدان حر- دانشگاه افسری امام علی^(۲) معاونت پژوهش

پست الکترونیک: Imamali_edu@noavar.com

کلیه حقوق برای دانشگاه افسری امام علی^(۲) محفوظ است.

سخن انتشارات معاونت پژوهش دانشگاه افسری امام علی (ع)

دانشگاه افسری امام علی (ع)^(۴) با توجه به قدمت و سابقه حرفه‌ای خود، سال‌ها است که با تهیه و تدوین کتب علمی، نظامی و آموزشی مورد نیاز، سعی در تعالی روز به روز دانش علمی دانشجویان این دانشگاه دارد؛ و با هدف پرورش دانشجویان دانش‌مدار، هوشمند و متعهد، در راستای پاسداری و دفاع از تمامیت ارضی نظام مقدس جمهوری اسلامی ایران، گام‌های استوار و مؤثری برداشته است.

بر اساس مصوبات شورای پژوهشی و آموزشی دانشگاه، چاپ و نشر کتاب‌های ارزشی و کمک آموزشی سرلوحه کار قرار گرفته و در راستای تحقق این اهداف، با حمایت از تألیف، گردآوری و ترجمه کتاب‌های علمی، نخست منابع درسی مورد نیاز تأمین گردیده و در مرحله بعد، تدوین منابع علمی، کمک آموزشی و پژوهشی در دستور کار قرار گرفته است.

برای چاپ کتاب، علاوه بر ارتقای علمی، می‌باید اهداف عالی ارتش جمهوری اسلامی ایران، اهتمام به محتوای ارزشی و معنوی کتاب، هماهنگی با سرفصل‌های وزارت علوم و کاربردی و تخصصی کردن کتاب‌های تدوین شده و... لحاظ شود که دشواری‌ها و موانع راه بر هیچ یک از مباحث نظامی پوشیده نیست.

به امید آن‌که گام‌های ارزشمند و مفیدی که در این راه برداشته شده است، سرآغاز حرکت و پویایی بیش از پیش این دانشگاه مقدس باشد. از این‌رو از تمامی منتقدان، استادان و هیئت‌های علمی دانشگاه‌های کشور یار و یارای جوییم تا کاستی‌ها و نقص‌های احتمالی را، هرچه کم و ناچیز باشند، یادآوری کنند.

ان شاء الله...

پیش‌گفتار

امروزه ریاضیات به عنوان یکی از پیش‌نیازهای هر تخصص، به نوعی در کلیه رشته‌ها و مقاطع تحصیلی تدریس می‌شود. هر رشته به تناسب نیاز، از ریاضیات بهره می‌برد و هر دانش‌پژوه به مقدار لازم به دانستن این علم نیازمند است. تحقیق و پژوهش نیز بر بستر آمار و ریاضی استوار است.

مبحث حد، یکی از پیش‌دانستنی‌های مهم علوم پایه و فنی به شمار می‌رود. انگیزه نگارش کتاب به دلیل احساس نیازی بود که دانشجویان به دانستن مبحث حد و پیوندی که جهت حل مسائل کتب درسی خود داشتند. در این کتاب سعی بر آن بوده است که کتاب طالب مرتبط با این مبحث مطرح، و با طرح مثال‌هایی مورد بررسی قرار داده شود تا دانش‌جو از مراجعه به منابع مختلف بی‌نیاز گردد. در پایان هر فصل کوشش شده تا با طرح مسائلی بیشتر در غالب خودآزمایی، آموخته‌های فصل مورد محک قرار گیرد.

کلیه عزیزانی که این کتاب را مطالعه می‌کنند، به ویژه اساتید، دانشجویان و سایر صاحب‌نظران محترم می‌توانند نظرات خود را به آدرس ناشر و یا به پست الکترونیکی

Hamidreza_ghomi@vc.iust.ac.ir ارسال نمایند.

کتاب حاضر، حاصل سال‌ها تلاش علمی و محنت بسیار است؛ به امید آنکه با ارائه این اثر، گامی هر چند کوچک در راه به ثمر رسیدن آرزوهای والای علمی برای تحقق جامعه‌ای پیشرفته برداشته شود. در پایان از تمامی ریزان علمی، خصوصاً امیر فرماندهی محترم دانشگاه، معاون محترم پژوهشی دانشگاه، معاون محترم آموزشی دانشگاه، اساتید محترم گروه ریاضی، مدیر محترم نشر، کارکنان واحد نشر، کارکنان خوب و زحمت‌کش چاپ‌خانه که در مراحل نگارش تا چاپ این اثر صمیمانه مولفین را مورد حمایت قرار داده و متقبل زحمات فراوانی گردیده‌اند کمال تشکر را دارد.

مولفان

راهنمای تدریس و یادگیری

« به اساتید محترم و دانشجویان گرامی توصیه می‌شود مطالب این بخش را مطالعه فرمایند.»

اگر بگوییم ریاضیات یکی از آسان‌ترین علوم جهان است، اغراق نکرده‌ایم! در سال‌های گذشته، محققان (که جهان به نوعی وام‌دار فعالیت آنان است) یافته‌هایی منتشر نمودند که در آن نشان می‌داد تمام مردم جهان (که از عقب ماندگی ذهنی رنج نمی‌برند) می‌توانند ریاضی دان شوند! اما عده‌ای سریع‌تر و عده‌ای کندتر به این مطلوب دست می‌یابند. مهم‌ترین مطلبی که برای یادگیری ریاضیات توصیه می‌شود، ممارست و صبر و وقت است. مؤلفان که با سایر دانشگاه‌ها نیز در ارتباط‌اند، با تکیه بر تجربه ارتباط تنگ‌بند^۱ دانشجویان دانشگاه امام علی^(ع) و نیز بررسی آمارهای آزمون هوش معاونت پژوهشی، نشان می‌دهند که متوسط ضریب هوشی دانشجویان این دانشگاه بالاتر از سایر دانشگاه‌هاست. هرچند مجالی برای ذکر این دسته از مطالب نیست؛ لیکن دانشجویان باید به این مسئله^۲ نیز توانایی‌های بالای خود، باور و اعتماد داشته باشند.

با توجه به اینکه اساتید محترم به مسائل تدریس و یادگیری کاملاً واقفند؛ لیکن در این جا مطالبی را که بیشتر جنبه عمومی دارند یادآور می‌شویم:

استاد و دانشجو هر دو در فرآیند یادگیری سهیم و مسئولند. در امر اثر بخشی تعلیم میزان تأثیر هر مطلب، ارتباط ظریف و سنجیده‌ای به کیفیت تدریس دارد که اساتید با تجربه و آگاه، به یقین، هر یک به طریقی به این مطلوب دست می‌یابند. آنچه در این جا شایسته است در مقام توصیه مؤکد آورده شود، یادآوری رسالت و اهداف است که این

^۱ منابع مختلفی برای اثبات این ادعا وجود دارد؛ لیکن می‌توانید به مقدمه کتاب ریاضی سال اول دبیرستان

مراجعه فرمایید.

^۲ حدیثی از امام محمد تقی (علیه السلام)

شاخه از علم بر عهده اساتید معظم علوم ریاضی نهاده است. توانایی تدریس، متناسب با متن و ساعات درسی، که منتج به بیش‌ترین و کامل‌ترین نتایج شود.

مدرسین محترم می‌بایست با بیان گام به گام مطالب و سرفصل‌های مصوب به زبان ساده، دانشجویان را در امر یادگیری یاری نمایند؛ تدریس ناقص و شیوه‌های نادرست همواره گریبان‌گیر کسانی است که در پی دانش، جهاد می‌نمایند. در این میان، وظیفه دانشجویان سنگین‌تر خواهد بود؛ دانشجویان پس از آموختن مطالب درسی می‌بایست مطالب تدریس شده را مطالعه، به مباحث بعدی توجه و ابهامات به وجود آمده را به کمک استاد رفع نمایند.

به سبیل مثال، در موردی کتاب، از فراگیران انتظار می‌رود که پس از مطالعه مباحث و نکات مطروحه، به مثال مطرح شده، چگونگی حل مثال‌ها را فرا گرفته و در پایان سعی نمایند تا مطالب پایانی را در هر چند ساعت حل کنند.

کتاب دارای دو فصل می‌باشد. در هر یک از فصول، مسایل بنیادین مبحث حد و پیوستگی با ذکر مثال‌های دراماتیک مطرح شده است. در انتخاب متون، پختگی و انسجام، سطح تحصیلی و نهایتاً مخاطبان کتاب در نظر داشته‌ایم، تا دانش‌پژوهان جوان بدون سردرگمی در کتب مختلف این مبحث را فرا بگیرند.

با آرزوی موفقیت برای تمام استادگران عرصه علم و دانش

فهرست مطالب

فصل اول (مفهوم حد)	(۱-۹۲)
هدف‌های رفتاری	۲
۱-۱) حد تابع در یک نقطه	۳
۱-۱-۱) حد راست	۳
۱-۱-۲) حد چپ	۴
۱-۲) حد و در	۸
۱-۳) قضیه‌ها	۱۱
۱-۴) آشنایی با حد بی‌نهایت	۱۶
۱-۴-۱) محاسبه حد بی‌نهایت	۱۷
۱-۴-۲) حد در بی‌نهایت	۱۹
۱-۴-۳) قضایای حد بی‌نهایت	۲۱
۱-۵) حالت‌هایی که باید حد چپ و راست را جداگانه حساب کنیم	۲۵
۱-۶) محاسبه حد توابع کسری	۳۱
۱-۷) محاسبه حد توابع رادیکالی	۳۱
۱-۸) حد توابع چند ضابطه‌ای	۳۲
۱-۹) محاسبه حد توابع از روی نمودار	۳۹
۱-۱۰) صورت‌های مبهم	۴۰
۱-۱۱) حالات مختلف رفع ابهام	۴۲

فهرست مطالب

۴۴	۱-۱۲) حالات مختلف رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$
۴۵	۱-۱۳) حالات مختلف رفع ابهام $\infty - \infty$
۴۶	۱-۱۴) حالات مختلف رفع ابهام $\infty \times \infty$
۴۶	۱-۱۵) رفع ابهام صور مبهم نهایی
۵۰	۱-۱۶) تمرینات فصل اول
۸۶	تمرینات فصل اول
۹۰	ضمیمه فصل اول
(۹۳-۱۲۶)	فصل دوم (مفهوم پیوستگی)
۹۴	هدف‌های رفتاری
۹۵	۲-۱) مفهوم پیوستگی
۹۵	۲-۱-۱) پیوستگی در یک نقطه
۹۵	۲-۱-۲) پیوستگی یک طرفه
۹۶	۲-۲) انواع حالات ناپیوستگی در یک نقطه
۹۶	۲-۲-۱) ناپیوستگی رفع نشدنی یا اساسی
۹۷	۲-۲-۲) ناپیوستگی رفع شدنی

فهرست مطالب

۱۰۰	۲-۳ قضایای پیوستگی
۱۰۴	۲-۴ پیوستگی توابعی که ضابطه آنها روی Z عوض می‌شود
۱۰۷	۲-۵ پیوستگی تابع روی یک فاصله
۱۱۰	۲-۶ پیوستگی تابع معکوس
۱۱۰	۲-۷ پیوستگی توابع از نظر هندسی
۱۱۱	۲-۸ پیوستگی پیوستگی
۱۱۱	۲-۸-۱ قضیه مقدار میانی
۱۱۱	۲-۸-۲ تعبیر هندسی قضیه مقدار میانی
۱۱۲	۲-۸-۳ قضیه بولتزانو
۱۱۷	۲-۹ خطوط مجانب
۱۱۷	۲-۹-۱ مجانب قائم
۱۱۹	۲-۹-۲ مجانب افقی
۱۲۱	۲-۹-۳ مجانب مایل
۱۲۱	۲-۹-۴ روش‌های تعیین مجانب مایل
۱۲۶	تمرینات فصل دوم
۱۲۷	کتاب‌نامه