

روش‌های استدلال و اثبات در

ریاضیات

علیرضا عین‌الهی

عضو هیئت علمی دانشگاه فرهنگیان

انتشارات پژوهشگر برتر

تهران ۱۳۹۶

سرشناسه :	عین‌الهی، علیرضا، ۱۳۴۵ -
عنوان و نام پدیدآور :	روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات/ علیرضا عین‌الهی.
مشخصات نشر :	تهران: پژوهشگر برتر، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری :	۱۹۲ص.: جدول، نمودار.
شابک :	۳۰۰۰۰۰ ریال: ۵-۰-۹۶۹۳۴-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی :	فیفا
موضوع :	ریاضیات -- روش‌شناسی
موضوع :	Mathematics -- Methodology
موضوع :	منطق ریاضی -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع :	Logic, Symbolic and mathematical -- Study and teaching (Higher)
موضوع :	منطق ریاضی -- مسائل، تمرینها و غیره (عالی)
موضوع :	Logic, Symbolic and mathematical -- Problems, exercises. etc (Higher)
رده بندی کنگره :	QA ۸/۷/۴۹۹ ۱۳۹۶
رده بندی درسی :	۵۱۰/۱
شماره کتابشناسی ملی :	۴۶۴۳ ۱۵

نشانی مرکز نشر: تهران، بزرگراه شهید محلاتی، خیابان شهید فتح الهی شمالی، خیابان شهید طالبی

گرکانی، کوچه یوسف زاده، پلاک ۱۰، طبقه دوم، واحد ۲ و ۳ - کدپستی: ۱۷۶۷۹۷۸۱۱۷

دفتر مرکزی نشر: ۳۳۱۷۴۸۰۷ پیام‌گیر و دوتار: ۳۳۱۶۹۴۰۶ سیستم پیامکی: ۰۲۱۳۳۱۶۹۴۰۶

Emile: info@bookpb.ir

Site: www.bookpb.ir

نام کتاب: روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات

نویسنده: علیرضا عین‌الهی

ناشر: پژوهشگر برتر

نوبت چاپ: اول (۱۳۹۶)

شماره گان: ۱۰۰۰ نسخه

قیمت: ۲۰۰۰۰ تومان

شابک: ۵-۰-۹۶۹۳۴-۶۰۰-۹۷۸

حق چاپ برای مولف و ناشر محفوظ می‌باشد.

فهرست مطالب

۱۲	پیشگفتار
۱۴	مقدمه
۱۵	بخش ۱. منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها
۱۷	فصل ۱. گزاره و گزاره‌نما
۱۷	مقدمه
۱۸	منطق قدیم یا منطق ارسطویی
۱۸	منطق جدید یا منطق کلاسیک
۱۹	مفهوم گزاره
۱۹	نکته‌ها
۲۰	اجزای یک گزاره ساده یا ملق قدیم
۲۱	اجزای یک گزاره ساده یا منطق جدید
۲۲	انواع گزاره‌ها
۲۲	الف) گزاره موجبه و سالبه
۲۳	ب) گزاره ساده و مرکب
۲۳	مجموعه محمول یک گزاره
۲۴	مجموعه شناخت یک گزاره
۲۴	مجموعه درستی یک گزاره
۲۵	عالم سخن
۲۶	مجموعه عمومی
۲۷	اسم خاص یا ثابت‌ها
۲۷	اسم‌نما
۲۷	متغیر
۲۷	گزاره‌نما
۲۸	نکته‌ها
۲۸	دامنه متغیر (حوزه تعریف) گزاره‌نما
۲۹	مجموعه جواب گزاره‌نما
۲۹	سورها و گزاره‌های سوری
۲۹	۱) سور عمومی

- نکته‌ها ۲۹
- ۲۰ (۲) سور وجودی
- نکته‌ها ۳۰
- ۳۱ (۳) سور صفر (یا سور هیچ)
- نکته‌ها ۳۱
- ۳۲ (۴) سور انحصاری
- نکته‌ها ۳۲
- گزاره‌ها: چند سوری ۳۳
- تمرین تکلیف یادگیری فصل ۱ ۳۵

- فصل ۲. رابط‌های گزاره ۴۱
- نقیض گزاره ۴۱
- نکته‌ها ۴۱
- گزاره عطفی ۴۲
- نکته‌ها ۴۲
- گزاره فصلی ۴۲
- نکته‌ها ۴۲
- یای مانع جمع ۴۳
- گزاره شرطی ۴۴
- نکته‌ها ۴۴
- روش‌های بیان گزاره شرطی ۴۵
- گزاره دوشروطی ۴۵
- نکته‌ها ۴۶
- روش‌های بیان گزاره دوشروطی ۴۶

تمرین و تکلیف یادگیری فصل ۲ ۴۷

- فصل ۳. جبر گزاره‌ها ۵۱
- جدول ارزشی (یا جدول درستی) گزاره‌ها ۵۱
- جدول ارزشی دو گزاره ۵۱
- جدول ارزشی سه گزاره ۵۱

- جدول ارزشی n گزاره ۵۱
- گزاره‌های مرکب و جداول ارزشی آن‌ها ۵۲
- گزاره‌های مساوی ۵۳
- گزاره‌های همیشه درست (راستگوها) ۵۳
- استلزام منطقی ۵۴
- گزاره‌های همیشه نادرست (تناقض‌ها) ۵۴
- گزاره‌های هم‌ارز ۵۴
- هم‌ارزی و ترکیب دوشروطی ۵۶
- قانون هم‌ارزی ۵۸

تمرین و تکلیف یادگیری فصل ۳ ۶۱

- فصل ۴. نقیض گزاره‌های مرکب و گزاره‌های مرکب ۶۵
- نقیض گزاره‌های سوری ۶۵
- نقیض گزاره‌های چندسویه ۶۷
- نقیض گزاره عطفی ۶۷
- نقیض گزاره فصلی ۶۸
- نقیض گزاره شرطی ۶۸
- نقیض گزاره دوشروطی ۶۹

تمرین و تکلیف یادگیری فصل ۴ ۷۱

فصل ۵. استنتاج ۷۵

- تعریف استنتاج ۷۵
- دستگاه استنتاج ۷۶
- ویژگی‌های دستگاه استنتاج ۷۶
- روش‌های اثبات درستی یک استنتاج ۷۷
- الف) استفاده از جداول ارزشی ۷۷
- ب) استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها ۷۸
- ج) استفاده از روش مستقیم ۷۹
- د) استفاده از روش غیرمستقیم ۸۲

تمرین و تکلیف یادگیری فصل ۵ ۸۶

۹۱	فصل ۶. استدلال قیاسی
۹۱	قیاس
۹۲	دستگاه قیاسی
۹۲	انواع گزاره‌ها در دستگاه قیاسی
۹۳	اصول و انواع آن
۹۳	برهان
۹۴	نکات اساسی و پایه در دستگاه قیاسی
۹۴	استدلال قیاس
۹۵	اثبات به روش استدلال قیاسی
۹۷	قانون حذف گزاره
۹۹	تمرین و تکلیف دیگ فصل ۶
۱۰۱	بخش ۲. روش‌های استدلال اثبات در ریاضیات
۱۰۳	فصل ۷. استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای
۱۰۳	لزوم ارائه اثبات در ریاضیات
۱۰۴	جایگاه اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای
۱۰۴	اثبات ریاضی چیست؟
۱۰۵	ماهیت اثبات ریاضی چیست؟
۱۰۵	عامل بدفهمی در برنامه درسی ریاضیات
۱۰۶	توجه به روش‌های یادگیری دانش‌آموزان در درس ریاضی
۱۰۷	تمرین و تکلیف یادگیری فصل ۷
۱۰۹	فصل ۸. روش‌های مختلف استدلال در ریاضیات
۱۰۹	درک شهودی
۱۱۱	مطالعه و استفاده از درک شهودی چه ضرورتی دارد؟
۱۱۲	محدودیت‌های شهود و تجربه
۱۱۳	استدلال تمثیلی
۱۱۶	استدلال استقرایی
۱۱۹	محدودیت استدلال استقرائی

۱۲۱ تمرین و تکلیف یادگیری فصل ۸

۱۲۳ فصل ۹. روش های مختلف اثبات در ریاضیات

۱۲۳ اثبات گزاره های سور عمومی

۱۲۴ اثبات گزاره های سور وجودی

۱۲۵ اثبات گزاره های سور صفر

۱۲۶ اثبات گزاره های سور انحصاری

۱۲۸ اثبات قوانین عطفی

۱۲۹ اثبات قوانین ضلی

۱۳۰ اثبات قوانین شرطی به روش مستقیم (اثبات مستقیم)

۱۳۲ برهان خلف

۱۳۳ برهان خلف در قضایای شرطی

۱۳۴ برهان خلف در احکام شرطی

۱۳۵ اثبات به روش عکس

۱۳۶ اثبات به انتقای مقدم

۱۳۶ اثبات قوانین دوشروطی

۱۴۰ مثال نقض

۱۴۲ تمرین و تکلیف یادگیری فصل ۹

۱۴۷ فصل ۱۰. اصل خوش ترتیبی و کاربرد آن

۱۴۷ مجموعه های کراندار

۱۴۸ عضو ابتدا و عضو انتهای

۱۴۸ سوپریموم و اینفیموم

۱۴۹ اصل موضوع تامیت (کمال)

۱۴۹ اصل خوش ترتیبی

۱۴۹ کاربرد اصل خوش ترتیبی در اثبات مسایل

۱۵۲ تمرین و تکلیف یادگیری فصل ۱۰

۱۵۳ فصل ۱۱. اصل استقرای ریاضی

۱۵۳ اصل و قضیه استقرای ریاضی

تمرین و تکلیف یادگیری فصل ۱۱ _____ ۱۶۱

فصل ۱۲. تعمیم اصل استقرای ریاضی و کاربردهای آن _____ ۱۶۵

استقراء ابتدا از یک عدد طبیعی _____ ۱۶۵

تعمیم تعریف استقرایی _____ ۱۶۸

تمرین و تکلیف یادگیری فصل ۱۲ _____ ۱۷۳

پیوست ۱. مجموعه‌ها _____ ۱۷۵

نظریه مجموعه‌ها _____ ۱۷۵

مفهوم مجموعه _____ ۱۷۵

مشخصات مجموعه‌ها _____ ۱۷۶

روش‌های نمایش مجموعه‌ها _____ ۱۷۷

الف) نمایش تفکیکی _____ ۱۷۷

ب) نمایش با خاصیت مشترک _____ ۱۷۷

ج) نمایش با علائم ریاضی _____ ۱۷۸

د) نمایش با نمودار ون (اشکال هندسی) _____ ۱۷۸

مجموعه‌های اعداد _____ ۱۷۹

مجموعه اعداد طبیعی _____ ۱۷۹

مجموعه اعداد حسابی _____ ۱۷۹

مجموعه اعداد صحیح _____ ۱۷۹

مجموعه اعداد گویا _____ ۱۸۰

مجموعه اعداد گنگ _____ ۱۸۰

مجموعه اعداد حقیقی _____ ۱۸۰

مجموعه اعداد مختلط _____ ۱۸۰

مجموعه تهی _____ ۱۸۱

زیر مجموعه _____ ۱۸۱

زیر مجموعه حقیقی _____ ۱۸۲

مجموعه مرجع یا جهانی _____ ۱۸۲

تساوی دو مجموعه _____ ۱۸۳

اجتماع دو مجموعه _____ ۱۸۴

۱۸۴ اشتراک دو مجموعه

۱۸۵ تفاضل دو مجموعه

۱۸۷ تمرین و تکلیف یادگیری پیوست ۱

۱۸۹ منابع جهت مطالعه بیشتر

۱۸۹ کتب

۱۹۱ مقالات

۱۹۱ وبگاهها

www.ketab.ir

پیشگفتار

قطعاً، همه‌ی ما در زندگی روزمره با مشاغل مختلفی برخورد داشته‌ایم. اگر با دقت به نحوه کار شاغلین در این مشاغل (مانند: یک گچ‌کار، یک برق‌کار ساختمان، یک مکانیک، یک نجار و غیره) توجه کنیم، به راحتی در خواهیم یافت که هر کدام از این افراد برای آن‌که بتوانند در حرفه خود موفق و کارآمد باشند به دو چیز بسیار مهم نیاز دارند.

اولین چیز، که در هر شغل به آن نیاز است وسایل و ابزار اصلی آن حرفه است. مثلاً، یک گچ‌کار، برای بچ‌کاری یک دیوار، حداقل به یک ماله گچ‌کاری، یک استانبولی گچ‌کاری و مقداری گچ و آب نیاز دارد؛ و یا یک برق‌کار برای اینکه بتواند سیم‌کشی یک ساختمان را آغاز کند حداقل به یک فازمتر (که به جای پیچ‌گوشتی نیز به کار می‌رود)، یک سیم‌چین، یک انبردست، مقداری سیم، چسب برق و غیره نیاز دارد؛ و یک مکانیک نیز برای تعمیر یک اتومبیل به تعدادی چکش، انواع آچار (مانند: آچار بکس، آچار فرانسه، آچار آلن، آچار شلاقی و غیره)، انواع انبر (مانند: انبردست، انبر کلاغی، انبر قفلی و غیره) و انواع قیچی‌ها و غیره نیاز دارد. همانطور که ملاحظه می‌شوید بسته به نوع شغل مقدار و تعداد ابزار مورد نیاز آن متفاوت است.

اما دومین چیزی که در هر شغل به آن نیاز است تجربه و تخصص لازم جهت استفاده به موقع و موثر از ابزار و وسایل آن حرفه است. هرگز این نکته را نباید فراموش کرد که هرچقدر هم در شغل‌تان تبحر و تخصص بالایی داشته باشید بدون داشتن ابزار و وسایل لازم مورد نیاز آن شغل، یا در کار شکست خواهید خورد و یا نهایت کار با آن کیفیت مورد نظر انجام نخواهد گرفت؛ و این نشان از ارتباط دو سویه بین «در اختیار داشتن ابزار و وسایل یک شغل» با «داشتن تبحر در به کارگیری این ابزار» است.

از آنچه که ذکر کردیم نتیجه می‌شود، یک معلم ریاضی نیز برای این‌که در امر آموزش به عنوان یک شغل مقدس، موفق و مقبول مخاطبان خود، یعنی دانش‌آموزان باشد، لازم است ضمن اطلاع داشتن از ابزار مورد نیاز برای آموزش علم ریاضی، باید تبحر و تخصص کافی در امر استفاده از این ابزار را نیز داشته باشد.

حال این سوالات مطرح است که

(۱) ابزار مورد نیاز یک معلم ریاضی چیست؟

(۲) و معلم ریاضی برای کسب تبحر در امر استفاده از این ابزارها چه باید بکند؟

در پاسخ به سوال اول می‌توانیم مفاهیم اولیه، تعاریف، اصول، قوانین، مربوط به گزاره‌ها، گزاره‌نماها، سورها، رابط‌های گزاره‌ای، گزاره‌های هم‌ارز، جبر گزاره‌ها، هم‌ارزی‌ها، جداول ارزشی و غیره، را به عنوان نمونه‌هایی از ابزار و وسایل مورد نیاز یک معلم ریاضی نام ببریم. لازم به ذکر است که داشتن دانش و اطلاع کافی از این ابزار برای هر معلم ریاضی از ضروریات امر است.

اما در پاسخ به سوال دوم می‌توانیم با آموزش انواع روش‌های استدلال و اثبات، قدرت و توان یک معلم ریاضی را با استفاده از ابزارهای معرفی شده در بالا ارتقاء داده و آن‌ها را نسبت به چگونگی آموزش‌های علمی و غیر علمی ریاضیات آشنا کنیم. ضمناً باید خاطر نشان کنیم که با تسلط به برخی از روش‌های استدلال و اثبات می‌توانیم نقش بسزایی در توسعه و گسترش علم ریاضی داشته باشیم.

از دهه هفتاد به بعد، در کتب ریاضیات پایه دوره پیش‌دانشگاهی رشته علوم انسانی (فصل اول کتاب)، جبر و احتمال دوره متوسطه سال سوم رشته ریاضی (فصل اول کتاب)، هندسه ۱ رشته‌های علوم تجربی و ریاضی (فصل اول کتاب) و هندسه ۲ دوره متوسطه سال سوم ریاضی (فصل اول کتاب) مفاهیمی مانند درک شهودی، انواع استدلال‌های علمی و غیر علمی جهت آموزش به دانش‌آموزان دوره‌های متوسطه گنجانده شده است، که نشان از اهمیت توجه به استفاده از انواع استدلال بهره‌گیری از آن در آموزش و حل مسائل دارد. در تمام این کتب سعی شده است که به دانش‌آموزان آموخته‌شود که استدلال ریاضی باید به چه گونه‌ای باشد و از طرف دیگر فایده استفاده از استدلال‌های غیر علمی تا حدودی برای آن‌ها روشن گردد.

مقدمه

خداوند را سپاس می‌گوییم که با هدف عالی خدمت به خلق، جهت رضایت او کار را آغاز کرده و امروز کتاب روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات را به اتمام رساندم. امید است در ویرایش‌های بعدی این کتاب بتوانم نقاط ضعف آن را کاهش داده و به نقاط قوت آن بیافزایم.

در این کتاب به دنبال آن هستیم که زبانی دقیق و نمادین را برای درک مفاهیم و ساختارهای ریاضی در اختیار دانشجویان و دانش‌آموخته‌های علم ریاضی قرار دهیم. اولین گام در این راستا آشنایی با منطق ریاضی و به دنبال آن آشنایی با انواع استدلال‌ها و اثبات‌ها در ریاضیات و نیز تعیین جایگاه آن در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای است.

در پایان این کتاب دانشجویان قادر خواهند بود ضمن فراگیری قواعد و قوانین منطق ریاضی و جبرگزاره‌ها به عنوان ابزار و وسایل مورد نیاز یک معلم ریاضی، از آنها در مراحل مختلف استدلال و اثبات ریاضی استفاده کنند. توانایی استدلال و ارائه یک اثبات دقیق برای درک مفاهیم ریاضی یک موضوع اساسی است. به ویژه دانشجویان باید به شیوه‌های ارائه استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای - با توجه به تفاوت‌های آن در ریاضیات پیشرفته - دست یابند.

کتاب حاضر در دو بخش تدوین شده است. در بخش اول با معرفی ابزارهای مورد نیاز برای معلم ریاضی پرداخته‌ایم. در بخش دوم انواع روش‌های استدلال و اثبات در ریاضی را آورده‌ایم. در این بخش سعی کرده‌ایم با آرایه مثال‌های ساده از دروس نظریه مجموعه‌ها، نظریه اعداد و حساب دیفرانسیل و انتگرال، روش‌های استدلالی و اثباتی بیان شده را واضح‌تر و روشن‌تر بسازیم.

علیرضا عین‌الهی

عضو هیئت علمی دانشگاه فرهنگیان